Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ

А. М. Скобеев

(Москва)

Рассматривается задача о распространении волны разгрузки, поставленная Х. А. Рахматулиным [1]; доказывается существование и единственность функции, описывающей волну разгрузки; проводится некоторое качественное исследование этой функции. Доказано, что при $t \to \infty$ скорость распространения волны разгрузки асимптотически стремится к скорости распространения упругих возмущений.

1. **Постановка задачи.** Ищутся функции $u(x, t)$, $v(x, t)$, $f(x)$, такие, что непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ делит область $x \geqslant 0$ плоскости x, t на две области D_1 и D_2; непрерывные в области $x \geqslant 0$ и непрерывно дифференцируемые в каждой из областей D_1 и D_2 функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют:

в области D_1 системе уравнений

$$v_x(x, t) = u_t(x, t), \qquad v_t(x, t) = a^2(u)\, u_x(x, t) \tag{1.1}$$

и условию

$$u(x, t_1) \geqslant u(x, t_2) \quad \text{при } t_1 > t_2$$

в области D_2 системе уравнений

$$v_x(x, t) = u_t(x, t)$$
$$v_t(x, t) = a_0^2 u_x(x, t) + [a^2(u) - a_0^2]\frac{du(x, f(x))}{dx} \tag{1.2}$$

и условию

$$u(x, t_1) < u(x, t_2) \quad \text{при } t_1 > t_2$$

Кроме того,

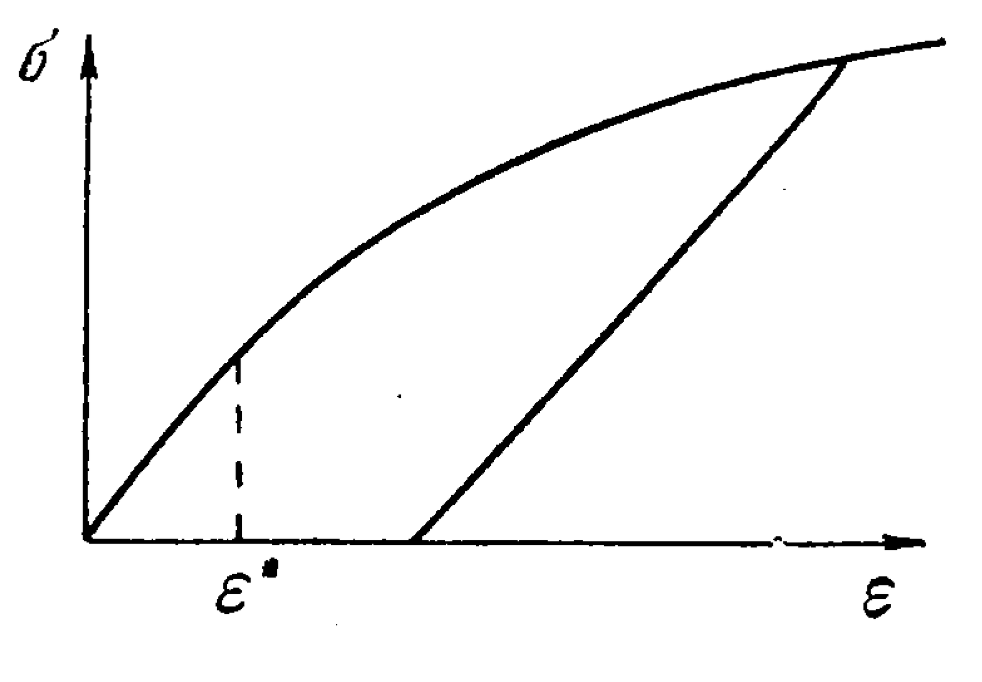
$$\sigma(u(0, t)) = p(t) \quad \text{при } t \geqslant 0$$
$$\sigma(u(0, t)) = q(t) \quad \text{при } 0 > t \geqslant \tau(0)$$
$$u(x, \tau(0)) = 0, \quad v(x, \tau(0)) = 0 \quad \text{при } x \geqslant 0$$

Здесь $p(t)$ и $q(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, такие, что

$$p(0) = q(0), \quad p'(t) \leqslant 0, \quad q'(t) \geqslant 0$$

Величина $a(u)$ есть непрерывно дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная равенством (фиг. 1)

$$a^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \qquad (a(u) = a_0 \quad \text{при } u \leqslant \varepsilon^*)$$



Фиг. 1

где ρ — плотность при $u = 0$, т. е. $\rho = \mathrm{const}$; функция $\tau(\varepsilon)$ определяется из уравнения $\sigma(\varepsilon) = q(\tau)$.

2. *Лемма* 2.1. Если существуют функции $u(x, t)$, $v(x, t)$, $f(x)$, удовлетворяющие выше сформулированным требованиям, то

$$\frac{1}{a(\varepsilon(x))} \geqslant \frac{df}{dx} \geqslant \frac{1}{a_0} \tag{2.1}$$

Здесь и далее положено

$$\varepsilon(x) = u(x, f(x))$$

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке x_0 неравенство (2.1) не выполняется; тогда в некотором интервале $[x_0 - \mu, x_0 + \mu]$, $\mu > 0$ оно также не выполняется. Как известно

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_x \cos\varphi + u_t \sin\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = v_x \cos\varphi + v_t \sin\varphi$$

где $\partial u / \partial s$ и $\partial v / \partial s$ — производные вдоль $f(x)$, а $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$

Отсюда из (1.1) и (1.2) получим

$$u_t^+ \cos\varphi\left(f'^2 - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial s} f' - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{1}{a^2} \quad \text{для } D_1 \tag{2.2}$$

$$u_t^- \cos\varphi \frac{a_0^2}{a^2}\left(f'^2 - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial s} f' - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{1}{a^2} \quad \text{для } D_2 \tag{2.3}$$

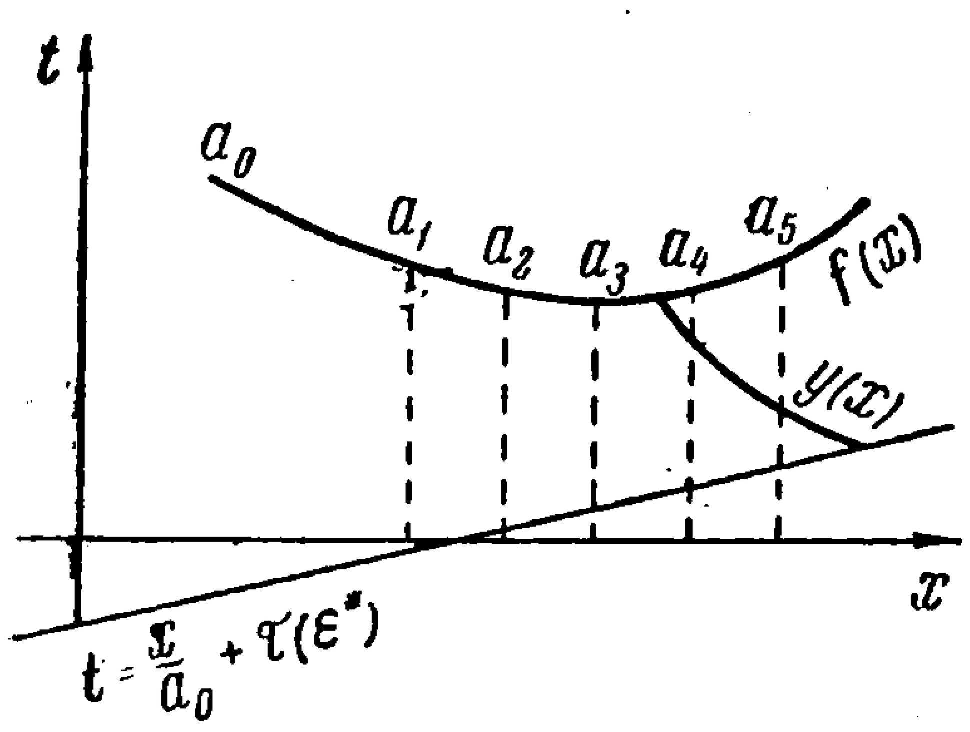
Здесь

$$u_t^+ = \lim u_t(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in D_1, \qquad (x, t) \to (x, f(x))$$
$$u_t^- = \lim u_t(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in D_2, \qquad (x, t) \to (x, f(x))$$

Так как $u_t^+ \geqslant 0$, $u_t^- \leqslant 0$ и (2.1) не выполняется, то, перемножив равенства (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial s} f' - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{1}{a^2} = 0 \tag{2.4}$$

Далее отметим, что $f(0) = 0$ и $f(x) \geqslant x / a_0 + \tau(\varepsilon^*)$, что следует из того, что в области, ограниченной прямыми $t = \tau(0)$ и $t = x / a_0 + \tau(\varepsilon^*)$ системы (1.1) и (1.2) совпадают. Предположим, что существует точка x_1, такая, что $f'(x_1) < 0$; тогда $f(x)$ в интервале (x, ∞) имеет минимум, скажем, в точке x_2, и существует интервал $[x_2 - \mu_1, x_2 + \mu_1]$, $\mu_1 > 0$, в котором



Фиг. 2

$$\frac{1}{a_0} > f' > -\frac{1}{a_0} \tag{2.5}$$

т. е. (2.1) не выполняется; как уже доказано, в этом интервале имеет место (2.4). Рассмотрим интервал $[x_2 - \mu_2, x_2 + \mu_2]$, $\mu_2 = 1 / 2\mu_1$. Положим

$$u_1(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{при } t \leqslant f(x) \\ \varepsilon(x) & \text{при } t > f(x) \end{cases}$$

Тогда для любого $x_3 \in [x_2 - \mu_2, x_2 + \mu_2]$ существует функция $t = y(x)$, определенная для всех $x \geqslant x_3$ и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{1}{a(u_1(x, y))} \tag{2.6}$$

причем $y(x_3) = f(x_3)$ (фиг. 2). На фиг. 2 изображена кривая $t = y(x)$, а также прямая $t = x / a_0 + \tau(\varepsilon^*)$, координаты точек $a_0, a_1, \ldots, a_5$ следующие

$$a_0 = \{x_1, f(x_1)\}, \quad a_1 = \{x_2 - \mu_1, f(x_2 - \mu_1)\},$$
$$a_2 = \{x_2 - \mu_2, f(x_2 - \mu_2)\}, \quad a_3 = \{x_2, f(x_2)\}, \qquad a_5 = \{x_2 + \mu_1, f(x_2 + \mu_3)\}$$

Докажем, что

$$y(x) < f(x) \quad \text{при } x > x_3$$

Действительно, если $x > x_3$ и $x \in [x_2 - \mu_1, x_2 + \mu_1]$, то

$$\frac{dy}{dx} \leqslant -\frac{1}{a_0} < \frac{df}{dx}, \qquad \text{или} \quad y(x) < f(x)$$

Далее, из (2.5) и (2.6) имеем

$$f(x_3)-f(x_2)\leqslant\frac{|x_3-x_2|}{a_0}\leqslant\frac{\mu_2}{a_0},\qquad y(x_3)-y(x_2+\mu_1)\geqslant\frac{x_2-x_3+\mu_1}{a_0}\geqslant\frac{\mu_2}{a_0}\tag{2.7}$$

Так как $f(x_3)=y(x_3)$, то $f(x_2)-y(x_2+\mu_1)>0$; при $x>x_2+\mu_1$ будем иметь $y(x)<y(x_2+\mu_1)$. Отсюда, так как $f(x)\geqslant f(x_2)$, получим, что $y(x)<f(x)$ для всех $x>x_3$.

Из того, что $y(x)<f(x)$ при $x>x_3$ следует, что $(x,\ y(x))\subset D_1$ и является характеристикой системы (1.1).

Так как $y'<0$, то кривая $t=y(x)$ пересекается с прямой $t=x/a_0+\tau(\varepsilon^*)$. Вдоль этой прямой $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$, а так как вдоль $t=y(x)$

$$v+\psi(u)=\mathrm{const}\ \left(\psi(u)=\int_0^u a(\xi)\,d\xi\right)\tag{2.8}$$

то

$$v(x,\ f(x))+\psi(\varepsilon(x))=\mathrm{const}\quad \text{при } x\in[x_2-\mu_2,\ x_2+\mu_2]\tag{2.9}$$

Отсюда при $x\in[x_2-\mu_2,\ x_2+\mu_2]$

$$\frac{\partial v}{\partial s}+a\frac{\partial u}{\partial s}=0\tag{2.10}$$

Это совместно с (2.4) дает $\partial u/\partial s=0$, $\partial v/\partial s=0$ или

$$\varepsilon(x)=\mathrm{const},\ v(x,\ f(x))=\mathrm{const}\qquad (x\in[x_2-\mu_2,\ x_2+\mu_2])$$

Отсюда вытекает, что в области, ограниченной $t=f(x)$ и характеристиками системы (2.2)

$$t+\frac{x}{a_0}-f(x_2-\mu_2)-\frac{x_2-\mu_2}{a_0}=0,\qquad t-\frac{x}{a_0}-f(x_2+\mu_2)+\frac{x_2+\mu_2}{a_0}=0$$

имеем $u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$, что противоречит тому, что эта область входит в D_2.

Таким образом, $f'(x)\geqslant 0$. Отсюда для любого x существует характеристика системы (1.1), проходящая через точку $(x,\ f(x))$ и пересекающаяся с $t=x/a_0+\tau(\varepsilon^*)$, т. е. во всей области D_1 имеют место (2.8) и (2.10). Тогда, если при некотором x не выполняется неравенство (2.1), то существует интервал, в котором одновременно выполняются (2.4) и (2.10), что, как уже доказано, невозможно. Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Как показал X. А. Рахматулин [1], из доказанной леммы следует, что задача определения $f(x)$ сводится к решению следующей системы функциональных уравнений

$$a_0f(x_1)+x_1=a_0t\tag{2.11}$$

$$a_0f(x_2)-x_2=a_0t\tag{2.12}$$

$$\frac{\sigma(\varepsilon(x_2))+\sigma(\varepsilon(x_1))}{2}+\rho a_0\frac{\psi(\varepsilon(x_2))-\psi(\varepsilon(x_1))}{2}=p(t)\tag{2.13}$$

$$f(x)-\frac{x}{a(\varepsilon(x))}=\tau(\varepsilon(x))\tag{2.14}$$

а задача определения $u(x,t)$ и $v(x,t)$ к обычной краевой задаче для систем (1.1) и (1.2).

3. Исследование основной системы уравнений. Установим несколько простых свойств системы (2.11) — (2.14), предполагая, что она имеет решение в классе непрерывных функций.

3.1. Докажем, что $f(x)\leqslant x/a_1$. Здесь и далее $a_1=a(\varepsilon(0))$, $x\geqslant 0$. Действительно, из уравнения (2.14) имеем $f(x)\leqslant x/a(\varepsilon(x))$; функция $\tau(\varepsilon)$ определена лишь при $\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon(0)$, поэтому $a(\varepsilon(x))\geqslant a_1$; отсюда вытекает требуемое неравенство.

3.2. Докажем, что $\varepsilon(x) > \varepsilon^*$. Напомним, что $a(\varepsilon) = a_0$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon^*$. Предположим, что существует x_1, такое, что $\varepsilon(x_1) \leqslant \varepsilon^*$, тогда уравнения (2.12) и (2.14) будут иметь вид

$$a_0 f(x_1) - x_1 = a_0 t, \qquad a_0 f(x_1) - x_1 = a_0 \tau(\varepsilon)$$

Так как $t \geqslant 0$, $\tau(\varepsilon) \leqslant \tau(\varepsilon^*) < 0$, то эта система решений не имеет, отсюда требуемое неравенство

3.3. Положим

$$\Phi(\xi) = \frac{\sigma(\xi)}{2} + \rho a_0 \frac{\psi(\xi)}{2}, \qquad \Psi(\xi) = -\frac{\sigma(\xi)}{2} + \rho a_0 \frac{\psi(\xi)}{2}$$

Тогда

$$2\Phi'(\xi) = \rho a(a_0 + a), \quad 2\Psi'(\xi) = \rho a(a_0 - a), \text{ или } \Phi' > 0, \ \Psi' > 0$$

Кроме того, существует такое δ, что

$$\Phi'(\xi_1) \geqslant A > B \geqslant \Psi'(\xi_2) \quad \text{при } \xi_1, \xi_2 \in [\varepsilon(0) - \delta, \varepsilon(0)] \tag{3.1}$$

Положим в системе (2.11) — (2.14)

$$p(t) = p_i(t), \qquad \tau(\varepsilon) = \tau_i(\varepsilon)$$

Решение такой системы будем в дальнейшем обозначать $f_i(x)$ и $\varepsilon_i(x)$.

Лемма 3.1. Пусть имеются две системы вида (2.11) — (2.14) такие, что

$$p_1(0) = p_2(0), \qquad p_1(t) \geqslant p_2(t), \qquad \tau_1 \ \varepsilon) \leqslant \tau_2(\varepsilon)$$

Тогда

$$\varepsilon_1(x_1) \geqslant \varepsilon_2(x_2) \quad \text{для } x_1 < x_2 \tag{3.2}$$

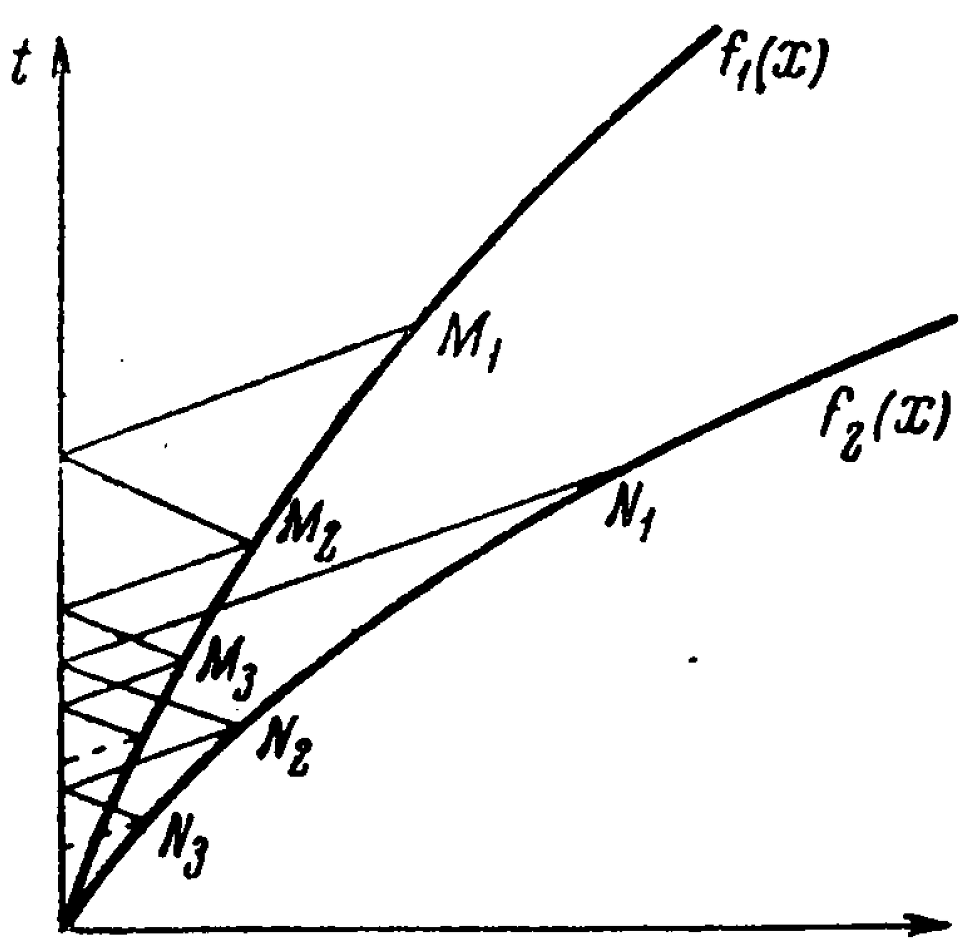
Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. существуют $x_1 < x_2$, такие, что $\varepsilon_1(x_1) < \varepsilon_2(x_2)$. Рассмотрим две последовательности

$$x_1 = x_1^1, \quad x_2^1, \quad x_3^1, \ldots, \quad x_2 = x_1^2, \quad x_2^2, \ x_3^2, \ldots$$

для которых выполняется соотношение:

$$t_i^j \equiv f_i^j - \frac{x_i^j}{a_0} = f_{i+1}^j + \frac{x_{i+1}^j}{a_0} \tag{3.3}$$

назовем их последовательностями вида I.



Фиг. 3

Эти последовательности приведены на фиг. 3, где

$$N_i = \{x_i^2, \ f_2(x_i^2)\}, \qquad N_i = \{x_i^1, \ f_1(x_i^1)\}$$

имеют абсциссами точки последовательностей вида I, начинающихся с x_2 и x_1, а x_i^j и x_{i+1}^j связаны соотношением (3.3).

Здесь вводятся следующие обозначения:

$$f_i^j = f_j(x_i^j), \qquad \varepsilon_i^j = \varepsilon_j(x_i^j), \qquad \Delta_i = \varepsilon_i^2 - \varepsilon_i^1, \qquad a_i^j = a(\varepsilon_i^j), \qquad \tau_i^j = \tau_j(\varepsilon_i^j)$$

Очевидно, что для любого x_i^j можно на основании (3.3) определить x_{i+1}^j, таким образом, для любых x_1 и x_2 существуют последовательности вида I, начинающиеся с x_1 и x_2. Далее

$$\frac{t_{i+1}^j}{t_i^j} = \frac{a_0 f_{i+1}^j - x_{i+1}^j}{a_0 f_{i+1}^j + x_{i+1}^j} = \frac{a_0\xi - 1}{a_0\xi + 1}, \qquad \xi = \frac{f_{i+1}^j}{x_{i+1}^j} \leqslant \frac{1}{a_1}$$

что следует из свойства 3.1; отсюда

$$\frac{t_{i+1}^j}{t_i^j} \leqslant \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} \tag{3.4}$$

Это влечет за собой $t_i^j \to 0$ при $i \to \infty$ или $x_i^j \to 0$ при $i \to \infty$, так как из уравнения (2.11) имеем $x_i^j \leqslant a_0 t_i^j$. Предположим, что

$$\varepsilon_i^2 > \varepsilon_i^1, \qquad t_i^2 \geqslant t_i^1$$

имеем

$$\Phi(\varepsilon_i^2) - \Psi(\varepsilon_{i+1}^2) = p_2(t_i^2) \qquad \Phi(\varepsilon_i^1) - \Psi(\varepsilon_{i+1}^1) = p_1(t_i^1) \qquad p_2(t_i^2) \leqslant p_1(t_i^1)$$

Отсюда

$$\Psi(\varepsilon_{i+1}^2) - \Psi(\varepsilon_{i+1}^1) \geqslant \Phi(\varepsilon_i^2) - \Phi(\varepsilon_i^1)$$

или

$$\Delta_{i+1} \geqslant K_i \Delta_i, \qquad K_i = \frac{a(\xi_1)[a_0 + a(\xi_1)]}{a(\xi_2)[a_0 - a(\xi_2)]} \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \in [\varepsilon_i^2, \varepsilon_i^1] \\ \xi_2 \in [\varepsilon_{i+1}^2, \varepsilon_{i+1}^1] \end{pmatrix}$$

Докажем, что из $\varepsilon_i^2 > \varepsilon_i^1$, $t_i^2 \geqslant t_i^1$ следует $t_{i+1}^2 \geqslant t_{i+1}^1$. Из уравнения (2.14) и соотношения (3.3) получим

$$t_{i+1}^j = \frac{(a_0 - a_{i+1}^j)\, t_i^j + 2a_{i+1}^j \tau_{i+1}^j}{a_0 + a_{i+1}^j}$$

$$t_{i+1}^2 - t_{i+1}^1 = \frac{(a_0 - a_{i+1}^2)(a_0 + a_{i+1}^1)\, t_i^2 + 2a_{i+1}^2 (a_0 + a_{i+1}^1)\, \tau_{i+1}^2}{(a_0 + a_{i+1}^1)(a_0 + a_{i+1}^2)} -$$

$$- \frac{(a_0 - a_{i+1}^1)(a_0 + a_{i+1}^2)\, t_i^1 + 2a_{i+1}^1 (a_0 + a_{i+1}^2)\, \tau_{i+1}^1}{(a_0 + a_{i+1}^1)(a_0 + a_{i+1}^2)} =$$

$$= \frac{a_0 (a_{i+1}^1 - a_{i+1}^2)(t_i^1 + t_i^2 - 2\tau_{i+1}^2) + (a_0^2 - a_{i+1}^1 a_{i+1}^2)(t_i^2 - t_i^1)}{(a_0 + a_{i+1}^1)(a_0 + a_{i+1}^2)} +$$

$$+ \frac{2a_{i+1}^2 (a_0 + a_{i+1}^1)(\tau_{i+1}^2 - \tau_{i+1}^1)}{(a_0 + a_{i+1}^1)(a_0 + a_{i+1}^2)} \geqslant 0$$

Так как уже показано, что $\Delta_{i+1} > 0$; отсюда

$$a_{i+1}^1 \geqslant a_{i+1}^2, \qquad \tau_{i+1}^2 \geqslant \tau_{i+1}^1, \qquad t_{i+1}^2 \geqslant t_{i+1}^1$$

Кроме того, имеем

$$t_1^2 - t_1^1 = \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0}\right) x_2 - \left(\frac{1}{a_1^1} - \frac{1}{a_0}\right) x_1 - (\tau_1^2 - \tau_1^1) \geqslant 0$$

Так как $\Delta_1 > 0$, $t_1^2 \geqslant t_1^1$, то для всех i имеем $t_i^2 \geqslant t_i^1$, $\Delta_{i+1} \geqslant K_i \Delta_i$, откуда

$$\Delta_{i+1} \geqslant \left(\prod_{n=1}^{i} K_n\right) [\varepsilon_2(x_2) - \varepsilon_1(x_1)] \tag{3.5}$$

Используя $x_i^j \to 0$ при $i \to \infty$ и непрерывность $\varepsilon_j(x)$, получим, что все x_i^j, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в окрестности $[0, \delta_1]$, в которой

$$\varepsilon_1(x) \in [\varepsilon(0) - \delta, \varepsilon(0)], \qquad \varepsilon_2(x) \in [\varepsilon(0) - \delta, \varepsilon(0)]$$

при $x \in [0, \delta_1]$, где δ то же самое, что и в свойстве 3.3. Тогда лишь конечное число K_n меньше A/B, где A и B — те же, что и в свойстве 3.3, т. е. из (3.5) получим, что $\Delta_i \to \infty$ при $i \to \infty$, что противоречит непрерывности $\varepsilon_j(x)$ в точке $x = 0$.

Теорема 3.1. **Решение системы (2.11) — (2.14), если оно существует, единственно в классе непрерывных функций.**

Действительно, предположим, что система (2.11) — (2.14) имеет два решения $\varepsilon_1(x)$, $f_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$, $f_2(x)$. Очевидно, что $\varepsilon_1(x)$ и $f_1(x)$ удовлетворяют системе (2.11) — (2.14) с $p_1(t) = p(t)$, $\tau_1(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$, а функции $\varepsilon_2(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют той же системе с $p_2(t) = p(t)$, $\tau_2(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$. На основании леммы 3.1 имеем $\varepsilon_1(x) \geqslant \varepsilon_2(x)$ и $\varepsilon_2(x) \geqslant \varepsilon_1(x)$; отсюда $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ и из (2.14) получим $f_1(x) = f_2(x)$. Что и требовалось доказать.

Лемма 3.2. Если система (2.11) — (2.14) имеет решение $\varepsilon(x)$, $f(x)$, то $\varepsilon(x)$ есть монотонно убывающая функция.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3.1 и теоремы 3.1.

Лемма 3.3. Если система (2.11) — (2.14) имеет решение в классе непрерывно дифференцируемых функций, то $f'(x)$ удовлетворяет неравенству (2.1).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2.14), получим

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{a(\varepsilon(x))}+\left[x\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{a(\varepsilon)}+\frac{d\tau}{d\varepsilon}\right]\frac{d\varepsilon}{dx}$$

так как $\varepsilon'(x)\leqslant 0$, $a'(\varepsilon)\leqslant 0$, $\tau'(\varepsilon)\geqslant 0$, имеем $f'(x)\leqslant a^{-1}(\varepsilon(x))$. Далее, очевидно, что неравенство $f'\geqslant a_0^{-1}$ эквивалентно тому, что уравнение (2.12) при всех $t>0$ имеет не более одного решения.

Предположим, что при некотором t_0 уравнение (2.12) имеет два решении x_2^1 и x_2^2, причем $x_2^1\neq x_2^2$; возьмем какое-нибудь решение уравнения (2.11), скажем x_1. Тогда из уравнения (2.13) имеем $\varepsilon(x_2^1)=\varepsilon(x_2^2)>\varepsilon^*$, а из уравнений (2.12) и (2.14) получим $x_2^1=x_2^2$, что противоречит условию $x_2^1\neq x_2^2$; таким образом, $f'(x)>a_0^{-1}$ и лемма доказана.

Отметим, что из леммы 3.3. следует, что если система (2.11) — (2.14) имеет решение, то и исходная задача также имеет решение.

Лемма 3.4. Пусть имеются две системы вида (2.11) — (2.14) с решениями $\varepsilon_1(x)$, $f_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$, $f_2(x)$. Тогда

$$|\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)|\leqslant(\rho a_1^2)^{-1}\mu$$

$$a=\{\min a(\varepsilon_j(0))\}\quad (j=1,2),\qquad \lambda=\max|\tau_1(\varepsilon)-\tau_2(\varepsilon)|$$

$$\mu=\max|p_1(t)-p_2(t)|+\max|p_1(t+2\lambda)-p_1(t)|$$

Доказательство. Расссмотрим разность $\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)$ в некоторой точке x и предположим, что $\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)<0$; противный случай сводится к этому заменой индексов. Тогда

$$t_1-t_2=x\left[\frac{1}{a(\varepsilon_1(x))}-\frac{1}{a(\varepsilon_2(x))}\right]+\tau_1(\varepsilon_1(x))-\tau_2(\varepsilon_2(x))=$$
$$=x\frac{a(\varepsilon_2(x))-a(\varepsilon_1(x))}{a(\varepsilon_2(x))\,a(\varepsilon_1(x))}+\tau_1(\varepsilon_1(x))-\tau_1(\varepsilon_2(x))+$$
$$+\tau_1(\varepsilon_2(x))-\tau_2(\varepsilon_2(x))\geqslant-|\tau_1(\varepsilon_2(x))-\tau_2(\varepsilon_2(x))|\geqslant-\lambda$$

Отсюда $t_2-t_1\leqslant 2\lambda$. Рассмотрим две последовательности вида I

$$x=x_1^1,\quad x_2^1,\quad x_3^1,\ldots,\quad x=x_1^2,\quad x_2^2,\quad x_3^2,\ldots$$

из неравенства (2.1) следует

$$x_i^j>x_{i+1}^j,\qquad \varepsilon_{i+1}^j\geqslant\varepsilon_i^j\qquad (j=1,2)$$

Здесь и далее будем пользоваться обозначениями леммы 3.1. Пусть

$$\varepsilon_i^1\geqslant\varepsilon_i^2\quad\text{при } i\leqslant n,\qquad t_i^2-t_i^1\leqslant 2\lambda\quad\text{при } i\leqslant n-1$$

Тогда

$$t_n^2-t_n^1=\frac{(a_0-a_n^2)\,t_{n-1}^2+2a_n^2\tau_n^2}{a_0+a_n^2}-\frac{(a_0-a_n^1)\,t_{n-1}^1+2a_n^1\tau_n^1}{a_0+a_n^1}=$$
$$=\frac{a_0(a_n^1-a_n^2)(t_{n-1}^1+t_{n-1}^2-2\tau_n^1)+(a_0^2-a_n^1a_n^2)(t_{n-1}^1-t_{n-1}^2)}{(a_0+a_n^1)(a_0+a_n^2)}+$$
$$+\frac{2a_n^1(a_0+a_n^2)(\tau_n^1-\tau_n^2)}{(a_0+a_n^1)(a_0+a_n^2)}\leqslant\frac{2(a_0^2-a_n^1a_n^2)+2a_n^1(a_0+a_n^2)}{(a_0+a_n^1)(a_0+a_n^2)}\lambda=$$
$$=\frac{2a_0}{a_0+a_n^2}\lambda\leqslant 2\lambda\quad\text{или}\quad t_n^2-t_n^1\leqslant 2\lambda$$

Далее

$$p_2(t_i^2)-p_1(t_i^1)=p_2(t_i^2)-p_2(t_i^1+2\lambda)+p_2(t_i^1+2\lambda)-$$
$$-p_1(t_i^1+2\lambda)+p_1(t_i^1+2\lambda)-p_1(t_i^1)\geqslant-\mu$$

При $i \leqslant n$ имеем (3.6)

$$\Psi(\varepsilon_i^1) - \Psi(\varepsilon_i^2) \geqslant \Phi(\varepsilon_{i-1}^1) - \Phi(\varepsilon_{i-1}^2) - \mu \quad (\varepsilon_i^1 \geqslant \varepsilon_i^2,\ \varepsilon_i^2 \geqslant \varepsilon_{i-1}^2,\ \varepsilon_i^1 \geqslant \varepsilon_{i-1}^1)$$

Тогда, обозначив $\Psi'(\xi) = g(\xi)$, $\Phi'(\xi) = q(\xi)$, имеем

$$\int_{\varepsilon_i^2}^{\varepsilon_i^1} g(x)\,dx - \int_{\varepsilon_{i-1}^2}^{\varepsilon_{i-1}^1} q(x)\,dx + \mu \geqslant 0 \tag{3.7}$$

т. е. положив

$$x(t) = \frac{\varepsilon_{i-1}^1 - \varepsilon_{i-1}^2}{\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2}\, t + \frac{\varepsilon_{i-1}^1 \varepsilon_i^2 - \varepsilon_{i-1}^2 \varepsilon_i^1}{\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2}$$

получим из (3.7), используя теорему о среднем, что

$$-\Delta_i - \frac{q(x(\xi))}{g(\xi)}\left[-\Delta_{i-1} - \frac{\mu}{q(x(\xi))}\right] \geqslant 0$$

Далее $x(\xi) \leqslant \xi$, так как $x(\xi)$ линейна

$$x(\varepsilon_i^2) = \varepsilon_{i-1}^2 \leqslant \varepsilon_i^2, \qquad x(\varepsilon_i^1) = \varepsilon_{i-1}^1 \leqslant \varepsilon_i^1, \qquad \xi \in [\varepsilon_i^2, \varepsilon_i^1]$$

Отсюда

$$\frac{q(x(\xi))}{g(x)} \geqslant \frac{q(\xi)}{g(\xi)} = \frac{a_0 + a(\xi)}{a_0 - a(\xi)} \geqslant \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} = \alpha$$

так как $-\Delta_i \geqslant 0$, то

$$-\Delta_i \geqslant \alpha\left[-\Delta_{i-1} - \frac{2\mu}{\rho a_1 (a_0 + a_1)}\right] \tag{3.8}$$

т. е.

$$-\Delta_i \geqslant \alpha^{i-1}\left[(\varepsilon_1^1 - \varepsilon_1^2) - \sum_{k=0}^{i-2} \frac{1}{\alpha^k} \frac{2\mu}{\rho a_1 (a_0 + a_1)}\right] \tag{3.9}$$

Возможны два случая: 1) все $-\Delta_n > 0$ и (2) существует n_1, такое, что $-\Delta_{n_1} > 0$ $-\Delta_{n_1+1} \leqslant 0$. В первом случае, так как Δ_n величина ограниченная, из (3.9) имеем

$$\varepsilon_1^1 - \varepsilon_1^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} \frac{2\mu}{\rho a_1 (a_0 + a_1)} \tag{3.10}$$

во втором случае, на основании (3.8)

$$\varepsilon_{n_1}^1 - \varepsilon_{n_1}^2 \leqslant \frac{2\mu}{\rho a_1 (a_0 + a_1)}, \qquad \text{или} \qquad \varepsilon_1^1 - \varepsilon_1^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} \frac{2\mu}{\rho a_1 (a_0 + \alpha_1)}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 3.5. Предположим, что при $x \in [0, m]$ существуют непрерывно дифференцируемые функции $f_0(x)$ и $\varepsilon_0(x)$, удовлетворяющие системе (2.11) — (2.14). Тогда существуют непрерывно дифференцируемые функции $\varepsilon(x)$ и $f(x)$ для $x \geqslant 0$, удовлетворяющие системе (2.11) — (2.14) и

$$f(x) = f_0(x), \qquad \varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) \quad \text{при } x \in [0, m]$$

Доказательство. Определим функцию $h(x)$ из уравнения

$$\Phi(h(x)) = \Psi(\varepsilon_0(x)) + p(f_0(x) + a_0^{-1}x)$$

Предположим, что $h(m) > \varepsilon^*$. Введем функцию $x_1(x)$, определяемую из уравнения

$$x = a(h(x_1)) \frac{a_0 f(x_1) + x_1 - a_0 \tau(\varepsilon(x_1))}{a_0 - a(h x_1)} \qquad \text{для } x_1 \leqslant m \tag{3.11}$$

из $h(m) > \varepsilon^*$ и монотонности входящих в (3.11) функций видно, что это уравнение имеет единственное решение; положив $f_1(x) = a^{-1}(\varepsilon_1(x))\,x + \tau(\varepsilon_1(x))$, $\varepsilon_1(x) = h(x_1(x))$, удовлетворим системе (2.11) — (2.14) на интервале $[0, m_1]$, $m = x_1(m_1)$, что непосредственно проверяется; непрерывная дифференцируемость решения непосредственно следует из непрерывности $\varepsilon_0'(x)$ и $f_0'(x)$. Построим аналогично интервалы $[0, m_2]$, $[0, m_3], \ldots$ и т. д. и предположим, что этот процесс можно продолжать бесконечно. Тогда имеем из (2.11) и (2.12)

$$t_m \geqslant \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1}\, t_{m-1} \qquad \left(t_n = f_n(m_n) - \frac{m_n}{a_0}\right)$$

Таким образом,

$$t_m \to \infty, \qquad p(t_m) \to 0, \qquad \varepsilon(t_m) \to \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon^*$$

Однако уравнение (2.13) дает $\varepsilon_0 = 0$, отсюда существует такое n, что $h(m_n) > \varepsilon^*$, $h(m_{n+1}) \leqslant \varepsilon^*$. Тогда существует такое x^*, что $h(x^*) = \varepsilon^*$.

Из уравнения (3.11) следует, что $x \to \infty$ при $x_1(x) \to x^* - 0$; таким образом, функции $f_{n+1}(x)$ и $\varepsilon_{n+1}(x)$ определены для всех $x \geqslant 0$ и являются решением системы (2.11)— (2.14); по теореме 3.1 при $x \in [0, m]$ должно быть $\varepsilon_{n+1}(x) = \varepsilon_0(x)$, $f_{n+1}(x) = f_0(x)$ и лемма доказана.

Замечание. Имеем

$$f(x) - \frac{x}{a_0} = f(x_1(x)) + \frac{x_1(x)}{a_0}$$

т. е. при $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{x}{a_0} + \left[f(x^*) + \frac{x^*}{a_0}\right] + o(1)$$

что и означает существование асимптоты у $f(x)$. Отметим, что наличие у $f(x)$ асимптоты допускает следующую физическую интерпретацию. Скорость распространения волны разгрузки при $x \to \infty$ стремится к скорости распространения упругих колебаний a_0.

Теорема 3.2. Если $p(t)$, $\tau(\varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ есть непрерывно дифференцируемые функции, и $\tau'(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon \in [\varepsilon^*, \varepsilon(0)]$, то решение системы (2.11)—(2.14) существует в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Доказательство. Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций $p_i(t)$, равномерно сходящихся вместе со своими первыми производными к $p(t)$, причем $p_i(t) = p(0)$ при $t \leqslant \mu_i$ $(\mu_i > 0)$. Тогда любая система вида (2.11) — (2.14) с $p(t) = p_i(t)$, $\tau(\varepsilon) = \tau_i(\varepsilon)$ имеет, по лемме 3.5, решение в классе непрерывно дифференцируемых функций, ибо в некоторой окрестности нуля можно положить

$$\sigma(\varepsilon_i(x)) = p(0), \qquad f_i(x) = a_1^{-1}x$$

На основании леммы 3.4

$$|\varepsilon_j(x) - \varepsilon_i(x)| \leqslant (\rho a_1^2)^{-1} \max |p_j(t) - p_i(t)|$$

Отсюда $\varepsilon_i(x)$ сходятся к некоторой непрерывной функции $\varepsilon(x)$, которая вместе с функцией

$$f(x) = \frac{x}{a(\varepsilon(x))} + \tau(\varepsilon(x))$$

является решением системы (2.11) — (2.14).

Для доказательства непрерывной дифференцируемости решения продифференцируем уравнение (2.13) и, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались для доказательства леммы 3.4, получим оценку типа (3.10), после чего доказательство не представляет затруднений.

В заключение приношу благодарность Н. В. Зволинскому за его советы.

Поступила 9 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. IX, вып. I.