Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАЕКТОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Р. З. Хасьминский

(Москва)

В работе [1] установлены критерии устойчивости решения $X(t) \equiv 0$ системы $dx/dt = f(X, t, Y(t, \omega))$, где $f(0, t, y) \equiv 0$, а $Y(t, \omega)$ марковский случайный процесс. Ниже исследуется задача устойчивости траектории марковского процесса при другом определении устойчивости и других предположениях относительно процесса. Рассматриваются лишь непрерывные марковские процессы диффузионного типа, для которых коэффициенты диффузии и переноса обращаются в нуль при $x = 0$. Получено необходимое и достаточное условие устойчивости таких процессов, аналогичное основной теореме второго метода Ляпунова. При этом для проверки этого условия достаточно знать коэффициенты диффузии и переноса в сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$. В работе исследуется также связь между устойчивостью системы обыкновенных уравнений и устойчивостью стохастической системы, полученной из нее добавлением диффузии. Показано на примере, что в случае, когда число уравнений в системе $n > 2$, то достаточно большая диффузия «сбивает» устойчивость, в случае же $n \leqslant 2$ устойчивость (асимптотическая) сохраняется.

§ 1. Постановка задачи. Предметом изучения в настоящей работе будет случайный марковский процесс, который можно описать (см., например, [2], стр. 247) стохастическим дифференциальным уравнением в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = b(X(t, \omega), t) + \sigma(X(t, \omega), t)\, \dot{\xi}(t, \omega) \tag{1.1}$$

$(X(t, \omega) = \{X_1(t, \omega), \ldots, X_n(t, \omega)\}, \qquad b(x, t) = \{b_1(x, t), \ldots, b_n(x, t)\})$ где $\sigma(x, t)$ — матрица $n \times n$, $\{\omega\} = \Omega$ — множество элементарных событий, а $\dot{\xi}(t, \omega)$ — n-мерный «белый шум».

Для того чтобы уравнение (1.1) имело решение $X(t, \omega) \equiv 0$, необходимо, чтобы $b(0, t) \equiv 0$ и $\sigma(0, t) \equiv ((0))$. Кроме того, как и в случае $\sigma(x, t) \equiv ((0))$, необходимо наложить условия на коэффициенты, при которых $X(t, \omega) \equiv 0$ будет с вероятностью 1 единственной траекторией, проходящей через точку $x = 0$. Эти условия приведены ниже.

Решением уравнения (1.1) является, как известно, марковский случайный процесс в n-мерном эвклидовом пространстве E_n с непрерывными траекториями $X(t, \omega)$. Этот марковский процесс, следуя [3], будем обозначать

$$X = \{X(t, \omega), P_{s,x}\}$$

Здесь $P_{s,x}(A)$ — обозначает вероятность события A при условии $X(s, \omega) = x$. Аргумент ω будем в дальнейшем опускать.

Определение. Траекторию $X(t) \equiv 0$ процесса X назовем устойчивой при $t \geqslant t_0$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant t_0$

$$\lim_{x \to 0} P_{s,x}\left\{\sup_{t > s} |X(t)| > \varepsilon\right\} = 0 \tag{1.2}$$

Другими словами, траектория $X(t) \equiv 0$ устойчива, если вероятность того, что $X(t)$ хотя бы один раз выйдет из ε-окрестности точки $x = 0$, может быть сделана сколь угодно малой, если положение траектории в начальный момент времени s выбрать достаточно близко к $x = 0$.

С процессом X связан дифференциальный оператор

$$L(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\| a_{ij}(t,x) \| = \sigma\sigma^*)$$

Здесь σ^* — матрица, транспонированная к .

Для установления связи приведенных ниже теорем с теоремами Ляпунова полезно иметь в виду, что для любой дважды непрерывно-дифференцируемой функции $u(t, x)$ выражение $Lu(t, x)$ можно рассматривать как среднее значение производной от функции $u(t, x)$ вдоль траекторий марковского процесса X, выходящих из точки x в момент времени t.

Из сказанного выше следует, что в рассматриваемом случае

$$b_i(t, 0) \equiv 0, \qquad a_{ij}(t, 0) \equiv 0 \tag{1.3}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, изучается однородный по времени процесс, для которого $L(t, x) \equiv L(x)$; при этом $P_{s,x}(\cdot) \equiv P_x(\cdot)$.

Введем обозначение

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = r$$

Необходимо несколько уточнить постановку задачи, так как уравнение (1.1) определяет единственный марковский процесс с непрерывными траекториями лишь при условии не слишком быстрого роста коэффициентов b_i и σ_{ij} при $|x| \to \infty$ и невырожденности квадратичной формы матрицы $\| a_{ij}(s, x) \|$.

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий.

1°. Все коэффициенты оператора L ограничены и достаточно гладки всюду в E_n, включая точку $x = $).

2°. Для некоторой непрерывной положительной при $x \neq 0$ функции $m(x)$ и при всех действительных λ_i выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geqslant m(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Из условия 1° и (1.3) следует, что

$$a_{ij}(x) = O(|x|^2), \qquad b_i(x) = O(|x|) \qquad (x \to 0) \tag{1.4}$$

При этих предположениях уравнение (1.1) (или оператор L) определяет единственный марковский процесс $X^{(m)}$ в области $U_m = \{|x| > 1/m\}$ до момента τ_m достижения границы Γ_m этой области.

В дальнейшем используются некоторые понятия теории марковских процессов, такие, как строгая марковость, часть процесса и т. д. Определение этих понятий см. в [3].

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1°, 2°. Тогда существует единственный строго марковский процесс в E_n с непрерывными траекториями и без исчезновения такой, что его часть в U_m совпадает с $X^{(m)}$.

Доказательство. Пусть X — какой-нибудь процесс, удовлетворяющий условиям леммы. Обозначим τ_0 — момент достижения точки $x = 0$ траекторией этого процесса и докажем сначала, что для $x \neq 0$

$$P_x \{\tau_0 < \infty\} = 0 \tag{1.5}$$

Ясно, что для $|x| > 1/m$

$$P_x \{\tau_0 < t\} \leqslant P_x \{\tau_m < t\} \tag{1.6}$$

Как известно (см. например, [4]), функция $v_m(t, x) = P_x \{\tau_m < t\}$ является единственным решением задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(x)\, v \tag{1.7}$$

удовлетворяющим условиям $v_m(t, x)|_{|x|=1/m} = 1$, $v_m(0, x) = 0$. Рассмотрим теперь функцию $w(t, x) = (t+1) r^{-\alpha}$; число $\alpha > 0$ будет выбрано ниже. Легко проверить, что

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) w = -r^{-\alpha} + \alpha \left[(\alpha + 2) r^{-\alpha-4} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \right.$$

$$\left. - r^{-\alpha-2} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) - r^{-\alpha-2} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) x_i \right]$$

Из (1.4) следует, что

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) w = -r^{-\alpha} + \alpha o(r^{-\alpha}) < 0$$

если α достаточно мало. При таком выборе α функция

$$w_m(t, x) = m^{-\alpha} w(t, x) - v_m(t, x)$$

удовлетворяет, очевидно, условиям:

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) w_m \leqslant 0, \qquad w_m(0, x) \geqslant 0, \qquad w_m(t, x)|_{|x|=1/m} \geqslant 0$$

Из принципа максимума следует, что

$$w_m(t, x) \geqslant 0 \qquad \text{для } t \geqslant 0,\ r = |x| \geqslant 1/m$$

Поэтому

$$P_x \{\tau_m < t\} \leqslant (t+1) r^{-\alpha} m^{-\alpha}$$

Отсюда и из (1.6) следует (1.5).

Заметим, что попутно доказана, по существу, единственность ограниченного решения задачи Коши для уравнения (1.7) в области $E_n \times \{t > 0\}$.

В самом деле, если u_1 и u_2 — два разных решения и $|u_i| < M$, то аналогично вышеизложенному легко убедиться, что

$$|u_1 - u_2| < (t+1)\, 2 M r^{-\alpha} m^{-\alpha}$$

в области $U_m \times \{t > 0\}$.

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим $u_1 \equiv u_2$. Аналогично устанавливается и единственность решения смешанной задачи.

Докажем теперь, что для любого процесса, удовлетворяющего условиям леммы

$$P_0 \{X(t) \equiv 0\} = 1 \tag{1.8}$$

Пусть A — множество $|x| = r \leqslant r_0$. Обозначим через τ_a — момент первого достижения траекторией процесса X границы множества A, а через τ_m — по-прежнему будем обозначать момент первого достижения $\Gamma_m = \{r = 1/m\}$ траекторией процесса. В силу строгой марковости процесса X получим

$$P_0\{\tau_a < t\} = \int\limits_{y \in \Gamma_m} \int\limits_{u=0}^{t} P_0\{\tau_m \in du,\ X(\tau_m) \in dy\} P_y\{\tau_a < t - u\} \qquad (1/m < r_0) \tag{1.9}$$

Функция $v(t, x) = P_x\{\tau_a < t\}$ удовлетворяет уравнению (1.6) в области $D(\{r < r_0\} \times \{t > 0\})$ и условиям $v(0, x) = 0$ и $v(t, x)|_{r=r_0} = 1$ (как было отмечено выше, такое решение единственно). После этого при помощи принципа максимума нетрудно убедиться, что

$$P_x\{\tau_a < t\} \leqslant \frac{r^\alpha}{r_0^\alpha}(t + 1) \quad \text{при } (t, x) \in D$$

если $\alpha > 0$ достаточно мало. Учитывая теперь (1.9), получим

$$P_0\{\tau_a < t\} \leqslant (t + 1)\, r_0^{-\alpha} m^{-\alpha}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим $P_0\{\tau_a < t\} = 0$ при $t > 0$, $r_0 > 0$, откуда следует (1.8). Очевидно, что из (1.5) и (1.8) вытекает утверждение леммы.

Во всем дальнейшем предполагается, что условия леммы 1 выполнены.

§ 2. Условия устойчивости. *Теорема 2.1.* Для устойчивости траектории $X(t) \equiv 0$ процесса X необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки $x = 0$ существовала непрерывная неотрицательная функция $V(x)$, обращающаяся в нуль лишь при $x = 0$, для которой $LV(x) \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Обозначим через $U_m^{(\varepsilon)}(x)$ решение задачи

$$Lu = 0 \quad \text{при } 1/m < r < \varepsilon$$
$$u_m^{(\varepsilon)}(x)|_{r=1/m} = 0, \qquad u_m^{(\varepsilon)}(x)|_{r=\varepsilon} = 1$$

Известно [4], что

$$u_m^{(\varepsilon)}(x) = P_x\{\sup|X(t)| > \varepsilon\ (0 \leqslant t \leqslant \tau_n)\}$$

Принимая во внимание (1.5), легко получим

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= P_x\{\sup|X(t)| > \varepsilon\ (0 \leqslant t < \infty)\} = \\ &= \lim_{m\to\infty} P_x\{\sup|X(t)| > \varepsilon\ (0 \leqslant t \leqslant \tau_m)\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что функция $u_\varepsilon(x)$ тоже удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ (как предел монотонной последовательности «гармонических» функций). Отсюда и из (1.2) сразу следует необходимость условий теоремы, так как в качестве V можно взять саму функцию $u_\varepsilon(x)$ (Из усиленного принципа максимума следует, что $u_\varepsilon(x) > 0$ всюду, кроме $x = 0$.)

Нетрудно установить и достаточность условий теоремы. В самом деле, из принципа максимума следует, что

$$u_m^{(\varepsilon)}(x) \leqslant \frac{V(x)}{\min_{|y|=\varepsilon} V(y)}$$

Переходя к пределу в этом неравенстве сначала при $m \to \infty$, а затем при $x \to 0$, получим (1.2). Теорема доказана.

Замечание. Для неоднородного по времени процесса, соответствующего оператору $L(t, x)$, можно доказать лемму 1 и аналог теоремы 1, если условие (1.3) выполнено равномерно по t. Отметим здесь лишь следующее достаточное условие устойчивости для этого случая.

Теорема 2.2. Для устойчивости траекторий $X(t) \equiv 0$ процесса $X = \{X(t), P_{s,x}\}$ достаточно, чтобы существовала определенно положительная в смысле [5] функция $V(s, x)$, для которой $\partial V / \partial s + L(s, x) V \leqslant 0$.

Теорема 2.1 удобна для установления устойчивости, но ее довольно трудно использовать для установления неустойчивости конкретного процесса. Поэтому дадим другое условие неустойчивости, которое легче проверять.

Теорема 2.3. Для неустойчивости траектории $X(t) \equiv 0$ процесса X достаточно существования в некоторой окрестности точки $x = 0$ функции $W(x)$ такой, что $W(x) \to \infty$ при $x \to 0$ и $LW \leqslant 0$ в любой точке этой окрестности, кроме самой точки $x = 0$.

Доказательство. Функция

$$u_m(x) = P_x \{\sup | X(t) | < \varepsilon \, (0 \leqslant t \leqslant \tau_m)\}$$

удовлетворяет при $1/m < | x | < \varepsilon$ уравнению $Lu_m = 0$ и условиям:

$$u_m(x) |_{r=1/m} = 1, \qquad u_m(x) |_{r=\varepsilon} = 0$$

Из принципа максимума следует, что

$$u_m(x) \leqslant \frac{W(x)}{\min_{|y|=1/m} W(y)} .$$

Поэтому

$$P_x \{\sup | X(t) | < \varepsilon \, (0 \leqslant t < \infty)\} = \lim_{m\to\infty} P_x \{\sup | X(t) | < \varepsilon \, (0 \leqslant t \leqslant \tau_m)\} \leqslant$$

$$\leqslant W(x) \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\min_{|y|=1/m} W(y)} = 0$$

Следовательно, $P_x \{\sup | X(t) | > \varepsilon \, (0 \leqslant t < \infty)\} = 1$ для $x \neq 0$; отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание. Из доказанного следует, что при условиях теоремы траектория $X(t) \equiv 0$ «равномерно неустойчива» в том смысле, что для любой начальной точки $x \neq 0$ частица уходит от положения равновесия с вероятностью единица.

Остановимся еще на одном определении устойчивости.

Определение. Траекторию $X(t) \equiv 0$ процесса $X = \{X(t), P_{s,x}\}$ назовем асимптотически устойчивой при $t \geqslant t_0$, если выполнено условие (1.2) и

$$\lim_{x\to 0} P_{s,x} \{\overline{\lim_{t\to\infty}} | X(t) | = 0\} = 1 \qquad \text{при } s \geqslant t_0$$

Можно показать, что для случая однородного по времени процесса, удовлетворяющего условиям § 1, из устойчивости траектории $X(t) \equiv 0$ следует ее асимптотическая устойчивость.

Для неоднородного процесса, это, вообще говоря, неверно, хотя достаточные условия асимптотической устойчивости можно привести и в этом случае.

§ 3. Устойчивость одномерного процесса. В этом параграфе предполагается, что процесс X описывается оператором

$$a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial}{\partial x} \text{ в } E_1$$

причем, в соответствии с предположениями § 1, ограничимся случаем, когда

$$a(x)=a_0x^2+o(x^2)\quad (a_0\geqslant 0),\qquad b(x)=b_0x+o(|x|)\quad \text{при } x\to 0$$

(В этом случае нетрудно выписать, впрочем, необходимые и достаточные условия устойчивости. Для этого нужно, чтобы точка $x=0$ была притягивающей и недостижимой для процесса при $x>0$ и при $x<0$ (см. [6]).)

Теорема 3.1. Траектория $X(t)\equiv 0$ процесса X устойчива (асимптотически) при $b_0<a_0$ и неустойчива при $b_0>a_0$.

Доказательство. 1) Пусть $b_0<a_0$; рассмотрим функцию $V(x)=|x|^\gamma$, где γ — некоторое положительное число, меньшее $1-b_0/a_0$.

Очевидно

$$LV=a_0x^2\gamma(\gamma-1)|x|^{\gamma-2}+b_0|x|\gamma|x|^{\gamma-1}+o(|x|^\gamma)=$$
$$=\gamma|x|^\gamma[a_0(\gamma-1)+b_0]+o(|x|^\gamma)<0$$

в достаточно малой окрестности точки $x=0$. Поэтому функция $V(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

2) Пусть $b_0>a_0$; можно проверить, что функция $W(x)=-\ln|x|$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из этой теоремы. Пусть, например, коэффициент диффузии $a(x)=o(x^2)$ (т. е. $a_0=0$).

Тогда из теоремы 3.1 видно, что асимптотическая устойчивость по первому приближению траектории $x(t)=0$ неслучайного процесса, описываемого уравнением

$$\partial x/dt=b(x) \tag{3.1}$$

гарантирует устойчивость случайного процесса X с тем же коэффициентом сноса $b(x)$, описываемого уравнением

$$dx/dt=b(X)+\sqrt{a(x)}\,\dot{\xi} \tag{3.2}$$

В случае же неустойчивости линейного приближения для процесса (3.1) в процессе (3.2) траектория $X(t)\equiv 0$ тоже неустойчива. Нетрудно привести примеры, показывающие, что при нейтральности первого приближения ($b_0=0$) для процесса (3.1), для процесса (3.2) может быть как устойчивость, так и неустойчивость.

Интересно отметить также, что неустойчивое (уже в линейном приближении) положение равновесия для процесса (3.1) переходит в устойчивое при наложении «случайности» $\sqrt{a(x)}\,\dot{\xi}$, если только $a_0>b_0$. Приведенные в следующем параграфе примеры показывают, что этот эффект, по-видимому, возможен лишь в одномерном случае.

§ 4. Примеры исследования устойчивости многомерных процессов. 1°. Пусть марковский процесс X соответствует оператору

$$L(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Предположим, что система

$$dx_i / dt = b_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

асимптотически устойчива в линейном приближении. Предположим, кроме того, что

$$a_{ij}(x) = o(|x|^2) \qquad (x \to 0) \tag{4.2}$$

Тогда нетрудно показать, что процесс X тоже устойчив (для одномерного случая это было сделано выше). В самом деле, известно ([7], стр. 62), что для системы (4.1) существует положительно-определенная квадратичная форма $V(x)$, для которой главная часть выражения

$$b_1(x)\, \partial V / \partial x_1 + \ldots + b_n(x)\, \partial V / \partial x_n$$

представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму $U(x)$. Поэтому, учитывая (4.2), получим

$$LV = U(x) + o(|x|^2) < 0$$

при достаточно малом $|x|$; это позволяет воспользоваться теоремой 2.1.

2°. Пусть оператор $L(x)$ имеет вид $(x \to 0)$

$$L_1(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} [b_i x_i + o(|x|)] \frac{\partial}{\partial x_i} + \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + o(|x|^2) \Big] \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{4.3}$$

причем все числа $b_i < 0$. Тогда очевидно, что система «без случайности» устойчива (асимптотически) в линейном приближении.

Рассмотрим вспомогательную функцию $V = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^\alpha$ (число α будет выбрано ниже). Очевидно

$$L_1 V = 2\alpha (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\alpha - 1} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + \\ + \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \Big] (n - 2 + 2\alpha) + o(|x|^2) \Big\}$$

Если $n \leqslant 2$, то ясно, что, выбирая $\alpha > 0$ достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства $L_1 V < 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ при любых числах a_{ij}. Если же $n > 2$, то нетрудно подобрать числа a_{ij} так, что $L_1 V < 0$ при некотором $\alpha < 0$. Применяя теперь теоремы 2.1 и 2.3, получим следующий вывод.

В случае $n = 2$, $b_i < 0$, траектория $X(t) \equiv 0$ устойчива для процесса, соответствующего оператору (4.3), при любых значениях коэффициентов a_{ij}. В случае же $n > 2$ этот процесс устойчив при достаточно малых a_{ij} и неустойчив при достаточно больших.

3°. Рассмотрим систему

$$\frac{dX_1}{dt} = X_2 + \sigma(X_1, X_2)\, \dot{\xi}_1, \qquad \frac{dX_2}{dt} = -X_1 + \sigma(X_1, X_2)\, \dot{\xi}_2$$

Ясно, что положение равновесия этой системы при отсутствии случайных возмущений ($\sigma(x_1, x_2) \equiv 0$) устойчиво, но не асимптотически.

Введем обозначение

$$L_2(x) \equiv x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma^2(x_1, x_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$$

Ясно, что $L_2 W = 0$, если $W = -\ln(x_1^2 + x_2^2)$ и поэтому $W(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, если только $\sigma(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Поэтому траектория $X(t) \equiv 0$ для этого процесса неустойчива.

Этот пример показывает, что неасимптотическая устойчивость системы «без случайности» может перейти в неустойчивость при добавлении членов с диффузией сколь угодно высокого порядка малости при $x \to 0$

Остановимся в заключение на некоторых задачах.

1. Могут представить интерес случаи, когда оператор $L(x)$ вырождается не в отдельных точках, а на целом многообразии меньшего чем n числа измерений. Тогда возникает задача об устойчивости множества траекторий, расположенных на этом многообразии. Нетрудно видеть, что теоремы § 2 можно модифицировать применительно к этому случаю. Отметим также, что именно такой случай (при другом определении устойчивости и при других предположениях) рассмотрен в интересной работе [1], под влиянием которой возникла и настоящая заметка.

2. Выше показано, что (4.2) и асимптотическая устойчивость линейного приближения для системы (4.1) гарантируют устойчивость процесса X. Вероятно, можно доказать, что из (4.2) и неустойчивости линейного приближения (4.1) следует неустойчивость процесса X. (Для одномерного случая это доказано в § 3.) Нам кажется, что для доказательства этого утверждения необходимо получить эффективное достаточное условие неустойчивости, которое можно было бы применять в более широком классе случаев, чем теорему 2.3.

3. Из приведенных примеров ясно, что во многих случаях решение вопроса об устойчивости процесса X, соответствующего оператору

$$L(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

сводится к тому же вопросу для процесса «первого приближения» X°, описываемого оператором

$$L^\circ(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\circ(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^\circ(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

где $a_{ij}^\circ(x)$ — квадратичные, а $b_i^\circ(x)$ — линейные формы, являющиеся первыми ненулевыми членами разложения коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Было бы интересно получить достаточно общие критерии устойчивости и неустойчивости процесса X°.

Поступила 28 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV вып. 5.
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., ИИЛ, 1956.
3. Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов. М., Физматгиз. 1959.
4. Хасьминский Р. З. Вероятностное представление решений некоторых дифференциальных уравнений. Тр. VI Всесоюзн. совещания по теории вероятностей в Вильнюсе, 1962.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.,— Л., 1950.
6. Feller W. Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, 1—31.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.— Л., Гостехтеоретиздат. 1952.