Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. А. Шачнев

(Москва)

Решение уравнения вида $A\varphi = f$, где оператор A симметричный и положительный, можно свести к задаче о минимальном функционале, причем решение последней всегда существует, если оператор A положительно определенный [1, 2]. Известно доказательство теоремы о минимальном функционале [3] при более общих свойствах оператора A. В случае, если решение уравнения неединственно, то оператор A не обладает указанными свойствами в силу определения последних. Чтобы исключить неединственность решения, на область определения оператора накладываются дополнительные условия, которые не всегда удобны или очевидны для рассматриваемой задачи. В ряде случаев, в частности в осесимметричной задаче теории упругости, неединственность решения несущественна для задачи.

Путем обобщения в некотором смысле свойств оператора в данной работе теорема о минимальном функционале в обобщенной форме, рассмотренной ранее А. Е. Мартынюком [3], распространяется на случай неединственности решения. При этом исключается доопределение области определения оператора A. Для сокращения изложения используются работы С. Г. Михлина [1, 2], и доказательства теорем, аналогичных доказанным там, опускаются.

Теорема используется для обоснования вариационного метода, применяемого при решении осесимметричной задачи термоупругости. Эта задача при помощи доказательства соответствующего неравенства сводится к вариационной. Определяется оценка погрешности в среднем приближенных решений. Приведено решение задачи об осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины, находящегося под действием стационарной температуры. Рассмотрен численный пример.

§ 1. Пусть задано полное вещественное гильбертово пространство H. На линейном множестве M, плотном в H, определено уравнение

$$A\varphi = f, \qquad (\varphi \in M,\ f \in H) \tag{1.1}$$

где A — линейный (аддитивный и однородный) на M оператор.

Пусть существует некоторый линейный оператор B, так что линейное множество элементов $g = B\varphi \in H$, если $\varphi \in M$. Будем считать, что это множество плотно в H. Составим скалярное произведение $(A\varphi, B\psi)$ (где $\varphi, \psi \in M$) и введем следующие определения.

Оператор A будем называть симметричным с оператором B (или просто симметричным), если

$$(A\varphi, B\psi) = (A\psi, B\varphi), \qquad (\varphi, \psi \in M) \tag{1.2}$$

Оператор A будем называть положительным с оператором B (или просто положительным), если, помимо (1.2),

$$(A\varphi, B\varphi) \geqslant 0 \qquad (\varphi \in M) \tag{1.3}$$

причем равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда $B\varphi = 0$. Тогда множество элементов, для которых $A\varphi = 0$ и определяющих неединственность решения уравнения (1.1), включается в множество элементов, для которых $B\varphi = 0$. Предполагается, что последнее не плотно в H. Таким образом при помощи оператора B можно не различать те элементы φ, для которых $B\varphi$ одинаково, а нулевым элементом φ будем считать тот, для которого $B\varphi=0$.

Введенным определениям отвечает следующая теорема. Если оператор A положительный, то решение уравнения (1.1) «единственно».

Предположив, что φ_1 и φ_2 два различных решения, $A\varphi_1 = f$, $A\varphi_2 = f$, и составив скалярное произведение вида $(A\varphi, B\varphi)$ для разности решений $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, получим (в силу положительности оператора A), что необходимо $B\varphi_1 = B\varphi_2$, т. е. решения φ_1 и φ_2 не различны в принятом выше смысле. Из этой теоремы следует, что скалярные произведения $(A\varphi_1, B\varphi_1)$ и $(A\varphi_2, B\varphi_2)$ равны, если $B\varphi_1 = B\varphi_2$.

Сформулируем теперь теорему о минимальном функционале.

Теорема. 1) Если оператор A положительный, то решение уравнения (1.1) дает наименьшее значение функционалу

$$J(\varphi) = (A\varphi, B\varphi) - 2(f, B\varphi) \tag{1.4}$$

2) Обратно, если φ сообщает минимум функционалу (1.4), то оно является решением уравнения (1.1).

Существование решения вариационной задачи, задачи о нахождении минимума функционала (1.4), доказывается в некотором специальном пространстве в предположении, что оператор A положительно определенный с оператором B.

Оператор A будем называть положительно определенным с оператором B (или просто положительно определенным), если, помимо (1.2),

$$(A\varphi, B\varphi) \geqslant \gamma^2 \|B\varphi\|^2, \qquad \gamma > 0 \qquad (\varphi \in M) \tag{1.5}$$

Для элементов множества M, различных в принятом смысле, определим скалярные произведения по формулам

$$(\varphi, \psi)_B = (B\varphi, B\psi), \qquad (\varphi, \psi)_A = (A\varphi, B\psi) \tag{1.6}$$

Легко проверить, что эти определения отвечают аксиомам скалярного произведения [1].

Присоединяя к множеству элементов M предельные по метрике (1.6) элементы, получим полные гильбертовы пространства, которые обозначим H_B и H_A соответственно. Нормы элементов этих пространств определятся по формулам

$$\|\varphi\|_B = \sqrt{(\varphi, \varphi)_B}, \qquad \|\varphi\|_A = \sqrt{(\varphi, \varphi)_A}$$

Очевидно, M плотно в H_B и H_A. Связь между пространствами H_B и H_A для элементов, принадлежащих M, определится из (1.5)

$$\|\varphi\|_A \geqslant \gamma \|\varphi\|_B, \qquad \gamma > 0 \tag{1.7}$$

При помощи (1.7) можно доказать теорему о вложении пространства H_A в H_B: каждому элементу из H_A можно сопоставить элемент из H_B, так что различным элементам из H_A сопоставляются различные элементы из H_B. При этом неравенство (1.7) распространяется на все H_A.

Доказательство существования решения основывается на том, что для произвольного элемента $f \in H$ по формуле Коши — Буняковского с учетом (1.7)

$$|(f, B\varphi)| \leqslant \|f\| \|\varphi\|_B \leqslant \frac{\|f\|}{\gamma} \|\varphi\|_A, \qquad \varphi \in M$$

т. е. $(f, B\varphi)$ есть ограниченный в H_A функционал. Тогда по теореме Рисса [1] существует единственный элемент φ_0 в H_A, через который функционал можно представить в виде $(f, B\varphi) = (\varphi, \varphi_0)_A$. Считая функционал $J(\varphi)$ определенным по всем H_A, учитывая (1.6), получим, что

$$J(\varphi) = (\varphi, \varphi)_A - 2(\varphi, \varphi_0)_A = \|\varphi - \varphi_0\|_A^2 - \|\varphi_0\|_A^2 \tag{1.8}$$
$$\min J(\varphi) = -\|\varphi_0\|_A^2, \quad \text{при } \varphi = \varphi_0$$

Из доказанного следует, что элемент, сообщающий минимум функционалу (1.4), может не принадлежать M, области определения оператора A. В этом случае имеем единственное решение в расширенной области определения оператора A, т. е. в пространстве H_A. В пространстве H_B ему будет соответствовать некоторый предельный элемент $g^* = B\varphi^* = \lim B\varphi_n$, $\varphi_n \in M$ (предел здесь понимается в смысле $\|\varphi^* - \varphi_n\|_B \to 0$, $n \to \infty$). Решения, не принадлежащие M, будем называть обобщенными.

В пространстве H_A в предположении, что оно сепарабельно, построим решение вариационной задачи. Пусть φ_n — последовательность элементов полная и ортонормированная в H_A, т. е.

$$(\varphi_n, \varphi_m)_A = 0, \quad \text{если } n \neq m, \qquad \|\varphi_n\|_A = 1 \qquad (n = 1, 2 \ldots) \tag{1.9}$$

Тогда для элемента φ_0, реализующего минимум функционала $J(\varphi)$, будем иметь разложение в ортогональный ряд

$$\varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_0, \varphi_n)_A \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, B\varphi_n) \varphi_n \tag{1.10}$$

Если в решении (1.10) взять конечное число членов ряда, то последовательность элементов

$$\varphi^m = (f, B\varphi_1)\varphi_1 + \ldots + (f, B\varphi_m)\varphi_m$$

будет минимизирующей, так как

$$J(\varphi^m) = \|\varphi^m - \varphi_0\|_A^2 - \|\varphi_0\|_A^2 \to -\|\varphi_0\|_A^2 = \min J(\varphi)$$

Если в M задать систему элементов ψ_n, линейно независимую и полную в H_A, то, подставляя в (1.4) линейную комбинацию этих элементов

$$\psi^m = a_1\psi_1 + \ldots + a_m\psi_m \tag{1.11}$$

получим $J(\psi^m)$ как функцию параметров a_k. Составляя условия минимума функции $J(a_k)$, получим систему для определения коэффициентов

$$(A\psi_1, B\psi_n)\, a_1 + \ldots + (A\psi_m, B\psi_n)\, a_m = (f, B\psi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.12}$$

Можно доказать [1], что ψ^m есть минимизирующая последовательность при $m \to \infty$, если a_k определены из уравнений (1.12).

Тем самым доказывается сходимость метода Ритца в форме (1.12) (или метод Ритца — квадратов [3]). К такой же системе уравнений для определения a_k в (1.11) приводит метод Галёркина, который определится равенствами

$$(A\psi^m - f, B\psi_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.13}$$

и значит также будет сходящимся, если оператор A обладает определенными выше свойствами. Уравнения (1.13) совпадают с одной из обобщенных форм метода Галёркина, доказанных рядом авторов [4–6], но в предположении единственности решения

В дальнейшем пространство H будем считать реализованным пространством квадратично суммируемых функций с некоторым весом p (p — положительная функция), т. е. пространство $L_2(p)$, которое, как доказано [7], есть полное гильбертово сепарабельное пространство.

§ 2. Осесимметричная задача термоупругости в случае кругового цилиндра конечной длины может быть сведена к решению уравнения относительно функции напряжений $\varphi(\rho, \zeta)$

$$\frac{1}{\rho}\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\rho}\left(DD + 2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}D + \frac{\partial^4}{\partial\zeta^4}\right)\varphi = \frac{1}{\rho}f(\rho, \zeta), \quad D = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \tag{2.1}$$

$$\left(\rho = \frac{r}{R}, \ \zeta = \frac{z}{R}, \ \frac{r_0}{R} = \rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \zeta \leqslant l = \frac{L}{R}\right)$$

Здесь R — внешний радиус цилиндра, r_0 — внутренний, L — длина цилиндра. Функция $\varphi(\rho, \zeta)$ определяется формулами

$$\sigma_r = F_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2} - \frac{1-\mu}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + \frac{\mu}{\rho^2}D\varphi, \qquad \sigma_z = F_z + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}$$

$$\sigma_\theta = F_\theta + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2} + \frac{1-\mu}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{D\varphi}{\rho}, \qquad \sigma_{rz} = F_{rz} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial D\varphi}{\partial\zeta} \tag{2.2}$$

и удовлетворяет граничным условиям (задача решается в напряжениях)

$$D\varphi = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2} = \frac{1-\mu}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} \quad \text{при } \rho = \begin{cases}\rho_0\\ 1\end{cases}$$

$$D\varphi = 0, \quad \frac{\partial D\varphi}{\partial\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \begin{cases}0\\ l\end{cases} \tag{2.3}$$

Это легко проверить, подставив (2.2) в уравнения равновесия и условия сплошности, с учетом закона Гука при температурных деформациях [8], например, в случае, когда цилиндр подвержен действию лишь одной температуры $t(\rho, \zeta)$, распределение которой в цилиндре определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 t}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial t}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 t}{\partial\zeta^2} = f_1(\rho, \zeta)$$

В этом случае

$$F_z = 0, \ F_{rz} = 0 \tag{2.4}$$

$$F_r = \frac{E\alpha}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1} t\rho d\rho\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) - \frac{E\alpha}{\rho^2}\int_{\rho_0}^{\rho} t\rho d\rho$$

$$F_\theta = \frac{E\alpha}{1-\rho_0^2}\int_{\rho_0}^{1} t\rho d\rho\left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) + \frac{E\alpha}{\rho^2}\int_{\rho_0}^{\rho} t\rho d\rho - E\alpha t$$

$$f(\rho, \zeta) = \frac{E\alpha}{1-\rho_0^2}\left\{\frac{\rho^2}{1+\mu}\left[\frac{\partial t(1)}{\partial\rho} - \rho_0\frac{\partial t(\rho_0)}{\partial\rho}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_0^2}{1-\mu}\left[\frac{\partial t(1)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial t(\rho_0)}{\partial\rho}\right] - \left(\frac{\rho^2}{1+\mu} + \frac{\rho_0^2}{1-\mu}\right)\int_{\rho_0}^{1} f_1\rho\, d\rho\right\} - \frac{E\alpha}{1-\mu}\int_{\rho_0}^{\rho} f_1\rho d\rho$$

Если в правой части уравнения теплопроводности и соответственно в (2.4) вместо $f_1(\rho, \zeta)$ иметь в виду $\partial t / \partial\tau + f_2(\rho, \zeta)$, где τ — время, то получим случай квазистационарной задачи.

Областью определения оператора $A = \rho^{-1}\Delta_1^2$ будет множество M функций, четыре раза дифференцируемых по ρ и ζ и удовлетворяющих граничным условиям (2.3). Доказано [2], что такое множество плотно в $L_2(p)$, где в данном случае будет $p = \rho$.

Покажем, что оператор $A = \rho^{-1}\Delta_1^2$, положительно определенный с оператором $B = -\rho^{-1}D$.

Решение уравнения неединственно и определяется с точностью до $\varphi^\circ = a_0 + a_2\rho^2 + (b_0 + b_2\rho^2)\,\zeta$. Легко видеть, что φ° есть общее выражение нулевого элемента, определяемого тем, что $B\varphi^\circ = 0$. Пространство H_B, в котором отыскивается решение, будет определяться скалярным произведением и нормой

$$(\varphi, \psi)_B = \int_0^l\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho} D\varphi D\,\psi\, d\rho d\zeta, \qquad \|\varphi\|_B^2 = \int_0^l\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}(D\varphi)^2\, d\rho d\zeta \tag{2.5}$$

Интегрированием по частям с учетом условий (2.3) получим

$$(A\varphi, B\psi) = \int_0^l\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial D\psi}{\partial\rho} + 2\frac{\partial D\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial D\psi}{\partial\zeta} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\right)d\rho d\zeta -$$

$$-(1-\mu)\int_0^l\left(\frac{\partial^2\varphi(1)}{\partial\zeta^2}\frac{\partial^2\psi(1)}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial^2\varphi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\frac{\partial^2\psi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\right)d\zeta \tag{2.6}$$

Меняя в этом равенстве φ на ψ, получим, что $(A\varphi, B\psi) = (A\psi, B\varphi)$, т. е. оператор A симметричный. Из (2.6) получим

$$(A\varphi, B\varphi) = \int_0^l\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\right)^2\right]d\rho d\zeta -$$

$$-(1-\mu)\int_0^l\left[\left(\frac{\partial^2\varphi(1)}{\partial\zeta^2}\right)^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\right)^2\right]d\zeta \tag{2.7}$$

Докажем неравенство

$$x_1^2 - \frac{1}{\rho_0^2}x_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 d\rho \tag{2.8}$$

Здесь $x = x(\rho)$, $x_1 = x(1)$, $x_0 = x(\rho_0)$, $0 \leqslant \rho_0 \leqslant 1$. Пусть x_1 и x_0 имеют одинаковые знаки. Представим $x_0 = kx_1$, $0 \leqslant k \leqslant 1$. Тогда, очевидно

$$(1-k)\,x_1 = x_1 - x_0 = \int_{\rho_0}^1 \frac{\partial x}{\partial\rho}\,d\rho$$

Применяя неравенство Гёльдера [9], получим

$$(1-k)^2 x_1^2 \leqslant \left(\int_{\rho_0}^1 \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 \rho d\rho\right)\left(\int_{\rho_0}^1 1^2\rho d\rho\right) = \frac{1-\rho_0^2}{2}\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 d\rho$$

Отсюда

$$x_1^2 - \frac{1}{\rho_0^2}x_0^2 \leqslant f(\rho_0, k)\int_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 d\rho \qquad f(\rho_0, k) = \frac{(1-\rho_0^2)(\rho_0^2 - k^2)}{2\rho_0^2(1-k)^2}$$

Легко проверить, что $f(\rho_0, k)$ не имеет экстремума в области $0 < \rho_0 < 1$, $0 < k < 1$, причем при $k = \rho_0^2$, $f \equiv {}^1/_2$. Очевидно, f не будет иметь экстремума и над однозначной кривой $k = \rho_0^n$, $n > 1$.

Тогда функция

$$f(\rho_0) = (1-\rho_0^2)(1-\rho_0^{2n-2})\,/\,2(1-\rho_0^n)^2$$

будет достигать наибольшего и наименьшего значения при $\rho_0 = 0$ и $\rho = 1$.

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{\rho\to 1} f(\rho_0) = \frac{2(n-1)}{n^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Если x_1 и x_0 разных знаков, то в силу предполагаемой непрерывности $x(\rho)$ имеется значение $\rho = \rho_a$, при котором $x(\rho_a) = 0$. Тогда

$$x_1 = \int\limits_{\rho_a}^{1} \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho, \qquad x_1^2 \leqslant \frac{1-\rho_a^2}{2} \int\limits_{\rho_a}^{1} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 d\rho \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\rho_0}^{1} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 d\rho$$

Итак, неравенство (2.8) доказано.

Из (2.8) следует

$$\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial^2\varphi(1)}{\partial\zeta^2}\right)^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\right)^2\right] d\zeta \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho d\zeta \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9), легко доказать теперь положительность оператора A. Отбросим в (2.7) заведомо положительные члены, так что

$$(A\varphi, B\varphi) \geqslant \int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right] d\rho d\zeta = \int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right)^2\right] d\rho d\zeta, \quad v = \frac{D\varphi}{\sqrt{\rho}}$$

При этом из (2.3) следует: $\rho = \rho_0$, $\rho = 1$; $\zeta = 0$, $\zeta = l$; $v = 0$, т. е. на контуре прямоугольника $v = 0$.

Тогда применимо неравенство Фридрихса [10]

$$\int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right)^2\right] d\rho d\zeta \geqslant \gamma^2 \int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 v^2 d\rho d\zeta = \gamma^2 \int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}(D\varphi)^2 d\rho d\zeta$$

Отсюда очевидна положительная определенность (1.5) оператора A.

Таким образом, решение уравнения (2.10) можно определить как решение, найденное из условия минимума функционала

$$J(\varphi) = -\int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho}\Delta_1^2\varphi D\varphi d\rho d\zeta + 2\int\limits_0^l\int\limits_{\rho_0}^1 \frac{1}{\rho} f D\varphi d\rho d\zeta \tag{2.10}$$

Определим характер сходимости приближенного решения к точному. (В дальнейшем всегда интегрирование по ζ будет в пределах от 0 до l, по ρ — от ρ_0 до 1 и пределы интегрирования ставиться не будут.) Если φ_0 есть решение вариационной задачи, а φ_n — минимизирующая последовательность, то согласно (1.8) из условия

$$J(\varphi_n) = \|\varphi_n - \varphi_0\|_A^2 - \|\varphi_0\|_A^2 \to -\|\varphi_0\|_A^2 \tag{2.11}$$

следует, что $\|\varphi_n - \varphi_0\|_A^2 \to 0$, где $\|\varphi\|_A^2 = (A\varphi, B\varphi)$ и равно (2.7). Подставляя $\varphi_n - \varphi_0$ в (2.7) вместо φ и учитывая (2.9), получим

$$\iint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\varphi_n}{\partial\rho} - \frac{\partial D\varphi_0}{\partial\rho}\right)^2 d\rho\, d\zeta \to 0, \qquad \iint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\varphi_n}{\partial\zeta} - \frac{\partial D\varphi_0}{\partial\zeta}\right)^2 d\rho\, d\zeta \to 0$$

$$\iint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3\varphi_n}{\partial\rho\partial\zeta^2} - \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial\rho\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho\, d\zeta \to 0 \tag{2.12}$$

т. е. функции $\rho^{-1}\partial D\varphi_n/\partial\rho$, $\rho^{-1}\partial D\varphi_n/\partial\zeta$, $\rho^{-1}\partial^3\varphi_n/\partial\rho\partial\zeta^2$ сходятся к соответствующим функциям точного решения в среднем с весом ρ.

Докажем сходимость в среднем и для $\rho^{-2}\partial^2\varphi_n/\partial\zeta^2$, $\rho^{-2}D\varphi_n$. Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho d\zeta = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial^2\varphi(1)}{\partial\zeta^2}\right)^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\right)^2\right] d\zeta =$$

$$= \iint \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} d\rho\, d\zeta - \iint \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho\, d\zeta$$

Применяя неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, получим

$$\left(\iint \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho d\zeta\right)^2 \leqslant 2\left(\iint \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}d\rho d\zeta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left[\int\left(\frac{\partial^2\varphi(1)}{\partial\zeta^2}\right)^2 - \frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial^2\varphi(\rho_0)}{\partial\zeta^2}\right)^2\right]d\zeta\right)^2$$

Если в правой части первый интеграл больше второго, то, применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\iint\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)^2 \rho d\rho\, d\zeta \leqslant \sqrt{\frac{5}{2}}\iint\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho\, d\zeta \tag{2.13}$$

Если второй интеграл больше первого, то, учитывая (2.9), неравенство (2.13) очевидно. Рассмотрим еще одно тождество. В силу (2.3) имеем

$$\frac{1}{2}\iint\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{D\varphi}{\rho}\right)^2 d\rho\, d\zeta = \iint\frac{D\varphi}{\rho^2}\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}d\rho\, d\zeta - \iint\left(\frac{D\varphi}{\rho^2}\right)^2\rho d\rho d\zeta = 0$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left(\iint\left(\frac{D\varphi}{\rho^2}\right)^2\rho d\rho\, d\zeta\right)^2 \leqslant \iint\left(\frac{D\varphi}{\rho^2}\right)^2\rho d\rho d\zeta\iint\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}\right)^2\rho d\rho\, d\zeta$$

Отсюда

$$\iint\left(\frac{D\varphi}{\rho^2}\right)^2\rho d\rho d\zeta \leqslant \iint\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\varphi}{\partial\rho}\right)^2 d\rho\, d\zeta \tag{2.14}$$

Подставляя $\varphi_0 - \varphi_n$ в (2.13) и (2.14) вместо φ, получим, учитывая (2.12), сходимость в среднем функций $\rho^{-2}\partial^2\varphi_n/\partial\zeta^2$, $\rho^{-2}D\varphi_n$ соответственно к $\rho^{-2}\partial^2\varphi_0/\partial\zeta^2$, $\rho^{-2}D\varphi_0$.

Все эти величины, сходимость которых доказана в среднем, и только они, входят в выражения напряжений (2.1). Тогда легко доказать сходимость в среднем и самих напряжений. Пусть σ_{nr} и σ_{0r} определенные по формулам (2.1), соответствуют приближенному φ_n и точному φ_0 решениям. Тогда

$$\iint(\sigma_{0r}-\sigma_{nr})^2\rho d\rho d\zeta = \iint\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3(\varphi_0-\varphi_n)}{\partial\rho\,\partial\zeta^2} - \frac{1-\mu}{\rho^2}\frac{\partial^2(\varphi_0-\varphi_n)}{\partial\zeta^2} + \frac{\mu}{\rho^2}D(\varphi_n-\varphi_0)\right]^2\rho d\rho d\zeta$$

Применяя неравенство Минковского [9], получим

$$\|\sigma_{0r}-\sigma_{nr}\| = \left(\iint(\sigma_{0r}-\sigma_{nr})^2\rho d\rho\, d\zeta\right)^{1/2} \leqslant \left(\iint\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3(\varphi_0-\varphi_n)}{\partial\rho\,\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho d\zeta\right)^{1/2} +$$
$$+\left(\iint\frac{(1-\mu)^2}{\rho^3}\left(\frac{\partial^2(\varphi_0-\varphi_n)}{\partial\zeta^2}\right)^2 d\rho d\zeta\right)^{1/2} + \left(\iint\frac{\mu^2}{\rho^3}(D(\varphi_0-\varphi_n))^2 d\rho d\zeta\right)^{1/2}$$

Сходимость стоящих справа величин доказана и тем самым доказана сходимость в среднем с весом ρ функций σ_{nr} к σ_{0r}. Аналогично доказывается сходимость и для остальных напряжений.

Так как каждый член в правой части неравенства меньше $2\|\varphi_n-\varphi_0\|_A$, что следует из (2.12) — (2.14), то для оценки отклонения в среднем приближенного значения напряжений от точного необходимо оценить величину $\|\varphi_n-\varphi_0\|_A$.

Из (2.11) очевидно, что $\|\varphi_n-\varphi_0\|_A{}^2 = J(\varphi_n) + \|\varphi_0\|_A{}^2$ и если есть такая величина δ, так что $\delta \leqslant -\|\varphi_0\|_A{}^2$ или $-\delta \geqslant \|\varphi_0\|_A{}^2$, то

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|_A \leqslant \sqrt{J(\varphi_n)-\delta} \tag{2.15}$$

Эта оценка будет тем точней, чем ближе δ к $-\|\varphi_0\|_A{}^2$. Естественно определить такой функционал, который сходился бы к величине $\min J(\varphi) = -\|\varphi_0\|_A{}^2$ снизу, т. е. имел бы $\min J(\varphi)$ своим максимумом. Построение такого функционала сделаем согласно общей идеи Фридрихса и распространенной М. Г. Слободянским [11] на уравнения в частных производных высокого порядка, решение которых связано с задачей о минимальном функционале. Применим метод М. Г. Слободянского на случай функционала (2.10). Представим (2.10) в виде

$$J(\varphi) = \Phi(\varphi) + 2\iint\frac{1}{\rho}fD\varphi\, d\rho\, d\zeta \tag{2.16}$$

где $\Phi(\varphi)$ равно (2.7).

Уравнение (2.1) будет естественным условием минимума функционала $J(\varphi)$ [10]. Введем в $\Phi(\varphi)$ замену переменных $D\varphi = u$, $\partial^2\varphi / \partial\zeta^2 = v$. Тогда по формуле (2.7)

$$\Phi(u, v) = \iint \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2\right] d\rho d\zeta - (1-\mu)\int\left[v^2(1) - \frac{1}{\rho_0^2} v^2(\rho_0)\right] d\zeta \quad (2.17)$$

Уравнение (2.1) примет вид

$$Du + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} = f \quad (2.18)$$

Если теперь φ_0 есть точное решение задачи о минимуме функционала (2.16), от обозначив $u_0 = D\varphi_0$, $v_0 = \partial^2\varphi_0 / \partial\zeta^2$, будем иметь для u_0, v_0 в силу (2.3)

$$u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \rho} = \frac{1-\mu}{\rho} v_0 \quad \text{при } \rho = \begin{cases}\rho_0 \\ 1\end{cases} \quad u_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \begin{cases} 0 \\ l\end{cases} \quad (2.19)$$

В силу неравенства (2.9) имеем $\Phi(u, v) \geqslant 0$. Подставив в (2.17) вместо u и v разности $u_0 - u_n$ и $v_0 - v_n$, где u_n, v_n — произвольные функции, будем иметь $\Phi(u_0 - u_n, v_0 - v_n) \geqslant 0$. Если, например, будут выполнены граничные условия

$$u_n = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial\rho} = \frac{1-\mu}{\rho} v_n \quad \text{при } \rho = \rho_0, \ \rho = 1 \quad (2.20)$$

то $\Phi(u_0 - u_n, v_0 - v_n) = 0$ лишь тогда, когда $u_n = u_0$, $v_n = v_0$.

Подчиним u_n и v_n дополнительному условию (2.18), естественному, когда $u_n \to u_0$ $v_n \to v_0$. Тогда

$$\Phi(u_0 - u_n, v_0 - v_n) = \Phi(u_0, v_0) + \Phi(u_n, v_n) - F(u_0, v_0, u_n, v_n)$$

где F, учитывая (2.19) и тождество $\partial^2 u_0 / \partial\zeta^2 = Dv_0$, интегрированием по частям можно получить в виде

$$F = -2\iint \frac{u_0}{\rho}\left(Du_n + 2\frac{\partial^2 u_n}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial\zeta^2}\right) d\rho\, d\zeta = -2\iint \frac{1}{\rho} D\varphi_0 f\, d\rho\, d\zeta$$

Тогда $\Phi(u_0, v_0) - F = J(\varphi_0) = \min J(\varphi)$, а так как $\Phi(u_n, v_n) + \min J(\varphi) \geqslant 0$, то

$$\max[-\Phi(u_n, v_n)] = \min J(\varphi) \quad \text{при } u_n \to u_0, \ v_n \to v_0$$

Очевидно, тогда

$$\delta = -\Phi(u_n, v_n)$$

Если положить $u_n = D\psi$, $v_n = \partial^2\psi / \partial\zeta^2$, то получим $\delta = -\Phi(\psi)$, где ψ есть решение уравнения (2.1), согласно (2.20), удовлетворяющее только условиям

$$\rho = \rho_0, \quad \rho = 1, \quad D\psi = 0, \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial\rho\,\partial\zeta^2} = \frac{1-\mu}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} \quad (2.21)$$

Можно показать, что для всех напряжений выполняется неравенство

$$\|\sigma_n - \sigma_0\| \leqslant (1+\mu)\sqrt{J(\varphi_n) - \delta},$$

хотя также довольно грубое, если ни одно из них не равно тождественно нулю.

§ 3. Применим метод Галёркина (1.13) для решения осесимметричной задачи. Выберем систему функций в виде $\varphi_{nm} = x_n(\rho)\, y_m(\zeta)$. Для получения более простой системы уравнений (1.13) определим $x_n(\rho)$ как собственные функции уравнения

$$D(\rho Z_n) = -\lambda_n^2 \rho Z_n, \quad Z_n = Dx_n, \quad \rho = \rho_0, \quad \rho = 1, \quad Z_n = 0$$

Тогда собственные функции, ортонормированные с весом ρ, будут иметь вид

$$Z_n = Dx_n = c_n Z_1(\lambda_n\rho), \qquad Z_1(\lambda_n\rho) = N_1(\lambda_n) J_1(\lambda_n\rho) - J_1(\lambda_n) N_1(\lambda_n\rho)$$

$$c_n = \sqrt{2}\,[Z_0^2(\lambda_n) - \rho_0^2 Z_0^2(\lambda_n\rho_0)]^{-1/2}, \qquad Z_0(\lambda_n\rho) = N_1(\lambda_n) J_0(\lambda_n\rho) - J_1(\lambda_n) N_0(\lambda_n\rho)$$

Здесь J_0, J_1, N_0, N_1 — бесселевы функции первого и второго рода соответственно нулевого и первого порядков, λ_n есть корень уравнения

$$Z_1(\lambda_n\rho_0) = 0 \quad (3.1)$$

Как известно [12], указанная система функций будет полной в $L_2(\rho)$. Интегрированием получим

$$x_n(\rho) = -\frac{c_n}{\lambda_n^2}\rho Z_1(\lambda_n\rho) + \frac{1}{1-\rho_0^2}\left(\rho_0^2\frac{\delta_n}{1-\mu} + \rho^2\frac{\gamma_n}{1+\mu}\right)$$

$$\delta_n = \frac{c_n}{\lambda_n}[Z_0(\lambda_n) - Z_0(\lambda_n\rho_0)], \qquad \gamma_n = \frac{c_n}{\lambda_n}[Z_0(\lambda_n) - \rho_0^2 Z_0(\lambda_n\rho_0)]$$

Функция x_n удовлетворяет условиям:

$$\rho = \rho_0, \quad \rho = 1, \quad Dx_n = 0, \quad \rho\,\partial x_n / \partial\rho = (1-\mu)\,x_n$$

Определим y_m как ортонормированные собственные функции уравнения

$$y_m^{IV} = \nu_m^4 y_m, \quad \zeta = 0, \quad \zeta = l, \quad y_m = 0 \quad y_m' = 0$$

Получим

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{l}}\left[\operatorname{ch}\nu_m\zeta - \cos\nu_m\zeta - \frac{\operatorname{ch}\nu_m l - \cos\nu_m l}{\operatorname{sh}\nu_m l - \sin\nu_m l}(\operatorname{sh}\nu_m\zeta - \sin\nu_m\zeta)\right]$$

где ν_m — корень уравнения $\operatorname{ch}\nu_m l\cos\nu_m l = 1$; при этом $\nu_1 l = 4.730$, $\nu_2 l = 7.853$ остальные корни довольно точно определяются по формуле

$$\nu_m l = m\pi + \pi/2, \quad m = 3, 4\ldots$$

Как известно [10], система функций y_m будет полной в L_2.

В силу определения x_n и y_m система функций φ_{nm} будет полной системой элементов из M в пространстве H_B. Из (2.5) и (2.7) следует, что $H_A \subset H_B$, так как для элементов H_A необходимо существование более высоких производных, чем для элементов H_B. Тогда система функций полна и в H_A. Кроме того, эта система ортонормирована в H_B, а значит она сильно минимальна в H_A, и метод Ритца (1.12) или эквивалентный ему метод Галёркина (1.13), применяемый ниже для решения задачи, будет устойчивым (13).

Будем искать решение в виде

$$\varphi_N = \sum_{n,m=1}^{N} A_{nm}\,x_n(\rho)\,y_m(\zeta)$$

Система уравнений (1.13) в этом случае примет вид (3.2)

$$\left(\lambda_n^2 + \frac{\nu_m^4}{\lambda_n^2}\right)A_{nm} + \sum_{k=1}^{N}\alpha_{km}A_{nk} + \nu_m^4\sum_{i=1}^{N}\beta_{ni}A_{im} = f_{n,m} \qquad (n, m = 1, \ldots, N)$$

Здесь

$$f_{n,m} = -c_n\int_0^l\int_{\rho_0}^1 Z_1(\lambda_n\rho)\,y_m(\zeta)\,f(\rho,\zeta)\,d\rho d\zeta$$

$$\beta_{ni} = \frac{1}{1-\rho_0^2}\left(\rho_0^2\frac{\delta_n\delta_i}{1-\mu} + \frac{\gamma_n\gamma_i}{1+\mu}\right) = \beta_{in}$$

$$\alpha_{mk} = \alpha_{km} = \pm\frac{16\,\nu_k^2\nu_m^2}{l(\nu_k^4 - \nu_m^4)}\left(\nu_k\frac{\sin\nu_k l}{1\pm\cos\nu_k l} - \nu_m\frac{\sin\nu_m l}{1\pm\cos\nu_m l}\right)$$

$$\alpha_{mm} = \pm\frac{2\nu_m\sin\nu_m l}{l(1\pm\cos\nu_m l)}\left(2 \pm \nu_m l\,\frac{\sin\nu_m l}{1\pm\cos\nu_m l}\right)$$

Знак плюс относится к случаю, когда k и m нечетны, знак минус, когда k и m четны. Если же k и m разной четности, то $\alpha_{km} = 0$. Последнее приводит к тому, что система уравнений (3.2) распадается на две независимые системы уравнений с меньшим числом неизвестных величин. Это значительно упрощает практическое применение системы уравнений (3.2). Легко видеть, что матрица коэффициентов при A_{ik} симметрична.

Рассмотрим пример на применение системы (3.2). Пусть на внутренней боковой поверхности цилиндра задана постоянная температура t_0, на внешней она равна нулю.

В этом случае решением уравнения теплопроводности будет $t = t_0 \ln \rho / \ln \rho_0$ По формулам (2.4) и (3.2) получим $f = -E\alpha t_0 / (1-\mu) \ln \rho_0$

$$f_{nm} = \delta_n \frac{4 \sin \nu_m l}{\nu_m \sqrt{l}\,(1 + \cos \nu_m l)} \frac{E\alpha t_0}{(1-\mu) \ln \rho_0}, \quad m = 2k+1, \quad f_{nm} = 0, \quad m = 2k$$
$$(k = 0, 1, 2 \ldots)$$

Пусть отношение внутреннего радиуса к внешнему $\rho_0 = 0.5$, длина цилиндра $L = 2R$, т. е. $l = 2$. Расчет проведем для $N = 2$. Из таблицы [14] определим корни уравнения (3.1). Им будут соответствовать значения $\lambda_1 = 6.393$, $\lambda_2 = 12.625$. Решая систему уравнений (3.2), получим

$$A_{11} = -0.0259\, E\alpha t_0, \qquad A_{21} = 0.00107\, E\alpha t_0, \qquad A_{12} = 0, \qquad A_{22} = 0$$

и, следовательно

$$\varphi_N = [A_{11} x_1(\rho) + A_{21} x_2(\rho)]\, y_1(\zeta)$$

Вычислим $\max \sigma_z$ и $\max \sigma_\theta$ при $\rho = \rho_0$, где они принимают небольшие значения

$$\max \sigma_z = \sigma_z(0.5,1) = -0.629\, E\alpha t_0, \qquad \max \sigma_\theta = \sigma_\theta(0.5,1) = -0.426\, E\alpha t_0$$

Значения напряжений при $\rho = \rho_0 = 0.5$, вычисленные по формулам для бесконечно длинного цилиндра [8], будут равны $\max \sigma_z = \max \sigma_\theta = -0.874\, E\alpha t_0$, так что $\max \sigma_\theta$ почти в два раза больше приведенного выше значения. Функция

$$\psi = \left[\left(\frac{\rho_0^2 \ln \rho_0}{16(1-\rho_0^2)} - \frac{3}{64}\right)\rho^4 - \frac{\rho_0^2 \ln \rho_0}{4(1-\rho_0^2)} \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{16} \rho^4 \ln \rho\right] f$$

есть решение уравнения (21) для данного примера, удовлетворяющее условиям (2.21). Тогда, согласно (2.10) и (2.17), получим

$$\sqrt{J(\varphi_n) + \Phi(\psi)} = \sqrt{J(\varphi_n) - \delta} = 0.065\, E\alpha t_0$$

т. е. погрешность в среднем для напряжений не превышает 20% их максимальных значений.

Поступила 1 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. Гостехиздат, 1950.
2. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.
3. Мартынюк А. Е. О некотором обобщении вариационного метода. ДАН СССР, 1957, т. 117, № 3.
4. Мартынюк А. Е. Некоторые новые приложения методов типа Галёркина. Матем. сб., 1959, т. 49, вып. 1.
5. Михлин С. Г. О сходимости одного прямого метода. УМН, 1960, т. XV вып. 1.
6. Ляшко А. Д. К обобщению метода Галёркина. Изв. вузов. Математика, 1958, № 4.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. V, Физматгиз, 1958.
8. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости, ОНТИ, 1937.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
10. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II, ГТТИ, 1933.
11. Слободянский М. Г. Оценка погрешности приближенных решений линейных задач. ПММ, 1953, т. 15, вып. 2.
12. Толстов Г. П. Ряды Фурье. Физматгиз, 1960.
13. Михлин С. Г. Некоторые условия устойчивости метода Ритца Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, № 13.
14. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.