

## О ДВИЖЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ЖЕСТКОЙ МАССИВНОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. М. Флитман

(Москва)

Рассматривается жесткая массивная полоса конечной ширины и бесконечной длины, лежащая на упругом полупространстве; трение между полосой и полупространством отсутствует.

Движение полосы вызывается плоской волной (продольной или поперечной), падающей из глубины полупространства под произвольным углом, но таким образом, что нормаль к фронту перпендикулярна к краю полосы. Рассматриваемая задача будет плоской. В работе определяются параметры малого движения полосы: вертикальное смещение ее середины и угол поворота.

Для получения выражения равнодействующей и момента напряжений, возникающих под полосой, решается смешанная краевая задача для упругой полуплоскости. При этом используются результаты работы [1].

Близкая задача для акустического случая рассматривалась в работах [2,3].

Для времени меньшего  $2l/a$  ( $a$  — скорость продольных волн в среде,  $2l$  — ширина полосы) результаты получаются простыми.

1. Пусть упругое тело занимает полуплоскость  $y \geq 0$ . Движение его описывается динамическими уравнениями Лямэ

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Лямэ,  $\rho$  — плотность,  $u$  — вектор смещения,  $u$  и  $v$  — его проекции на оси  $x$  и  $y$ .

Начальные условия — нулевые. На границе  $y = 0$  задаем условия:

$$\tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (x < 0), \quad v = f(x, t) \quad (x > 0) \quad (1.1)$$

Здесь  $f(x, t)$  — заданная функция. Это краевое условие задачи о полубесконечном штампе [1].

Результат применения преобразования Лапласа к  $\sigma_{yy}$  по  $x$  и  $t$  при  $y=0$  связан результатом такого же преобразования для  $v$  при  $y=0$  и  $x > 0$  следующим соотношением [1]:

$$\sigma(q, p) = -2(1 - \gamma^2) \rho b p K(-s) L(q, p) \quad \left( b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \gamma = \frac{b}{a} \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $q$  и  $p$  — параметры преобразования Лапласа по  $x$  и  $t$

$$K(s) = \frac{\vartheta - s}{\sqrt{\gamma - s}} e^{-g(s)}, \quad g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^1 \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - s} \quad \left( s = \frac{bq}{p} \right) \quad (1.3)$$

$$\varphi(\xi) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{4\xi^2 \sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - \gamma^2)}}{(2\xi^2 - 1)^2} \right\}$$

где  $\vartheta$  — корень уравнения Рэлея

$$G(s) \equiv (2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{(1 - s^2)(\gamma^2 - s^2)} = 0 \quad (1.4)$$

Так что функция  $K(s)$  регулярна при  $\operatorname{Re} s < \gamma$

$$L(q, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_l K(s_1) V(\zeta, p) \frac{d\zeta}{\zeta - q} \quad \left(s_1 = \frac{b\zeta}{p}\right) \quad (1.5)$$

где  $l$  — прямая в комплексной плоскости  $q$ , параллельная мнимой оси и расположенная между ней и точкой  $q = p/a$

$$\sigma(q, p) = \iint_0^\infty \sigma_{vv}(x, t) e^{-qx-pt} dx dt, \quad V(q, p) = \iint_0^\infty v(x, t) e^{-qx-pt} dx dt \quad (1.6)$$

Таким образом, при помощи формул (1.2) — (1.6) можно получить выражение  $\sigma(q, p)$ , соответствующее краевой задаче (1.1).

Рассмотрим три частных случая этой задачи

$$v = f(t), \quad v = \alpha x(t), \quad v = f(t - \theta x) \quad (1.7)$$

Первый случай соответствует поступательному вдавлению штампа, второй — повороту относительно края на малый угол  $\alpha$ , а третий, как выяснится ниже, — отражению плоской волны от границы со смешанными краевыми условиями.

Изучим первый случай. Согласно (1.6), получим

$$V(q, p) = \frac{F(p)}{q} \quad \left(F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\right)$$

Пользуясь тем, что  $K(s_1)$  регулярна при  $\operatorname{Re} \zeta < a^{-1} \operatorname{Re} p$  по теореме о вычетах из (1.5), имеем

$$L(q, p) = k_0 \frac{F(p)}{q} \quad \left(k_0 = K(0) = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(1-\gamma^2)}}\right)$$

Теперь из (1.2) можно получить

$$\sigma(q, p) = -\frac{ap}{k_0} pF(p) \frac{K(-s)}{q}$$

Применим к  $\sigma(q, p)$  формулу обращения для преобразования Лапласа. Тогда

$$\sigma_{vv}^\circ(x, p) = -\frac{ap}{k_0} pF(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} K(-s) e^{qx} \frac{dq}{q}$$

Контур  $l_0$  параллелен мнимой оси комплексной плоскости  $q$  и лежит в правой полуплоскости. Полученное выражение при помощи теоремы о вычетах можно привести к виду

$$\sigma_{vv}^\circ(x, p) = -ap pF(p) - \frac{ap}{k_0} pF(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} K(-s) e^{qx} \frac{dq}{q} \quad (1.8)$$

Если «положить» контур  $l_1$  на разрез [1], проведенный в плоскости  $s$  для выделения однозначной ветви  $K(-s)$ , то получим

$$\sigma_{vv}^\circ(x, p) = -ap pF(p) + \frac{ap}{k_0} pF(p) \int_1^\infty N(s) \exp\left\{-\frac{spx}{b}\right\} ds \quad (1.9)$$

Здесь

$$N(s) = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta - s}{\sqrt{s - \gamma}} e^{-g(s)} \cos \varphi(s) \quad (\gamma \leq s \leq 1),$$

$$N(s) = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta - s}{\sqrt{\gamma - s}} e^{-g(s)} \quad (s \geq 1) \quad (1.10)$$

Функции  $g(s)$  и  $\varphi(s)$  даются формулами (1.3), а интеграл, определяющий  $g(s)$  для  $\gamma \leq s \leq 1$ , понимается в смысле главного значения.

Выполняя обращение по  $p$ , получим окончательно

$$\sigma_{yy}(x, t) = -apf'(t) \quad (at < x) \quad (1.11)$$

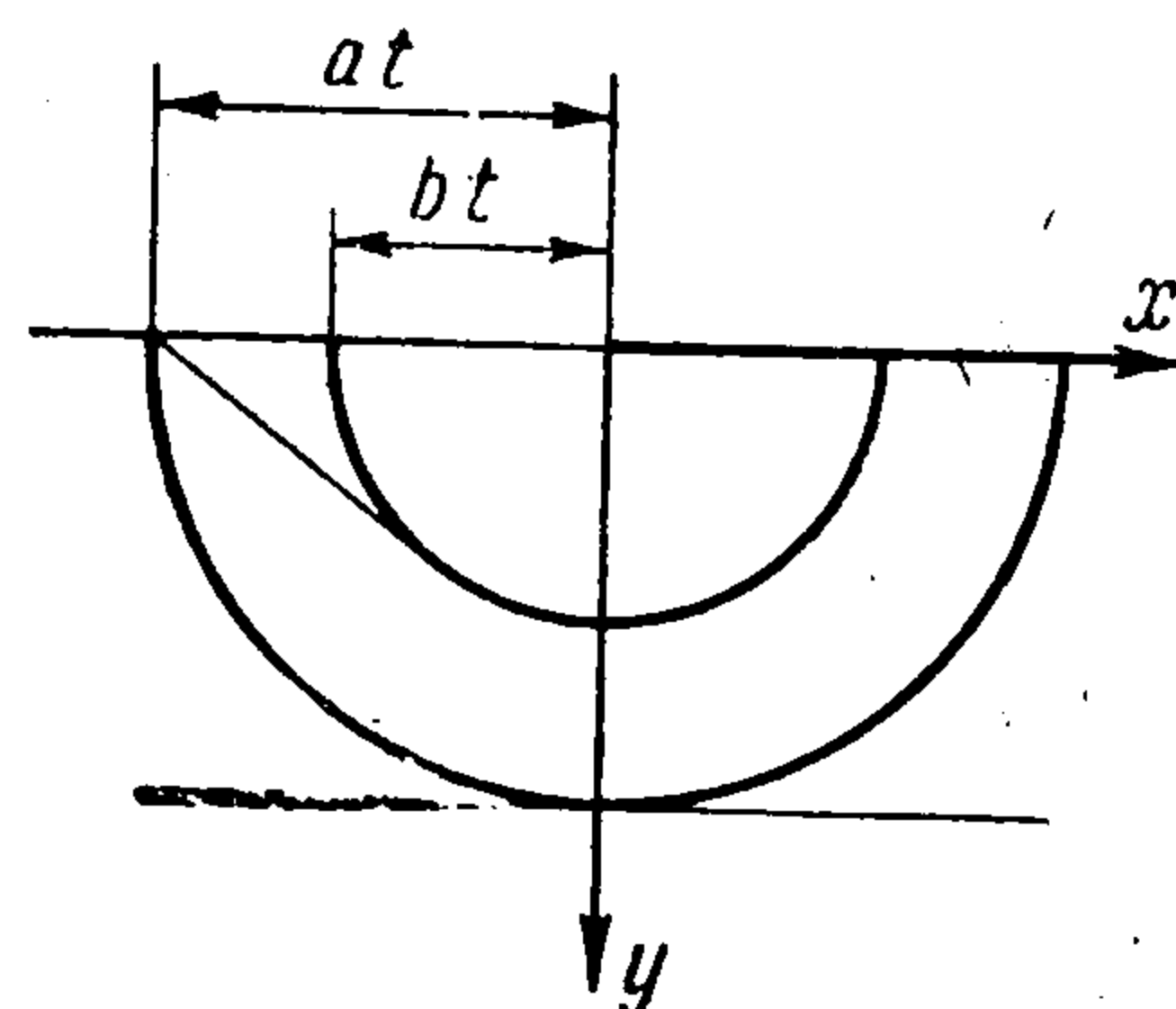
$$\sigma_{yy}(x, t) = -apf'(t) + \frac{ap}{k_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma}^{bt/x} N(s) f\left(t - \frac{sx}{b}\right) ds \quad (at > x)$$

Первое слагаемое в этом выражении дает напряжение в плоской волне, которая образовалась бы под штампом, если бы он занимал всю границу, а второе дает напряжение в волнах, которые распространяются от края штампа. Фронты этих волн изображены на фиг. 1. Подсчитаем величину равнодействующей и момента этих напряжений.

Можно показать, что равнодействующая пропорциональна смещению штампа  $f(t)$ , так как при  $f(t) = t$  второе слагаемое в (1.11) зависит только от  $bt/x$ . Это любезно сообщил автору В. П. Крысин.

Обозначим равнодействующую этих напряжений  $R_1(t)$ , а ее образ через  $R_1^\circ(p)$ . Тогда из (1.8) получим

$$R_1^\circ(p) = -\frac{ap}{k_0} pF(p) \int_0^\infty dx \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} K(-s) e^{qx} \frac{dq}{q}$$



Фиг. 1

Интегрируя по  $x$  под знаком интеграла, замечаем, что проведение оставшегося интегрирования сводится к вычислению вычета в нуле. В результате получим

$$R_1^\circ(p) = -\frac{1}{2} C_1(\gamma) (\lambda + 2\mu) F(p) \quad \left(C_1(\gamma) = 2\gamma \frac{k_1}{k_0}\right) \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем  $k_0, k_1, k_2, \dots$  будем обозначать коэффициенты разложения  $K(s)$  в окрестности нуля

$$K(s) = k_0 + k_1s + k_2s^2 + k_3s^3 + \dots \quad (1.13)$$

Из (1.12) следует

$$R_1(t) = -\frac{1}{2} C_1(\gamma) (\lambda + 2\mu) f(t) \quad (1.14)$$

Аналогично вычисляем момент  $M_1(t)$  этих напряжений относительно края штампа

$$M_1(t) = \frac{1}{2} D_1(\gamma) (\lambda + 2\mu) a \int_0^\infty f(\tau) d\tau \quad \left(D_1(\gamma) = 2\gamma^2 \frac{k_2}{k_0}\right) \quad (1.15)$$

Рассмотрим второй случай (1.7). Согласно (1.5) и (1.6) имеем

$$L(q, p) = A(p) \left(\frac{k_0}{q^2} + \frac{bk_1}{pq}\right) \quad \left(A(p) = \int_0^\infty \alpha(t) e^{-pt} dt\right)$$

Поступая так же, как и ранее, получим аналогично (1.8)

$$\sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = -arpA(p)x - \frac{ap}{k_0^2} pA(p) \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \left( \frac{k_0}{q^2} + \frac{bk_1}{pq} \right) K(-s) e^{qx} dx \quad (1.16)$$

или, преобразуя контур  $l_1$ , получим

$$\sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = -arpA(p)x + \frac{\lambda + 2\mu}{k_0^2} A(p) \int_{\gamma}^{\infty} \left( k_1 - \frac{k_0}{s} \right) N(s) \exp \left\{ -\frac{spx}{b} \right\} ds \quad (1.17)$$

Выполняя обращение по  $p$ , найдем распределение  $\sigma_{yy}$  под подошвой штампа

$$\sigma_{yy}(x, t) = -ar\alpha\alpha'(t) \quad (at < x) \quad (1.18)$$

$$\sigma_{yy}(x, t) = -ar\alpha\alpha'(t) + \frac{\lambda + 2\mu}{k_0^2} \int_{\gamma}^{bt/x} \left( k_1 - \frac{k_0}{t} \right) N(s) \alpha \left( t - \frac{sx}{b} \right) ds \quad (at > x)$$

Здесь так же, как и в формуле (1.11), первое слагаемое описывает напряжение, которое образовалось под штампом, если бы он занимал всю границу, а второе дает напряжение в волнах, распространяющихся от края штампа. В этом случае также можно вычислить равнодействующую и момент относительно  $x = 0$  этих напряжений. При этом удобно пользоваться формулой (1.16)

$$R_2(t) = \frac{1}{2} C_2(\gamma) (\lambda + 2\mu) a \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \quad \left( C_2 = 2\gamma^2 \left[ \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^2 - \frac{k_2}{k_0} \right] \right) \quad (1.19)$$

$$M_2(t) = -\frac{1}{2} D_2(\gamma) (\lambda + 2\mu) a^2 \int_0^t (t - \tau) \alpha(\tau) d\tau \quad \left( D_2 = 2\gamma^3 \left( \frac{k_3}{k_0} - \frac{k_1 k_2}{k_0^2} \right) \right)$$

Для третьего случая (1.7) будем предполагать

$$f(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi > 0, \quad \theta^{-1} > a$$

Тогда вычисления дают

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = & -\frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} arpF(p) e^{-p\theta x} + \\ & + \frac{K(-b\theta)}{k_0^2} arpF(p) \int_{\gamma}^{\infty} N(s) \exp \left\{ -\frac{spx}{b} \right\} \frac{s ds}{s-b\theta} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Распределение напряжений получится после применения к этой формуле обращения по  $p$

$$\sigma_{yy}(x, t) = 0 \quad (t < \theta x) \quad (1.21)$$

$$\sigma_{yy}(x, t) = -\frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} arf'(t - \theta x) \quad (at < x < t/\theta)$$

$$\sigma_{yy}(x, t) = -\frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} arf'(t - \theta x) + \frac{K(-b\theta)}{k_0^2} ar \frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma}^{bt/x} N(s) f \left( t - \frac{sx}{b} \right) \frac{s ds}{s-b\theta} \quad (at > x)$$

Поступая, как и выше, можно подсчитать равнодействующую  $R_3(a\theta, t)$  и момент  $M_3(a\theta, t)$  (относительно  $x = 0$ ) напряжений (1.21)

$$R_3(a\theta, t) = -C_3(a\theta, \gamma) (\lambda + 2\mu) f(t) \quad \left( C_3(a\theta, \gamma) = \frac{\gamma^2 G(b\theta)}{b\theta \sqrt{\gamma^2 - b^2\theta^2}} \frac{k_0}{K(b\theta)} \right) \quad (1.22)$$

$$M_3(a\theta, t) = D_3(a\theta, \gamma) (\lambda + 2\mu) a \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \left( D_3(a\theta, \gamma) = \frac{\gamma}{b\theta} C_3(a\theta, \gamma) \left( 1 + \frac{k_1}{k_0} b\theta \right) \right)$$

Сформулируем задачу, краевые условия которой имеют вид как в третьем случае (1.7).

Пусть на упругой полуплоскости при  $x \geq 0$  лежит жесткая полоса, не позволяющая точкам среды двигаться по вертикали и, кроме того, трение между ней и упругой средой отсутствует. Поэтому условия для точек  $y = 0$  и  $x \geq 0$  границы, соприкасающихся с полосой, можно сформулировать так:

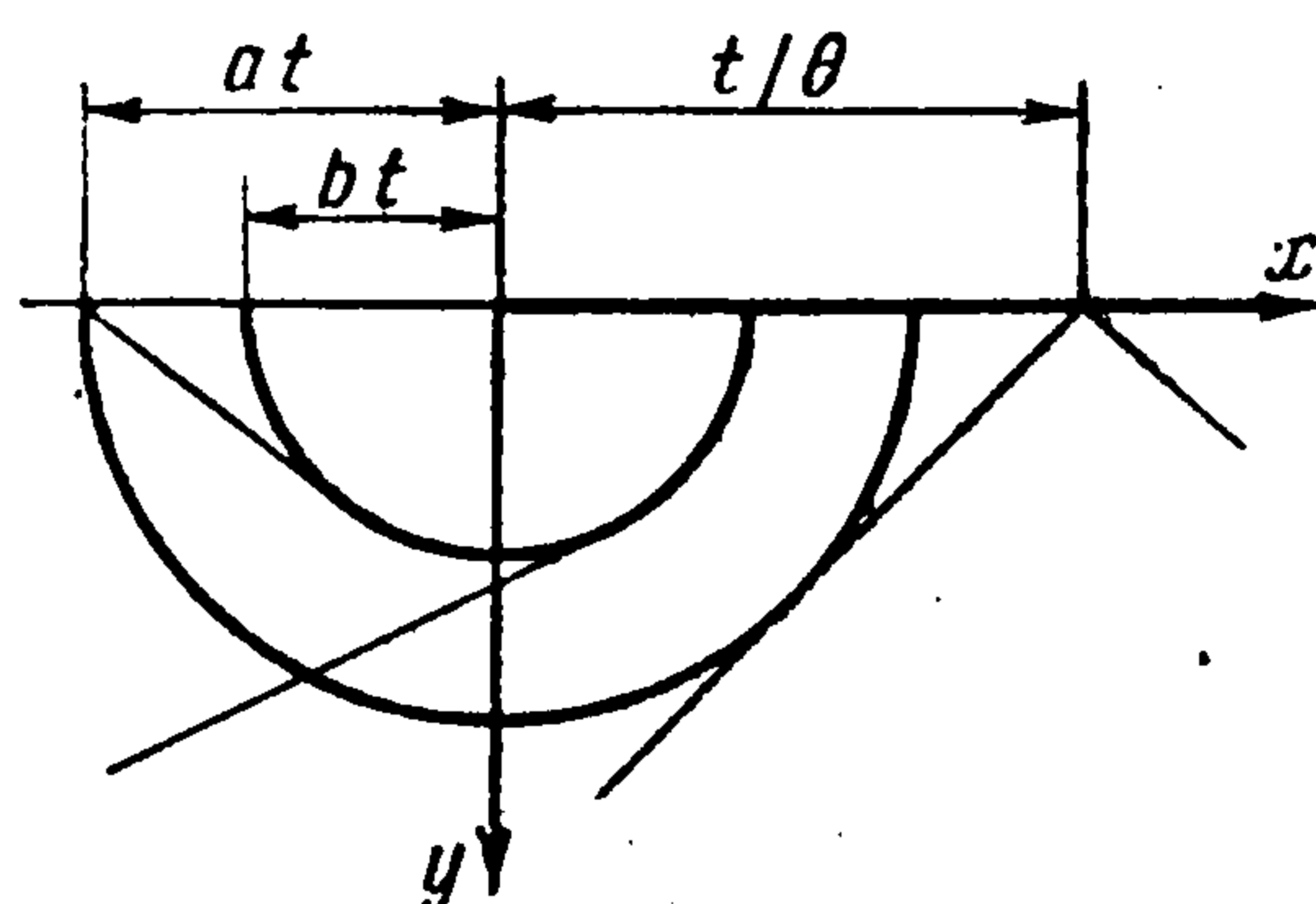
$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0$$

Остальная часть границы  $y = 0, x < 0$  свободна от напряжений.

Пусть на границу падает плоская волна, надвигающаяся на пластину со стороны свободной части границы и попадающая на ребро при  $t = 0$ . Для  $t < 0$  движение в среде можно определить по известным законам отражения плоских волн.

При  $t > 0$  совокупность падающей и отраженных от свободной границы плоских волн удовлетворяет граничным условиям для  $x < 0$ , а также условию  $\tau_{xy} = 0$  для  $x > 0$ . Условие обращения в нуль вертикального смещения для  $x > 0$  не выполняется, и смещение в этой совокупности волн можно выразить в виде  $v = f(t - \theta x)$ , где  $\theta^{-1}$  — скорость движения следа фронтов вдоль границы. Поэтому для  $t > 0$  к имеющемуся решению нужно прибавить решение смешанной краевой задачи для упругой полуплоскости, удовлетворяющее при  $y = 0$  условиям

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (x < 0) \\ v = -f(t - \theta x) \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (1.23)$$



Фиг. 2

А это как раз те условия, для которых были вычислены напряжения (1.21). В таком случае первое слагаемое этой формулы, взятое с обратным знаком, можно интерпретировать как напряжение, возникающее на границе при падении плоской волны любого типа, если на границе имеют место условия  $\tau_{xy} = 0$  и  $v = 0$ . При этом нельзя упускать из виду, что  $f(t - \theta x)$  — суммарное вертикальное смещение на свободной границе, если на нее падает та же самая плоская волна.

Пользуясь теорией отражения плоских волн, можно независимо от приведенного выше рассуждения, проверить, что суммарное вертикальное смещение на свободной границе и нормальное напряжение на «полужесткой» границе, образующиеся при падении одной и той же плоской волны произвольного типа, связаны именно так.

Второе слагаемое так же, как и в формулах (1.11) и (1.16), дает напряжение в волнах, распространяющихся от края пластины, описывая явление, близкое к явлению дифракции. Фронты всех образовавшихся волн нанесены на фиг. 2.

Можно указать другую модификацию той же задачи, имеющую своим решением (1.21). Пусть по границе упругой полуплоскости в положительном направлении оси  $x$  движется нагрузка

$$\sigma_{yy} = -p(t - \theta x) \quad (\theta^{-1} > a), \quad \tau_{xy} = 0, \quad p(\xi) = 0 \quad \text{при } (\xi < 0) \quad (1.24)$$

При  $t = 0$  нагрузка достигает края жесткой полосы и продолжает двигаться дальше по полосе. Задача заключается в определении движения среды и, главным образом, напряжений, возникающих под полосой. Решение, как и в первой модификации задачи, будем искать в виде суммы двух решений.

Первое представляется в виде двух плоских волн — продольной и поперечной, идущих от границы в глубь среды; причем вертикальное смещение на границе дается формулой

$$v(\xi) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - b^2\theta^2}}{b\theta G(b\theta)} \int_0^\xi p(\tau) d\tau \quad (\xi = t - \theta x) \quad (1.25)$$

Для второго решения имеют место условия (1.23), где  $v$  дается (1.25). Теперь уже ясно, что формулы (1.21) дают выражение напряжений на границе для второго решения. Фактическое напряжение под пластиной дается суммой напряжений двух решений, т. е. формулой (1.21), где выброшено первое слагаемое, а  $f(\xi)$  берется из (1.25) с обратным знаком.

Приведем значения коэффициентов  $C_1, C_2, D_2$  из (1.12) и (1.19) в зависимости от  $\gamma$

$\gamma =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$C_1 =$	-0.6839	-0.3751	-0.09906	0.1340	0.1340	0.4343
$C_2 =$	-0.3479	-0.3379	-0.2467	-0.1131	0.02397	0.1213
$D_2 =$	0.1824	0.3465	0.3665	0.2889	0.1702	0.06726

Отметим, что при уменьшении  $\gamma$  коэффициенты  $C_0$  и  $C_2$  меняют знак. Это указывает на то, что в волне, образовавшейся на краю штампа, преобладают растягивающие напряжения. Поэтому для таких  $\gamma$  при вдавливании возможно «отлипание» среды от подошвы штампа. При  $\gamma = 0$  вычисления дают  $C_1 = -1$ , что согласуется с решением соответствующей акустической задачи [2,4].

2. Рассмотрим следующую задачу. На упругом полупространстве  $y \geq 0$  лежит жесткая массивная полоса бесконечной длины, имеющая ширину  $2l$ . Трение между полосой и упругой средой отсутствует, а вертикальные смещения точек среды совпадают со смещениями соответствующих точек полосы.

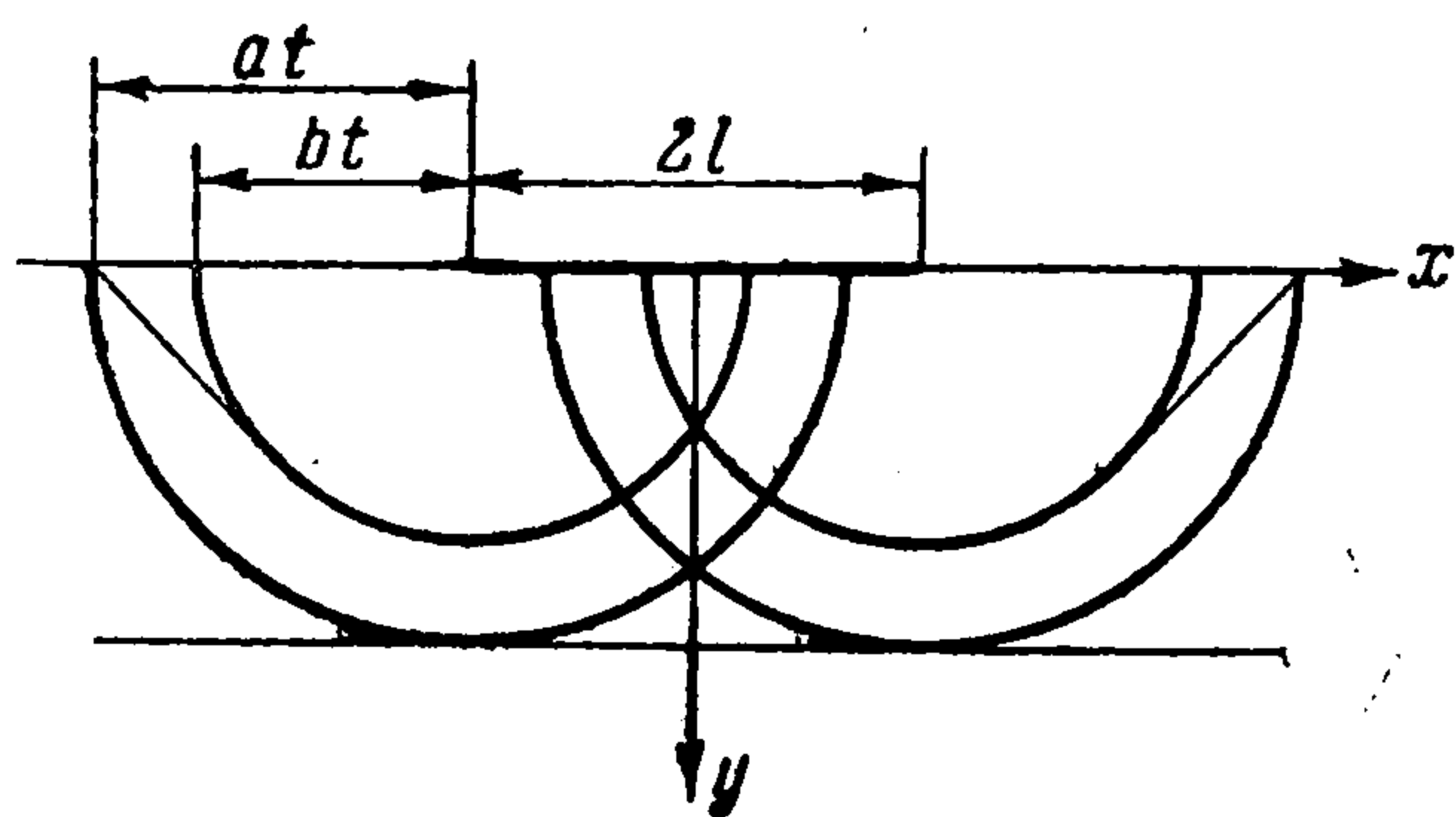
Пусть теперь на поверхность полупространства из глубины нормально падает плоская продольная волна при  $t = 0$ . Требуется найти движение полосы под действием волны. Решение будет построено для  $t < 2l/a$ .

Начало координат поместим в средние пластины, ось  $y$  направим вглубь, ось  $x$  перпендикулярно к краю пластины. Смещение в падающей волне обозначим  $v = v_0(t + y/a)$ .

Массу куска пластины единичной длины обозначим через  $m$ , равнодействующую нормальных напряжений под пластиной  $R$ , а смещение самой пластины через  $v(t)$ . Тогда

$$mv''(t) = R \quad (2.1)$$

Движение упругой среды, возникшее в результате падения волны на границу и колебаний пластины, можно представить в виде суммы двух



Фиг. 3

движений: первое — движение, которое возникло бы в отсутствие пластины (отражение плоской волны от свободной границы), а второе, которое возникло бы в полупространстве, если в него вдавливать полосу по неизвестному пока закону  $v_1(t)$ . Тогда

$$v(t) = 2v_0(t) + v_1(t) \quad (2.2)$$

Фронты всех образовавшихся волн нанесены на фиг. 3.

Вычислим  $R$ . Первое движение не вносит никакого вклада в  $R$ . Поэтому для его подсчета надо воспользоваться решением динамической задачи о штампе. Но если ограничиться временем  $t < 2l/a$ , достаточно знать решение задачи о полубесконечном штампе, вдавливаемом в полуплоскость по закону  $v_1(t)$ . Тогда, пользуясь (1.11) и (1.12), получим

$$R = -2aplv'_1(t) - C_1(\lambda + 2\mu)v_1(t)$$

Подставляя это в (2.2) в (2.1), будем иметь

$$mv''_1 + 2apl v''_1 + C_1 (\lambda + 2\mu) v_1 = - 2mv''_0$$

или

$$v''_1 + 2Mnv'_1 + C_1 Mn^2 v_1 = - 2v''_0 \quad (M = \rho l^2/m, n = a/l) \quad (2.3)$$

Начальные условия сформулируем следующим образом:

$$v'_1(0) + 2v'_0(0) = 0, \quad v_1(0) + 2v_0(0) = 0$$

Сейсмические волны от землетрясений бывают обычно длиннопериодными, а интервал времени, для которого движение полосы описывается уравнением (2.3), не велик, поэтому целесообразно рассматривать два случая

$$v_0(t) = -\frac{p_0}{a\rho} t, \quad v_0(t) = -\frac{p_0}{2a\rho T} t^2 \quad (2.4)$$

Для первого из них полное движение полосы определяется формулой

$$v(t) = -\frac{2p_0}{a\rho} \left( t - \frac{l}{\alpha a} e^{-M\tau} \operatorname{sh} \alpha\tau \right) \quad \left( \alpha = \sqrt{M^2 - MC_1}, \tau = \frac{at}{l} \right) \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что движение полосы «относительно волны» может быть либо аperiodическим, либо, если  $M < C_1$ , представляется затухающей синусоидой.

Параметр  $M$  характеризует отношение некоторой массы среды к массе полосы. Если полоса «легкая», движение аperiodическое, а затухание сильное; чем она «тяжелее», тем затухание меньше, а частота колебаний сначала растет, а затем убывает.

Для  $M \geq 1$  (легкая полоса) максимальное отклонение от движения свободной границы будет достигаться внутри интервала времени, для которого действует уравнение (2.3), а именно в момент

$$t_* = \frac{l}{a} \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{M + \alpha}{M - \alpha}$$

Чем легче полоса, тем меньше  $t_*$ , тем быстрее она начинает двигаться так же, как двигалась бы граница в ее отсутствие.

Что касается ускорения полного движения полосы, то в данном случае максимальное его значение достигается в момент подхода волны к ней и равно

$$v_*'' = -4pl/m$$

Далее оно стремится к нулю.

Во втором случае (2.4) ускорение полного движения полосы будет

$$v''(t) = -\frac{p_0}{a\rho T} \left\{ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left[ (M - \alpha) e^{-(M-\alpha)\tau} - (M + \alpha) e^{-(M+\alpha)\tau} \right] \right\}$$

в начальный момент ускорение полосы — нуль, а затем оно начинает нарастать и если полоса достаточно легка, то оно достигается в момент

$$t_{**} = \frac{l}{\alpha a} \ln \frac{M + \alpha}{M - \alpha}$$

Пользуясь предыдущей формулой, можно подсчитать его величину.

Сделаем еще одно замечание. Если

$$v_0(t) = A \sin \omega t$$

то для достаточно легкой полосы можно указать такие частоты  $\omega$ , когда произойдет ее отрыв от полупространства, т. е. когда равнодействующая напряжений под полосой обратится в нуль, а скорость будет отрицательна.

3. Рассмотрим, как и в п. 2, жесткую массивную однородную полосу ширины  $2l$  на упругом полупространстве. Систему координат расположим так же, как и в п. 2; будем решать задачу о движении полосы, если оно вызывается плоской волной (все равно продольной или поперечной), падающей под произвольным углом, меньшим критического (для свобод-

ной границы), и достигающей сначала левого края полосы при  $t = 0$ . Вертикальные смещения, образующиеся в результате отражения плоской волны от свободной границы  $y = 0$ , имеют вид

$$v = v_0 (t - \theta x) \quad (\theta^{-1} > a) \quad (3.1)$$

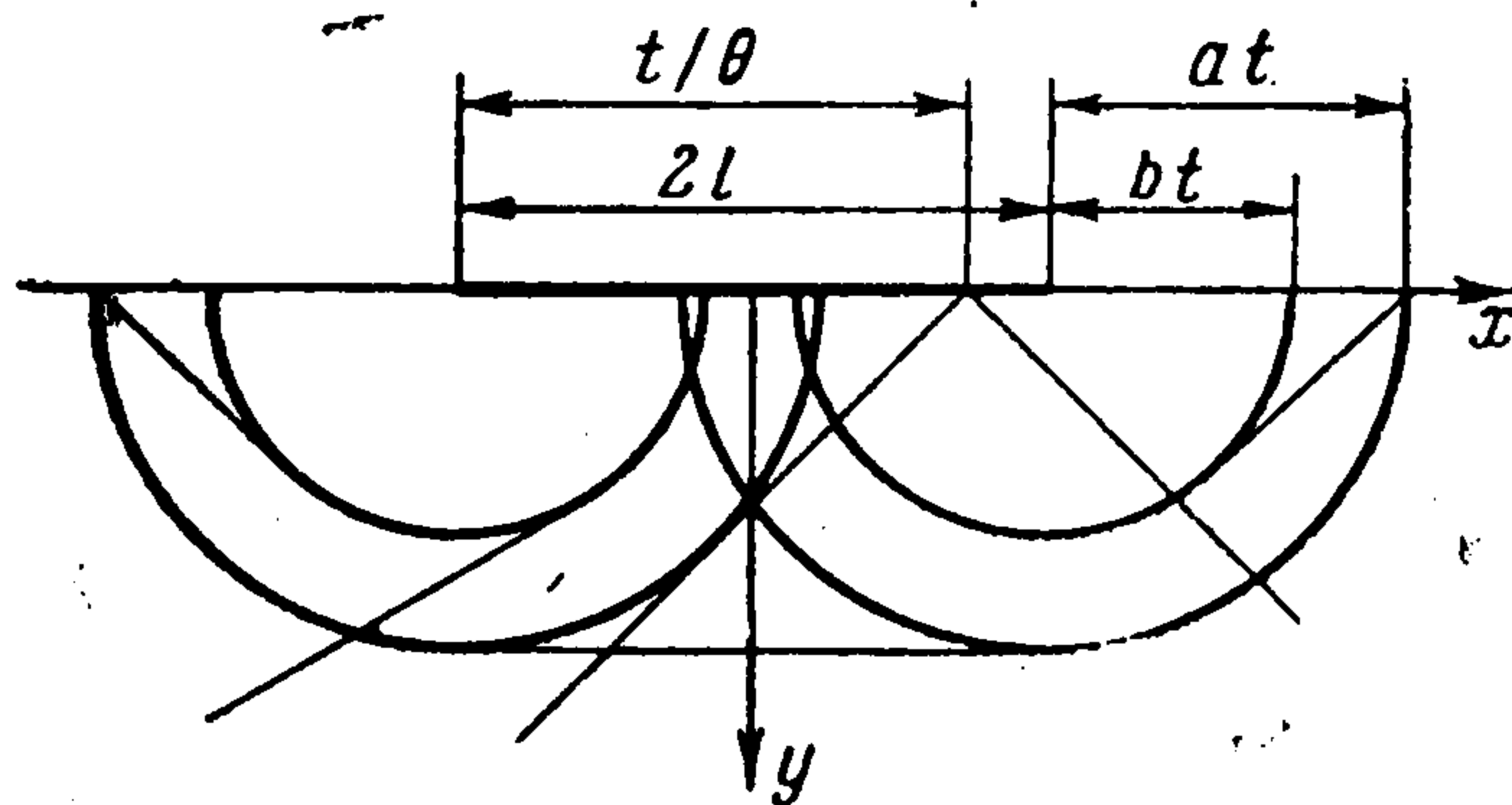
Под действием волны полоса начинает двигаться, но так как она жесткая, а отлипания, по предположению, нет, то вертикальное смещение точек среды, граничащих с полосой, будет

$$v(x, t) = w(t) + \alpha(t) x \quad (3)$$

Здесь  $w(t)$  — смещение центра полосы,  $\alpha(t)$  — малый угол поворота полосы.

Уравнения движения полосы

$$m\omega''(t) = R(t), \quad I\alpha''(t) = M(t) \quad (3.3)$$



Фиг. 4

Здесь  $m$  — масса куска полосы единичной длины,  $I$  — момент инерции этого куска относительно середины,  $R(t)$  и  $M(t)$  — равнодействующая и момент (относительно середины) напряжений под полосой. Начальные условия для уравнений (3.3) должны быть взяты нулевыми.

Чтобы выразить  $R(t)$  и  $M(t)$  через  $v_0$ ,  $w$  и  $\alpha(t)$ , представим движение упругой среды в виде суммы двух движений: одно возникло от вдавливания в упругую полуплоскость жесткого штампа по закону (3.2), а другое возникло в результате отражения плоской волны от границы со следующими условиями:

$$\tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (|x| > l), \quad v = 0 \quad (|x| < l)$$

Фронты образовавшихся волн изображены на фиг. 4.

Но если искать решения для этих задач для  $t < 2l\theta$ , т. е. для времени, когда след падающей волны не пробежал всей ширины полосы, можно воспользоваться результатами, изложенными в п. 1.

Подсчитаем равнодействующую. Напряжения, возникающие от малых поворотов полосы, не вносят никакого вклада в равнодействующую. Пользуясь формулами (1.12) и (1.22), где надо положить  $f(t) = w(t)$  и  $f(t) = -v_0(t)$  соответственно, получим

$$R(t) = -2aplw' - C_1(\lambda + 2\mu)w + C_3(\lambda + 2\mu)v_0 \quad (3.4)$$

При вычислении момента напряжений относительно середины полосы надо учесть, что напряжения, вызванные поступательным движением полосы, дают нулевой момент.

Что касается момента напряжений, вызванных малым поворотом, то следует иметь в виду, что в окрестности левого конца смещение можно представить как сумму смещения, вызванного поступательным перемещением полосы на величину  $-\alpha(t)l$  и поворотом на угол  $\alpha(t)$ , а в окрестности правого конца — поступательным смещением на  $\alpha(t)l$  и поворотом на угол  $-\alpha(t)$ .

Выразим момент напряжений  $M(t)$  через  $R_1(t)$ ,  $R_2(t)$ ,  $M_2(t)$ ,  $R_3(a\theta, t)$ ,  $M_3(a\theta, t)$  из (1.13), (1.19) и (1.22); при этом в (1.12) и (1.22) надо положить соответственно

$$f(t) = l\alpha(t), \quad f(t) = -v_0(t)$$

Тогда получим

$$M(t) = -\frac{4npl\alpha'(t)}{3} + 2lR_1(t) - 2lR_2(t) - 2M_2(t) - lR_3(a\theta, t) + M_3(a\theta, t) \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3) и полагая  $I = ml^2/3$ , после несложных преобразований получим

$$w'' + 2Mnw' + C_1Mn^2w = C_3Mn^2v_0 \quad (M = \rho l^2/m, n = a/l) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{IV} + 4Mn\alpha''' + 3C_1Mn^2\alpha'' + 3C_2Mn^3\alpha' + 3D_2Mn^4\alpha = \\ = -3C_3Mn^2l^{-1}v_0'' - 3D_3Mn^3l^{-1}v_0' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решения этих уравнений должны удовлетворять начальным условиям

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) = 0 \\ \alpha(0) = \alpha'(0) = \alpha''(0) = \alpha'''(0) = 0, \text{ если } v_0'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Это вытекает из второго уравнения (3.3) и начальных условий для него. Корни характеристического уравнения, соответствующего (3.6), будут

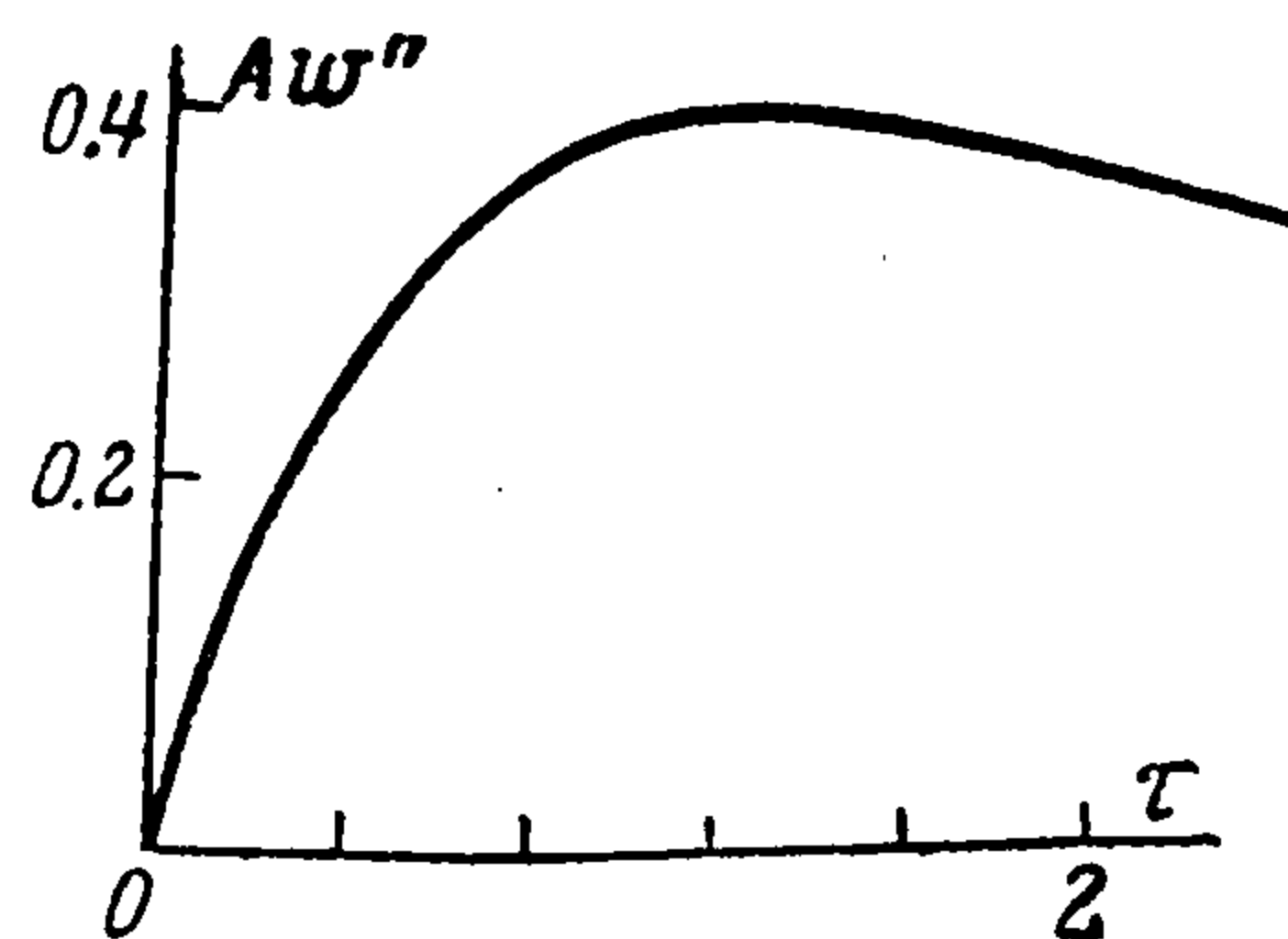
$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{l} (M \pm \sqrt{M^2 - MC_1}) \quad (3.9)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего (3.7), можно представить в виде

$$\lambda_k = -\frac{a}{l} \nu_k$$

Приведем некоторые значения  $\nu_k$  в зависимости от  $M$  при  $\gamma = 1/\sqrt{3}$

M	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_{3,4} = \epsilon \pm i\omega$
0.5	1.659	0.05743	$0.1719 \pm i 0.1493$
0.6	2.064	0.05739	$0.1391 \pm i 0.1469$
0.7	2.468	0.05736	$0.1372 \pm i 0.1454$
0.8	2.871	0.05734	$0.1359 \pm i 0.1743$
1.0	3.675	0.05731	$0.1350 \pm i 0.1429$
1.2	4.477	0.05729	$0.1329 \pm i 0.1420$
1.5	5.679	0.05727	$0.1318 \pm i 0.1411$



Фиг. 5

В качестве примера рассмотрим, как и в п. 2, случай, когда падающая волна продольная, характеризующаяся постоянным сжимающим напряжением  $-p_0$  и скоростью движения следа фронта вдоль границы  $\theta^{-1} > a$ .

Тогда

$$v_0(t) = -\frac{p_0}{a\rho} \frac{\sqrt{\gamma^2 - b^2\theta^2}}{\gamma G(b\theta)} t \quad (3.10)$$

Ускорение поступательного движения будет

$$w''(t) = -\frac{p_0}{\rho l} \frac{C_4}{2\sqrt{M^2 - MC_1}} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad \left( C_4 = \frac{\gamma k_0}{b\theta K(b\theta)} \right) \quad (3.11)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  даются (3.9).

График величины  $w''(t)$  как функции  $\tau = at/l$  при  $M = 1$  и  $\gamma = 1/\sqrt{3}$  изображен на фиг. 5. Кроме того, на фиг. 5 введено обозначение

$$A = -\frac{l\rho}{C_4\rho_0}$$

Однако можно пользоваться уравнениями (3.6) и (3.7) только для  $t \leq 2l\theta$ , т. е. до тех пор, пока след падающей волны не достиг правого края полосы. Так что для случаев, когда  $2l\theta$  мало (падение, близкое к нормальному), можно сказать только, что ускорение монотонно растет.

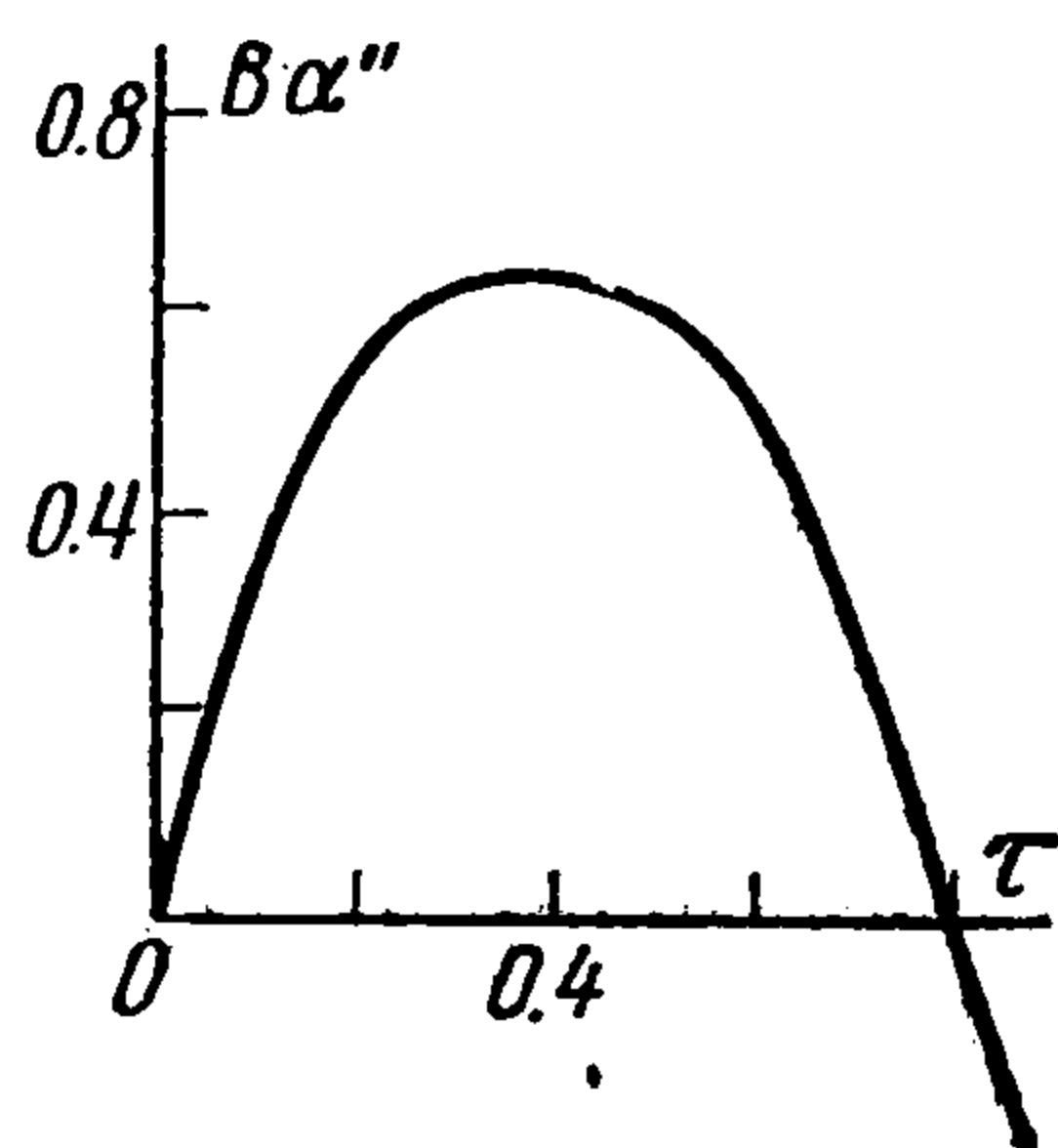
Перейдем к уравнению (3.7). В рассматриваемом примере нельзя пользоваться условиями (3.8), так как  $v'_0(0) \neq 0$ .

Учитывая это при дифференцировании (3.6) по  $t$ , получим

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = \alpha''(0) = 0, \quad \alpha'''(0) = -3C_4Mn^2l^{-1}v'_0(0)$$

Решение (3.7) при таких начальных условиях и указанном выборе  $v_0(t)$  имеет вид

$$\alpha''(t) = 3M \frac{\rho_0}{a^2\rho} \left\{ C_4\alpha_0(\tau) + D_4 \int_0^\tau \alpha_0(\xi) d\xi \right\} \quad (3.12)$$



Фиг. 6

где

$$\tau = \frac{at}{l}, \quad D_4 = \left( \frac{\gamma}{b\theta} \right)^2 \frac{k_0 + k_1b\theta}{K(b\theta)}$$

$$\alpha_0(\tau) = A_1e^{-v_1\tau} + A_2e^{-v_2\tau} - 2e^{-\varepsilon\tau} (A_3 \cos \omega\tau + A_4 \sin \omega\tau)$$

Постоянные интегрирования  $A_1, A_2, A_3, A_4$  определяются из начальных условий.

Зависимость  $\alpha''(\tau)$  при  $M = 1, \gamma = 1/\sqrt{3}, a\theta = 0,5$  изображена на фиг. 6, где  $B = \rho l^2/3D_4\rho_0$ .

4. Чтобы определить движение полосы для  $t > 2l/a$ , нужно уметь строить  $\sigma_{yy}$  при  $y = 0$  и  $x < 0$ , если на границе упругой полуплоскости  $y \geq 0$  заданы условия

$$\tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad v = 0 \quad (x < 0), \quad \sigma_{yy} = h(x, t) \quad (x > 0) \quad (4.1)$$

Здесь  $h(x, t)$  — заданная функция.

Решение этой задачи может быть получено так же, как в работе [1], методом Винера — Хопфа — Фока [5,6]. Поэтому запишем

$$\sigma_2(q, p) = -K(s)L(q, p) \quad \left( s = \frac{bq}{p} \right) \quad (4.2)$$

Здесь, как и раньше,  $p$  и  $q$  — параметры преобразования Лапласа по  $x$  и  $t$ ; функция  $K(s)$  дается (1.3), через  $L$  обозначена функция, регулярная в комплексной плоскости  $q$  при  $\text{Re } q < a^{-1} \text{Re } p$

$$L(q, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\sigma_1(\zeta, p) d\zeta}{K(s_1)(\zeta - q)} \quad \left( s_1 = \frac{b\zeta}{p} \right) \quad (4.3)$$

Контур  $l$  — бесконечная прямая, параллельная мнимой оси, и лежит в правой полуплоскости левее точки  $\zeta = p/a$

$$\sigma_2(q, p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{-\infty}^0 e^{-qx} \sigma_{yy}(x, t) dx, \quad \sigma_1(q, p) = \iint_0^\infty e^{-pt-qx} h(x, t) dx dt \quad (4.4)$$

Из нулевых начальных условий вытекает, что  $\sigma_2$  регулярна при  $\text{Re } q < a^{-1} \text{Re } p$ , а  $\sigma_1$  регулярна для  $\text{Re } q > 0$ .

Чтобы получить  $\sigma_{yy}(x, t)$ , надо к  $\sigma_2$  из (4.4) применить формулы обращения для преобразования Лапласа по  $q$  и  $p$ . Обращение по  $q$  дает

$$\sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} K(s) L(q, p) e^{qx} dq \quad (4.5)$$

Контур  $l_1$  — прямая, лежащая между мнимой осью плоскости  $q$  и контуром  $l$ . Интегрируя (4.5) по  $x$  под знаком интеграла, имеем

$$R^{\circ}(p) = \int_{-\infty}^0 \sigma_{yy}^{\circ}(x, p) dx = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} K(s) L(q, p) \frac{dq}{q}$$

Но  $K(s)$  и  $L(q, p)$  регулярны в левой полуплоскости и произведение их стремится к нулю в бесконечности, поэтому полученный интеграл равен вычету при  $q = 0$ , тогда для образа равнодействующей имеем

$$R^{\circ}(p) = -\frac{k_0}{2\pi i} \int_l \frac{\sigma_1(\zeta, p) d\zeta}{\zeta K(s_1)} \quad (4.6)$$

Аналогично для образа момента  $M(t)$ , вычисленного относительно точки  $x = 0$ , имеем

$$M^{\circ}(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \left( \frac{k_0}{\zeta^2} + \frac{k_1 b}{p\zeta} \right) \frac{\sigma_1(\zeta, p)}{K(s_1)} d\zeta \quad (4.7)$$

Рассмотрим случай, когда

$$h(x, t) = h(t - \theta x) \quad (\theta^{-1} > a) \quad (4.8)$$

Тогда

$$\sigma_1(q, p) = \frac{H(p)}{p\theta + q} \quad \left( H(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt \right)$$

Взяв интегралы (4.6) и (4.7) при помощи теоремы о вычетах и применив к результату обращение по  $p$ , получим

$$R(t) = \left[ C_5 - \frac{\gamma}{b\theta} \right] a \int_0^t h(\tau) d\tau \quad \left( C_5 = \frac{\gamma k_0}{b\theta K(-b\theta)} \right) \quad (4.9)$$

$$M(t) = \left[ \left( \frac{\gamma}{b\theta} \right)^2 - D_5 \right] a^2 \int_0^t (t - \tau) h(\tau) d\tau \quad \left( D_5 = \left( \frac{\gamma}{b\theta} \right)^2 \frac{k_0 - k_1 b\theta}{K(-b\theta)} \right)$$

5. Вернемся к задаче о движении полосы, сформулированной в п. 3. Полученное решение было справедливо до момента, пока след фронта падающей волны не добегит до правого края полосы. Пользуясь формулами (4.9), можно получить решение, справедливое для

$$0 \leq t \leq 2l/a \quad (5.1)$$

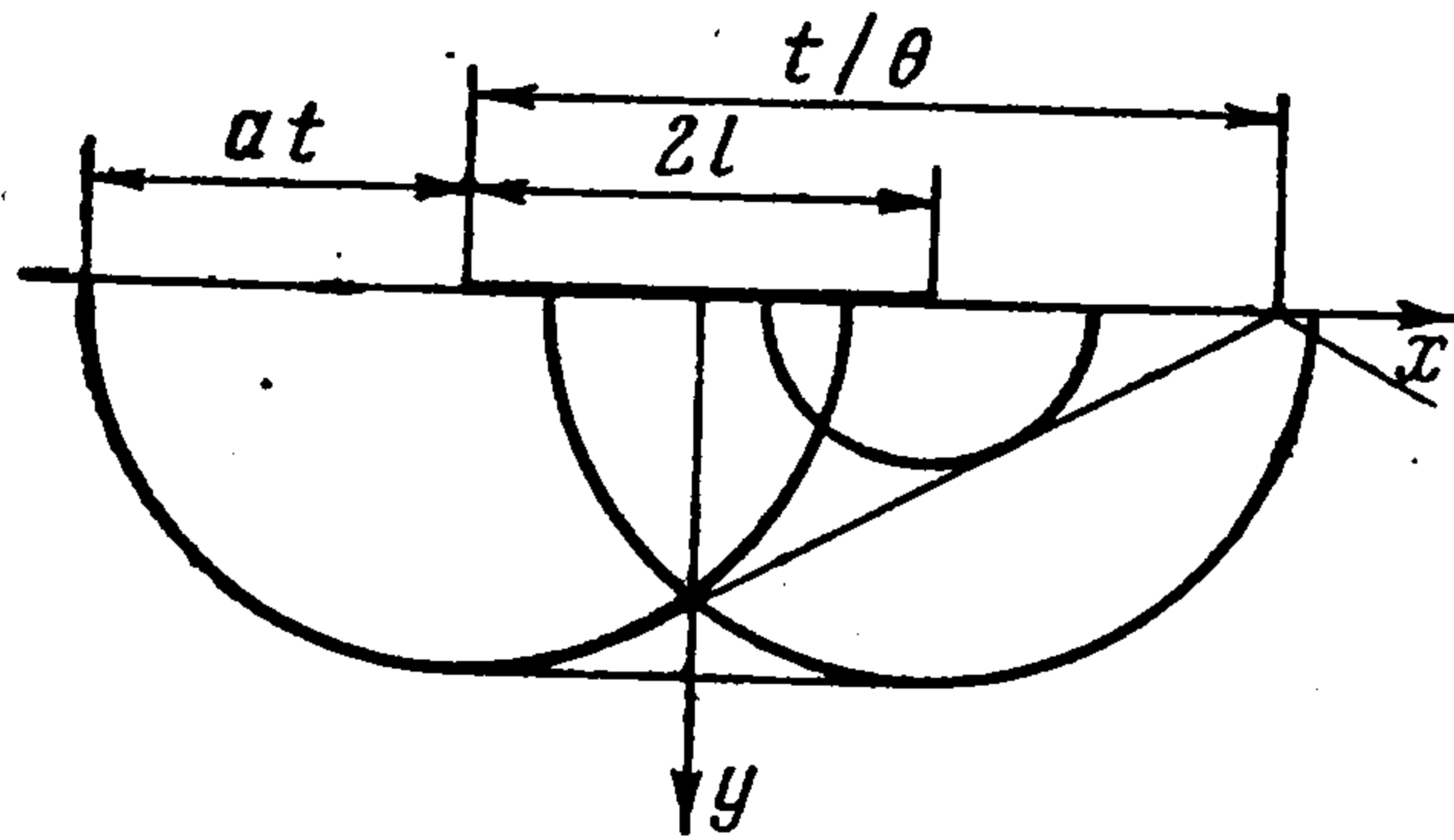
Для этого нужно учесть эффект взаимодействия падающей волны с правым краем полосы. Это можно сделать, добавляя к движению, образовавшемуся в результате отражения плоской волны от полубесконечной полосы, движение, вызванное приложением к границе  $x > 2l$  напряжений равных, но противоположных по знаку тем, которые имеются в первом движении.

На фиг. 7 изображены фронты падающей, отраженной волн и фронты продольных волн, образовавшихся на краях полосы; фронты поперечных волн на фигуре не нанесены.

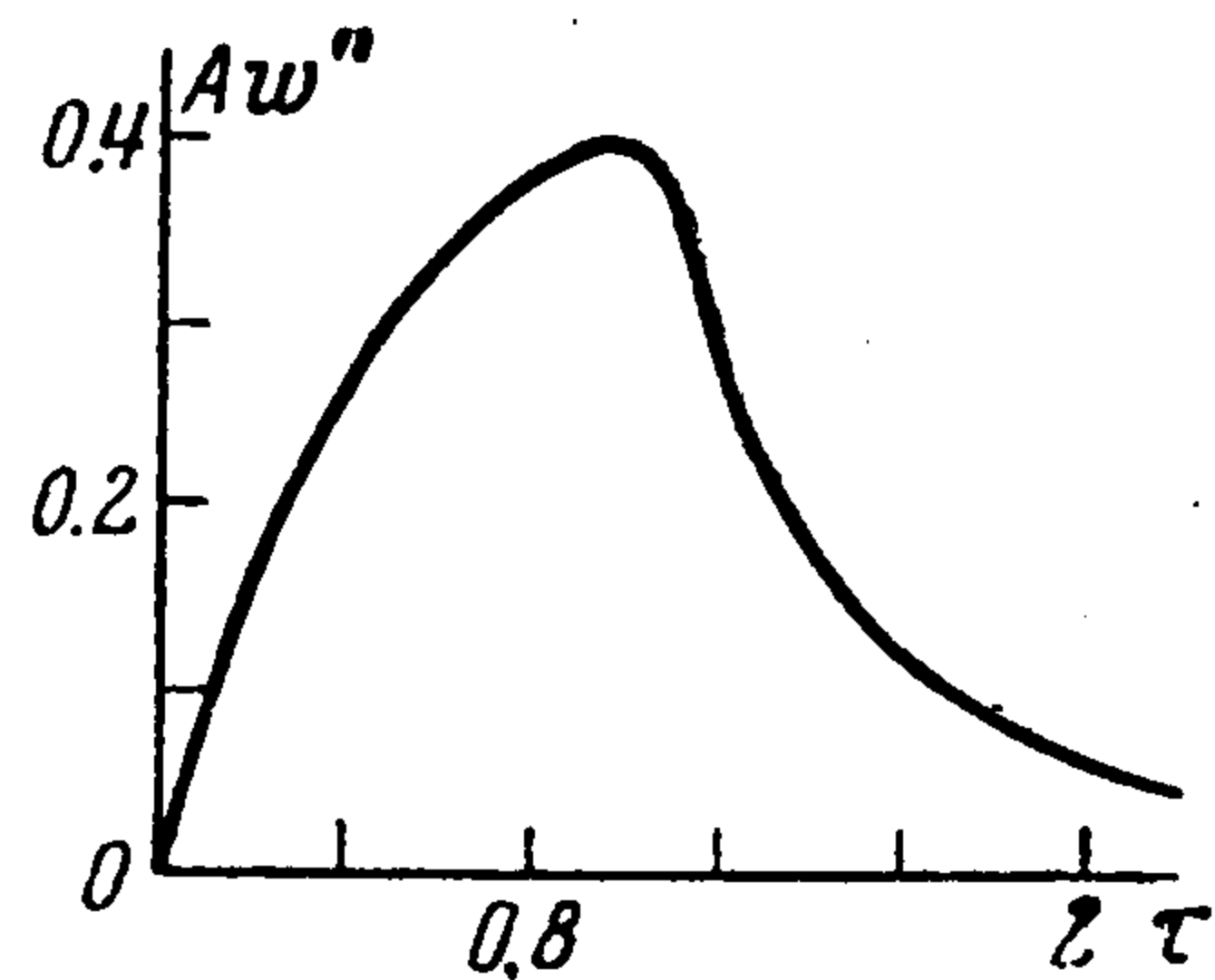
Если ограничиться интервалом времени (5.1), то достаточно рассмотреть

$$\sigma_{yy}(x, t) = h(x, t) = -\frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} a\rho v_0(t - \theta x - 2l\theta) \quad (5.2)$$

Это вытекает из (1.21) с учетом того, что след падающей волны натывается на левый край при  $t = 0$ .



Фиг. 7



Фиг. 8

Тогда к выражениям равнодействующей (3.4) и момента (3.5) согласно (4.9) нужно прибавить

$$\Delta R(t) = -\frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} C_5 (\lambda + 2\mu) v_0(t - 2l\theta) \quad (5.3)$$

$$\Delta M(t) = \frac{G(b\theta)}{\sqrt{1-a^2\theta^2}} \left[ C_5 a^2 \rho l v_0(t - 2l\theta) + D_5 a^3 \rho \int_0^{t-2l\theta} v_0(\tau) d\tau \right]$$

Эти добавки учитывают также то обстоятельство, что напряжения типа первого слагаемого из (1.9) действуют только под полосой.

Учет (5.3) приводит к тому, что в правых частях (3.6) и (3.7) появятся новые слагаемые, которые отличны от нуля для  $t > 2l\theta$ .

В случае, когда  $v_0(t)$  выбирается в виде (3.10), эти слагаемые будут

$$\frac{p_0}{a\rho} \left(\frac{a}{l}\right)^2 C_5 M(t - 2l\theta), \quad -\frac{p_0}{a\rho} \left(\frac{a}{l}\right)^3 \frac{1}{l} 3D_5 M$$

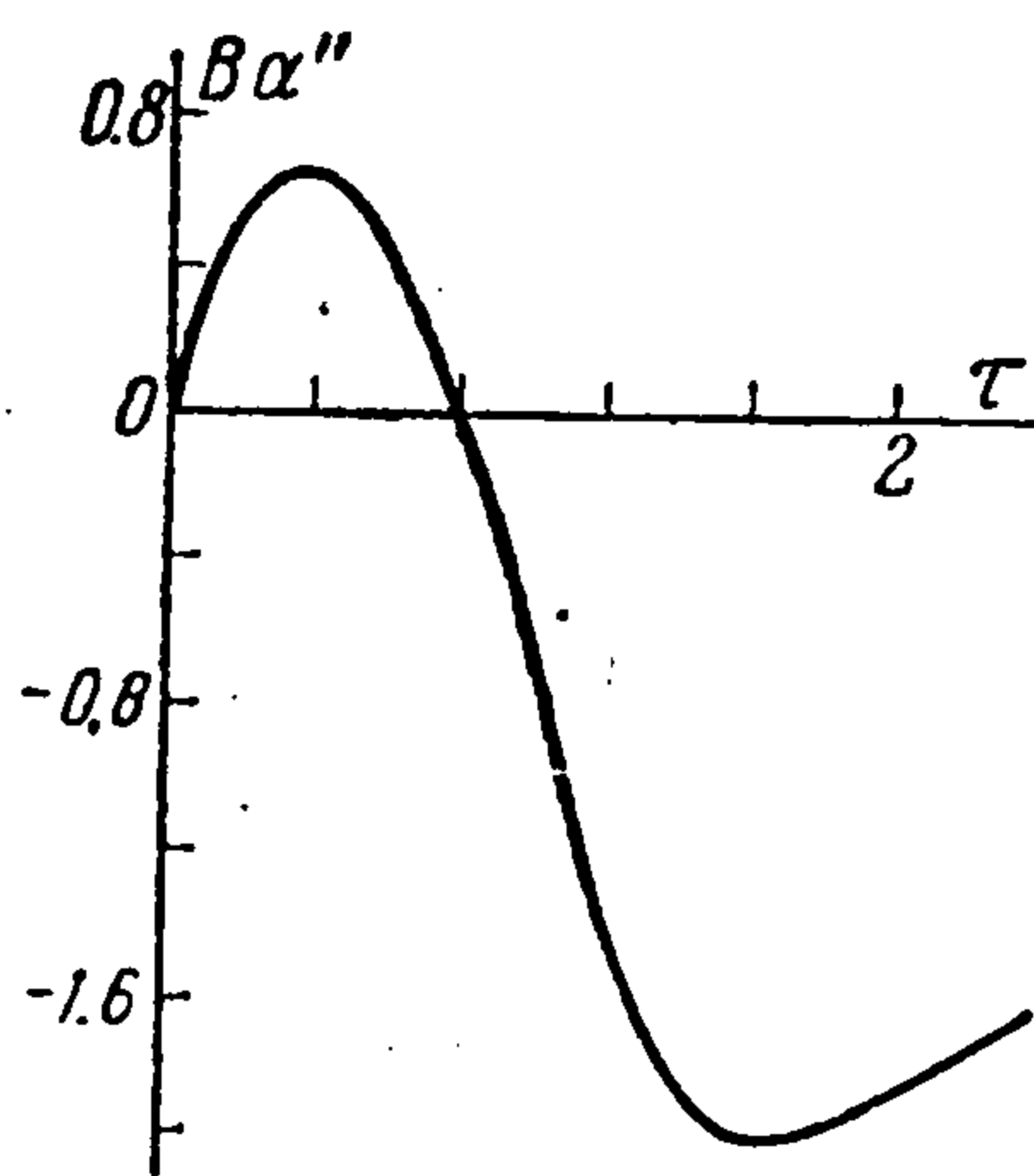
Это приводит к тому, что для  $2l\theta < t < 2l/a$  из ускорений поступательного и вращательного движения, вычисленным по формулам (3.11) и (3.12), нужно вычесть выражения, которые получаются из них же, если заменить  $C_4$  и  $D_4$  на  $C_5$  и  $D_5$ , а аргумент  $t$  заменить на  $t - 2l\theta$ .

График ускорения поступательного движения показывает, что если  $a\theta < 1/2$ , то максимальное значение его достигается в момент подхода следа падающей волны к правому краю полосы и равно значению  $w''(t)$  из (3.12), где  $\tau = 2a\theta$ .

На фиг. 8 и 9 приводится зависимость  $w''$  и  $\alpha''$  от  $\tau = at/l$ , вычисленных в тех же предположениях, что и фиг. 5 и 6. Смысл обозначений  $A$  и  $B$  также был указан выше.

Ниже приводится зависимость  $C_5$ ,  $D_5$  от  $a\theta$  для  $\gamma = 0.6$ .

$a\theta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C_5 = 9.802$	4.800	3.130	2.310	1.813	1.486	1.251	1.079	0.9467
$D_5 = 114.0$	28.58	12.71	7.159	4.588	3.193	2.350	1.808	1.434



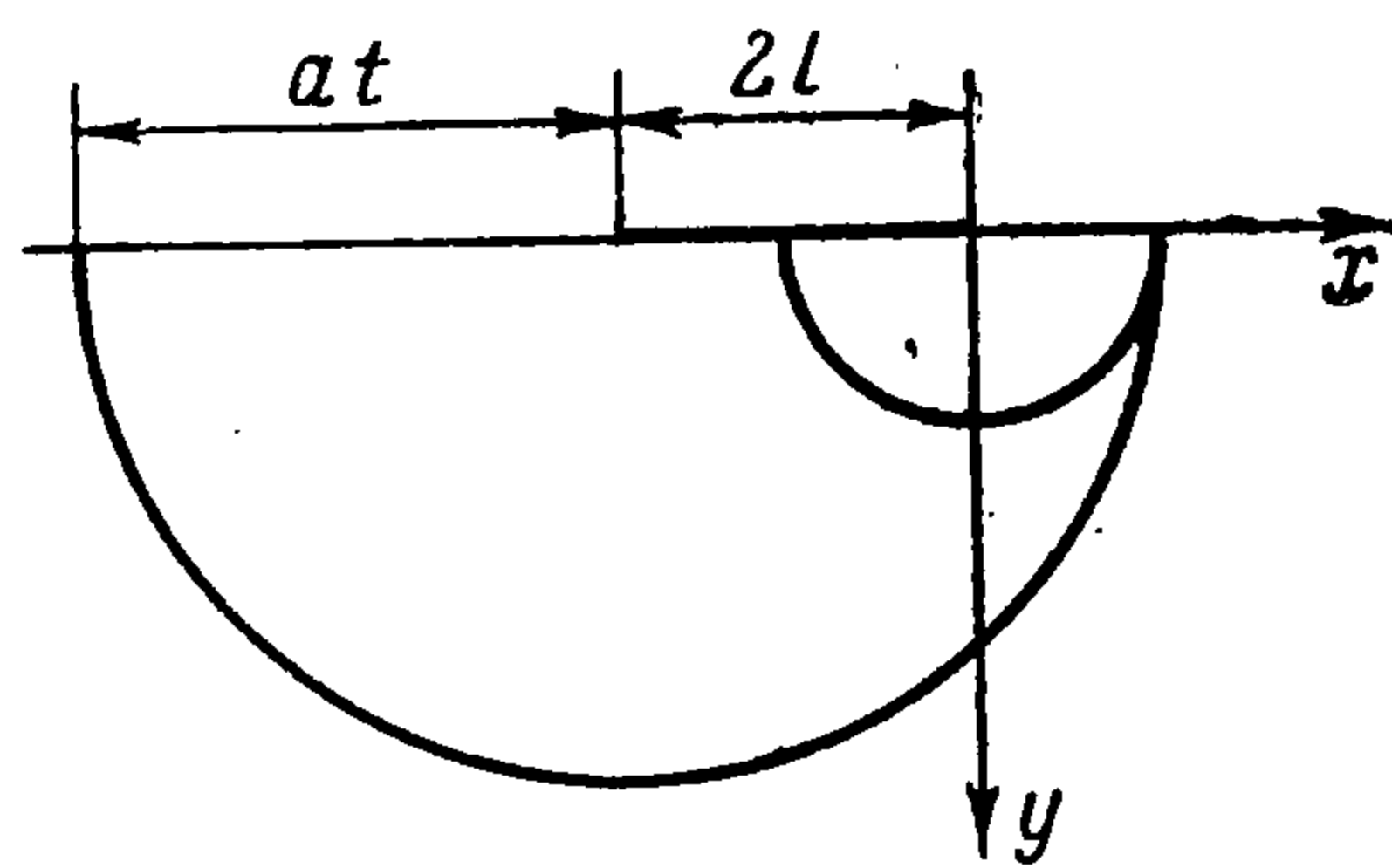
Фиг. 9

6. Изучая движение полосы для  $t < 2l/a$ , были использованы фактически решения задач о полубесконечном штампе и об отражении плоской волны от полубесконечной полосы, лежащей на упругом полупространстве. Обе эти задачи сводятся к автомодельным, чем и объясняется простота результатов. Построение решения, годного для большого интервала времени, приводит к необходимости решать задачу о взаимодействии волны, образовавшейся, скажем, на левом конце полосы, со свободной границей, находящейся за правым ее концом.

Поместим начало координат на левом конце полосы, ось  $x$  направим вправо, ось  $y$  в глубь среды.

Пусть на левом конце полосы образовалась волна, создающая под полосой напряжения, образ которых имеет вид

$$\sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = \int_{v_n} Q_n(M_n, p) \exp\left\{-\frac{spx}{b}\right\} dv_n \quad (6.1)$$



Фиг. 10

Здесь  $v_n$  — некоторый объем в  $n$ -мерном пространстве с координатами  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ;  $Q_n(M_n, p)$  — функция точки пространства и параметра  $p$ .

Будем считать, что равнодействующая и момент этих напряжений известны.

Через  $t = 2l/a$  волна достигает правого конца, на котором образуется новая волна.

На фиг. 10 для простоты нанесены только фронты продольных волн.

Возникшее движение среды можно представить в виде суммы движения в «падающей» волне и «отраженной», которая должна быть такой, чтобы напряжения в ней были для  $x \geq 2l$  равны и противоположны по знаку (6.1). Тем самым окажется, что для  $x \geq 2l$  граница свободна от напряжений. Чтобы построить такую волну, надо воспользоваться результатами п. 4.

Перенесем начало координат в точку  $x = 2l$ . Учитывая вышесказанное, следует приложить (в новых координатах) для  $x > 0$  напряжение  $h(x, t)$  такое, что

$$h^{\circ}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(x, t) dt = - \int_{v_n} Q_n(M_n, p) e^{-u} dv_n \quad (u = (2l + x) s_n p / b) \quad (6.2)$$

Согласно (4.4)

$$\sigma_1(q, p) = - \frac{b}{p} \int_{v_n} Q_n(M_n, p) \exp\left\{-\frac{2s_n pl}{b}\right\} \frac{dv_n}{s_n + s} \quad (6.3)$$

Вычисляя интегралы, определяющие  $\sigma_{yy}^{\circ}(x, p)$ , согласно (4.3) и (4.5), получим

$$\sigma_{yy}^{\circ}(x, p) = \int_{\gamma} ds \int_{v_n} Q_{n+1}(M_{n+1}, p) e^{spx/b} dv_n \quad (6.4)$$

Здесь

$$Q_{n+1} = - Q_n \frac{sN(s)}{(s + s_n)K(-s_n)} \exp\left\{-\frac{2s_n pl}{b}\right\} \quad (6.5)$$

Формулы (6.1) и (6.4) имеют одинаковую структуру, и поэтому (6.4) и (6.5) являются рекуррентными формулами для построения образов напряжения в отраженных от концов полосы волнах.

При помощи (4.6) и (6.3) для образа равнодействующей напряжений (6.4) получим

$$R_{n+1}^{\circ}(p) = k_0 \frac{b}{p} \int_{v_n} Q_n(M_n, p) \exp \left\{ -\frac{2s_n pl}{b} \right\} [1 - K^{-1}(-s_n)] \frac{dv_n}{s_n}$$

Чтобы подсчитать добавку к равнодействующей  $\Delta_n R^{\circ}(p)$ , вносимую отражением от края полосы, нельзя ограничиться приведенным выше выражением, так как в состав равнодействующей напряжений (6.1) входит часть, которая уравнивается (6.2). Учитывая это, получим

$$\Delta_n R^{\circ}(p) = -k_0 \frac{b}{p} \int_{v_n} \frac{Q_n(M_n, p)}{s_n K(-s_n)} \exp \left\{ -\frac{2s_n pl}{b} \right\} dv_n \quad (6.6)$$

Повторяя сходные рассуждения, из (4.7) находим

$$\Delta_n M^{\circ}(p) = -\left(\frac{b}{p}\right)^2 \int_{v_n} \left(\frac{k_0}{s_n^2} - \frac{k_1}{s_n}\right) \frac{Q_n(M_n, p)}{K(-s_n)} \exp \left\{ -\frac{2s_n pl}{b} \right\} dv_n \quad (6.7)$$

Выясним теперь, что будет происходить при последовательных «отражениях от краев» волны, образ напряжений в которой дается вторым слагаемым (1.9).

В этом случае  $v_1$  есть интервал  $\gamma \leq s_1 \leq \infty$

$$Q_1 = \frac{ap}{k_0} pF(p) N(s_1)$$

Тогда из (6.6) вытекает

$$\Delta_1 R^{\circ}(p) = -\gamma a^2 p F(p) \int_{\gamma}^{\infty} P_1(s_1) \exp \left\{ -\frac{2s_1 pl}{b} \right\} ds_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta_n R^{\circ}(p) = (-1)^n \gamma a^2 p F(p) \int_{v_n} \Pi_n(M_n) E_n(M_n, p) \frac{dv_n}{s_1 s_n}$$

где объем  $v_n$  такой, что  $s_k \geq \gamma$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\Pi_n(M_n) = \prod_{k=1}^{k=n} P_k(s_k), \quad E_n(M_n, p) = \exp \left\{ -\frac{2pl}{b} \sum_{k=1}^n s_k \right\} \quad (6.8)$$

$$P_k(s_k) = \frac{s_k}{s_k + s_{k-1}} \frac{N(s_k)}{K(-s_k)}, \quad P_1(s_1) = \frac{N(s_1)}{K(-s_1)}$$

Выполняя обращение по  $p$ , получим

$$\Delta_1 R(t) = -a^2 p \gamma \int_{\gamma}^{bt/2l} P_1(s_1) f\left(t - \frac{2s_1 l}{b}\right) \frac{ds_1}{s_1}$$

$$\dots \dots \dots \quad (6.9)$$

$$\Delta R_n(t) = (-1)^n a^2 p \gamma \int_{v_n} \Pi_n(M_n) f\left(t - \frac{2l}{b} \sum_{k=1}^n s_k\right) \frac{dv_n}{s_1 s_n}$$

Здесь  $v_n$  — объем в  $n$ -мерном пространстве  $s_1, \dots, s_n$  такой, что

$$s_k \geq \gamma, \quad \sum_{k=1}^n s_k \leq \frac{bt}{2l} \quad (6.10)$$

Заменой переменных эти выражения можно привести к виду

$$\Delta_n R(t) = (-1)^n 2a^3 \rho l^{-1} \int_0^{T_n} f(\tau) S_n(t - \tau) d\tau \quad \left(T_n = t - \frac{2ln}{a}\right) \quad (6.11)$$

Тогда для равнодействующей напряжений над полосой в случае ее поступательного движения с учетом (1.11) и (1.12) имеем

$$R(t) = -2aplf'(t) - C_1 a^2 \rho f(t) + 4a^3 \rho l^{-1} \sum_{n=1}^m (-1)^n \int_0^{T_n} f(\tau) S_n(t - \tau) d\tau \quad (m = E(at/2l)) \quad (6.12)$$

Нетрудно заметить, что структура (6.12) такова, что после подстановки  $R(t)$  в (2.1) и первое уравнение (3.3) для определения  $v_1(t)$  и  $w(t)$  на каждом шаге получатся обыкновенные уравнения с постоянными коэффициентами. Таким образом поставленная задача может быть решена в квадратурах.

Рассмотрим теперь отражение от краев волны, образ напряжений в которой дается вторым слагаемым (1.17)

$$Q_1 = \frac{a^2 \rho}{k_0^2} A(p) \left(k_1 - \frac{k_0}{s_1}\right) N(s_1) \quad (6.13)$$

а  $v_1$  есть полубесконечный интервал  $\gamma \leq s_1$ .

Тогда из (6.5), (6.6), (6.7) и (6.13) вытекает

$$\Delta_n R(t) = (-1)^n \gamma a^2 \rho \int_{v_n} \left(\frac{k_1}{k_0} - \frac{1}{s_1}\right) \Pi_n(M_n) \alpha_1 \left(t - \frac{2l}{b} \sum_{k=1}^n s_k\right) \frac{dv_n}{s_1 s_n} \quad (6.14)$$

$$\Delta_n M(t) = (-1)^n \gamma^2 a^3 \rho \int_{v_n} \left(\frac{k_1}{k_0} - \frac{1}{s_1}\right) \left(\frac{k_1}{k_0} - \frac{1}{s_n}\right) \Pi_n(M_n) \alpha_2 \left(t - \frac{2l}{b} \sum_{k=1}^n s_k\right) \frac{dv_n}{s_1 s_n}$$

Интегрирование проводится по объему (6.10). Кроме того, введены обозначения

$$\alpha_1(\xi) = \int_0^{\xi} \alpha(t) dt, \quad \alpha_2(\xi) = \int_0^{\xi} (\xi - t) \alpha(t) dt$$

Чтобы получить выражение для приращения моментов относительно середины полосы при вращении на угол  $\alpha(t)$ , нужно поступить так же, как в п. 3 при выводе формулы (3.6); при этом нужно воспользоваться формулами (6.14) и (6.9). Чтобы обобщить уравнение (3.7), необходимо подсчитать приращения равнодействующей и момента напряжений (1.21).

Тогда после преобразований, сходных с (6.11), для  $\alpha(t)$ , так же как и для  $w(t)$ , на каждом шаге будет получаться обыкновенное уравнение, но четвертого порядка, из которого  $\alpha(t)$  может быть найдено для любого момента времени.

7. Как видно из (1.3), (1.10), (6.8), (6.9), функции из (6.12) весьма сложны и поэтому желательно составить хотя бы приближенное представление о роли добавочных слагаемых в (6.12). Для этого аппроксимируем  $\varphi(\xi)$  из (1.3) функцией  $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi) = B(\gamma) \frac{\sqrt{(1-\xi)(\xi-\gamma)}}{\xi - \xi_0(\gamma)}$$

Постоянные  $B(\gamma)$  и  $\xi_0(\gamma)$  подбираются так, чтобы при  $\xi = 1/\sqrt{2}$ , где  $\varphi(\xi)$  имеет максимум, равный  $\pi/2$ , было  $\psi = \varphi$ . В результате получим функцию, совпадающую с  $\varphi(\xi)$  в трех точках и притом так, что и производные в этих точках тоже совпадают. При  $0.4 < \gamma < 0.65$  эта аппроксимация дает хорошую точность.

Теперь  $g(s)$ ,  $K(s)$ ,  $N(s)$  и  $P(s)$  можно выразить через элементарные функции. Для  $\gamma = 0.6$  были подсчитаны  $\Delta_1 R(t)$  и  $\Delta_2 R(t)$  в случае, когда  $f(t) = f_0 = \text{const}$ . Для  $2l/a < t < 8l/a$  оказалось, что  $\Delta_1 R(t)$  не превосходит  $4 \cdot 10^{-3} (\lambda + 2\mu) f_0$ , а  $\Delta_2 R(t)$  для  $4l/a < t < 8l/a$  не превосходит  $5 \cdot 10^{-4} (\lambda + 2\mu) f_0$ . Сопоставляя это с тем, что для  $0 < t < 2l/a$

$$R(t) = -2aplf_0 \delta(t) - 0.4343 (\lambda + 2\mu) f_0$$

а для больших времен к этому выражению нужно прибавить  $\Delta_1 R(t)$ ,  $\Delta_2 R(t)$  и т. д., можно заключить, что добавки, вносимые учетом отражений от концов в выражение равнодействующей для задачи о штампе будут невелики, если  $f(t)$  для  $t > l/a$  меняется медленно.

Это дает некоторые основания утверждать, что решение задачи о движении полосы и приведенное в пп. 2, 3, 5 в качестве некоторого приближения пригодно для большего интервала времени, чем было указано.

Автор благодарит Н. В. Зволинского, проявившего большое внимание к этой работе.

Поступила 9 VI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
2. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 11, вып. 5.
3. Афанасьев Е. Ф. Дифракция нестационарной волны давления на подвижной пластине. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
4. Флитман Л. М. Об одной смешанной краевой задаче для волнового уравнения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
6. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб., 1943, т. 14 (56), вып. 1—2.