Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАЦИОНАРНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ АРГУМЕНТА. ИРРЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

К. Г. Валеев

(Ленинград)

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с периодическими и почти периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Построение изображения по Лапласу приводит к решению линейных диофантовых уравнений. Члены ряда, определяющего изображение, образуют полугруппу, для которой установлен изоморфизм с полугруппой некоторых обобщенных чисел.

Этот изоморфизм облегчает вычисления и позволяет исследовать устойчивость квазистационарных уравнений. В частности, приведен асимптотический критерий устойчивости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с почти периодическими коэффициентами.

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений [1]

$$\sum_{q=0}^{l} e^{-\alpha_q t}\left(A_{qn} \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-h}^{0} dA_{qk}(\vartheta) \frac{d^k Y(t+\vartheta)}{dt^k} \right) = \Phi(t) \tag{1.1}$$

Здесь Y — m-мерный вектор, A_{qn} — постоянные $m \times m$-матрицы, удовлетворяющие условиям

$$A_{on} = E, \qquad \sum_{q=1}^{l} | A_{qn} | < 1 \tag{1.2}$$

где E — единичная матрица, $|A|$ — символ нормы (1.2) матрицы A. Число l предполагаем конечным.

Элементы $a_{sj}^{qk}(\vartheta)$ матрицы $A_{qk}(\vartheta) = \| a_{sj}^{qk}(\vartheta) \|_1^m$ предполагаются функциями ограниченной вариации [2], на $[-h, 0]$, $(h > 0)$. Интегралы в (1.1) понимаются как интегралы Стильтьеса [2]. Предполагаем[1]

$$\alpha_0 \equiv 0, \qquad \operatorname{Re} \alpha_q \equiv 0 \qquad (q = 1, \ldots, l) \tag{1.3}$$

Среди чисел $\operatorname{Im} \alpha_q$ могут быть рационально несоизмеримые. Пусть изображением вектора $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ будет вектор $Q(p)$, регулярный и ограниченный при $\operatorname{Re} p \geqslant b = \mathrm{const}$. Ищем при $t > 0$ решение $Y(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям при $t \in [-h, 0]$

$$Y(t) = Y_0^{(0)}(t), \ \ldots, \ d^{n-1} Y(t) / dt^{n-1} = Y_0^{(n-1)}(t) \tag{1.4}$$

---

[1] Общий случай $\operatorname{Re} \alpha_q \geqslant 0$ в (1.1) может быть сведен к случаю (1.3).

Здесь векторы $Y_0^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ достаточно предполагать абсолютно интегрируемыми на $[-h, 0]$. Векторы $Y(t), \ldots, d^{n-1}Y(t) / dt^{n-1}$ предполагаются непрерывными справа в точке $t = 0$.

Обозначим через $F(p)$ изображение $Y(t)$ по Лапласу [3]

$$F(p) = \int_0^\infty Y(t) e^{-pt} dt \tag{1.5}$$

Умножая систему (1.1) на e^{-pt} и интегрируя по t в пределах от 0 до $+\infty$, получим для вектора $F(p)$ систему линейных разностных уравнений (1.4)

$$F(p) = \sum_{q=1}^{l} K_q(p) F(p + \alpha_q) + \Omega(p) \tag{1.6}$$

Здесь введены следующие обозначения [1]

$$K_q(p) = -L_0^{-1}(p) L_q(p + \alpha_q), \qquad \Omega(p) = L_0^{-1}(p) R(p) \tag{1.7}$$

Матрицы $L_q(p)$, вектор $R(p)$ известны [1]

$$L_q(p) = A_{qn}p^n + \sum_{k=0}^{n-1} p^k \int_{-h}^{0} e^{p\vartheta} dA_{qk}(\vartheta) \qquad (q = 0, 1, \ldots, l) \tag{1.8}$$

$$R(p) = Q(p) + \sum_{q=0}^{l} A_{qn} \sum_{j=0}^{n-1} Y_0^{(j)}(0)(p + \alpha_q)^{n-j-1} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{l} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \int_{-h}^{0} e^{(p+\alpha_q)\vartheta} dA_{qk}(\vartheta) Y_0^{(j)}(0)(p + \alpha_q)^{k-j-1} -$$

$$- \sum_{q=0}^{l} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-h}^{0} \int_{t}^{0} e^{(p+\alpha_q)(\vartheta - t)} dA_{qk}(\vartheta) Y_0^{(k)}(t) dt \tag{1.9}$$

Отметим важнейшие свойства $L_q(p)$, $\Omega(p)$; а именно

$$p^{-n} L_q(p) \to A_{qn}, \quad \Omega(p) \to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re} p \to +\infty \tag{1.10}$$

Это стремление равномерное по $\operatorname{Im} p$. Из (1.2) следует, что при $\operatorname{Re} p \geqslant b$, где b — достаточно большое число, решение $F(p)$ уравнений (1.6) может быть получено методом последовательных приближений ([2], (стр. 45)). Это дает [1]

$$F(p) = \Omega(p) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{q_j = 1, \ldots, l} K_{q_1}(p) K_{q_2}(p + \alpha q_1) \times K_{q_3}(p + \alpha q_1 + \alpha q_2) \times$$

$$\times \ldots \times K_{q\sigma}(p + \alpha q_1 + \alpha q_2 + \ldots + \alpha q_{\sigma-1}) \, \Omega(p + \alpha q_1 + \alpha q_2 + \ldots + \alpha q_\sigma) \tag{1.11}$$

Ряд (1.11) для $F(p)$ сходится при $\operatorname{Re} p \geqslant b$. Оригинал $Y(t)$, найденный из ряда (1.11), будет являться рядом сходящимся абсолютно и равномерно при $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$. Для системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами этот ряд будет несущественно отличаться от ряда, полученного в работе [3]. Ряд (1.11) и его оригинал не дают возможности непосредственно решить вопрос об устойчивости решений (1.1).

2. В этом пункте указана связь между исследованием системы (1.1) и линейными диофантовыми уравнениями.

Сопоставим взаимооднозначным образом обобщенное число $[\chi, \sigma]$ (χ, σ — целые неотрицательные числа) произведению матриц (1.7) вида

$$K_{q_1}(p)\, K_{q_2}(p + \alpha_{q_2})\, K_{q_3}(p + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2}) \ldots K_{q_\sigma}(p + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \ldots + \alpha_{q_\sigma}) \tag{2.1}$$

$$\chi = (q_1 - 1) + (q_2 - 1)\, l + (q_3 - 1)\, l^2 + \ldots + (q_\sigma - 1)\, l^{\sigma-1}$$
$$\chi \leqslant l^\sigma - 1 \tag{2.2}$$

Единичной матрице E сопоставим число $[0, 0]$. Это соответствие будем обозначать стрелкой $\leftrightarrow$, так имеем: $K_2(p)\, K_1(p + \alpha_2) \leftrightarrow [1, 2]$.

Указанное соответствие (изоморфизм) будет взаимооднозначным, так как любое целое число χ можно единственным образом представить в l-значной системе счисления. Сумме или разности произведений матриц вида (2.1) сопоставим соответствующие им числа $[\chi, \sigma]$, соединенные знаком плюс или минус.

Пример 2.1. Найдем матрицу, соответствующую сумме

$$[4,2] + [1,2] + [14,2] + [11,2] + \ldots \qquad (l = 4) \tag{2.3}$$

Представляя числа 4, 1, 14, 11 в четверичной системе счисления, получим из (2.1), (2.2)

$$K_1(p)\, K_2(p + \alpha_1) + K_2(p)\, K_1(p + \alpha_2) + K_3(p)\, K_4(p + \alpha_3) + K_4(p)\, K_3(p + \alpha_4) + \ldots \tag{2.4}$$

Чтобы сохранить соответствие (2.1), (2.2), следует определить закон умножения чисел $[\chi, \sigma]$ следующим некоммутативным образом:

$$[\chi_1, \sigma_1]\, [\chi_2, \sigma_2] = [\chi_1 + \chi_2 l^{\sigma_1}, \sigma_1 + \sigma_2] \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что любое число $[\chi, \sigma]$ ($\sigma > 0$), соответствующее (2.1), можно представить в виде произведения

$$[\chi, \sigma] = [q_1 - 1, 1]\, [q_2 - 1, 1] \ldots [q_\sigma - 1, 1] = \left[\sum_{k=1}^{\sigma} (q_k - 1)\, l^{k-1}, \sigma\right] \tag{2.6}$$

Каждому числу $[\chi, \sigma]$ сопоставим числа $[\chi, \sigma]^{(\gamma)}$ вида

$$[\chi, \sigma]^{(\gamma)} = \left[\sum_{k=1}^{\sigma-\gamma} (q_k - 1)\, l^{k-1}, \sigma - \gamma\right] \qquad (\gamma = 1, \ldots, \sigma-1) \tag{2.7}$$

Эти числа будем называть производными числами для $[\chi, \sigma]$. По определению полагаем

$$[\chi, \sigma]^{(0)} \equiv [\chi, \sigma], \qquad [\chi, \sigma]^{(\sigma)} \equiv [0, 0] \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию $\alpha([\chi, \sigma])$, определенную следующим образом для числа $[\chi, \sigma]$, соответствующего (2.1)

$$\alpha([\chi, \sigma]) = \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \ldots + \alpha_{q_\sigma}, \qquad \alpha([0, 0]) \equiv 0 \tag{2.9}$$

Из определения умножения (2.5) и выраженная (2.9) для функции α следует основное свойство $\alpha([\chi, \sigma])$:

$$\alpha([\chi_1, \sigma_1]\ [\chi_2, \sigma_2]) = \alpha([\chi_2, \sigma_1]) + \alpha([\chi_2, \sigma_2]) \tag{2.10}$$

Из (2.7), (2.10) следует, что каждое из чисел $\alpha([\chi, \sigma]^{(\gamma)})$ $(\gamma = 0, 1, \ldots, \sigma)$ может отличаться от соседнего только на величину α_q $(q = 1, \ldots, l)$.

Упорядочим множество чисел вида

$$\alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_l} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_l\alpha_l \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

Считаем, что число $\alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_l}$ предшествует числу $\alpha_{k_1', k_2', \ldots, k_l'}$, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_l < k_1' + k_2' + \ldots + k_l'$, а при $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k_1' + k_2' + \ldots + k_l'$, если положительна первая отличная от нуля разность $k_1 - k_1', k_2 - k_2', \ldots, k_l - k_l'$. Среди этих чисел (2.11) могут быть одинаковые по числовому значению, поэтому занумеруем их заново без повторений и пропусков числовых значений и сохранив порядок следования. Обозначим их β_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, $\beta_0 = 0$.

Рассмотрим сумму s_r всех различных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha([\chi, \sigma]) = \beta_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

Из (2.9) видно, что (2.12) является линейным диофантовым уравнением, а $[\chi, \sigma]$ согласно (2.2) зависит от порядка следования чисел α_q.

Соответствующую s_r сумму матриц вида (2.1) будем обозначать $S_r(p)$, $S_r(p) \leftrightarrow s_r$. Используя эти обозначения, ряд (1.11) можно записать в виде

$$F(p) = \sum_{r=0}^{\infty} S_r(p)\, \Omega(p + \beta_r) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} S_r(p)\, L_0^{-1}(p + \beta_r)\, R(p + \beta_r) \tag{2.13}$$

3. Изучим отдельно матрицу $S_0(p)\, L_0^{-1}(p)$. В следующем пункте показано, что особенности этой матрицы могут определять асимптотическое поведение решений $Y(t)$ системы (1.1). Для наиболее важного случая вещественных коэффициентов уравнения (1.1) для каждого числа $\alpha_q \neq 0$ найдется ему противоположное $\alpha_{q'} = -\alpha_q$, $(\operatorname{Re} \alpha_q = 0)$. Это приведет к тому, что в сумму $S_r(p)$ будут входить слагаемые — произведение матриц вида (2.1), имеющие полюсы сколь угодно высокого порядка в точках $p = p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$. Здесь обозначено

$$p_{k_0, k_1, \ldots, k_l} = \rho_{k_0} - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \ldots - k_l\alpha_l$$
$$(k_q = 0, 1, 2, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots, l) \tag{3.1}$$

Числа $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ являются корнями уравнения

$$\operatorname{Det} L_0(p) = 0 \tag{3.2}$$

Это следует из (1.11) и определения (1.7) для $K_q(p)$. Счетное множество $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ можно расположить в порядке невозрастания их вещественных частей

$$\operatorname{Re} \rho_0 \geqslant \operatorname{Re} \rho_1 \geqslant \operatorname{Re} \rho_2 \geqslant \ldots, \qquad \operatorname{Re} \rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение (2.12), определяющее s_0

$$\alpha([\chi, \sigma]) = 0 \qquad (3.4)$$

Если число $[\chi_1, \sigma_1] \in s_0$ (т. е. число $[\chi_1, \sigma_1]$ входит в сумму s_0) и $[\chi_2, \sigma_2] \in s_0$, то из (2.10) имеем, что $[\chi_1, \sigma_1]\,[\chi_2, \sigma_2] \in s_0$. Это значит, что решения $[\chi, \sigma]$ уравнения (3.4) образуют мультипликативную полугруппу [5], которую обозначим через W. Полугруппа W является подполугруппой всей мультипликативной группы [5] чисел $[\chi, \sigma]$ с законом умножения (2.5).

Число $[\chi, \sigma] \in s_0$ будем называть простым решением уравнения (3.4), если $\alpha([\chi, \sigma]^{(\gamma)}) \neq 0$ $(\gamma = 1, \ldots, \sigma - 1)$. Сумму всех простых решений $[\chi, \sigma]$ уравнения (3.4) обозначим через s_0^*.

Число $[\chi, \sigma] \in s_0$ будем называть составным решением уравнения (3.4), если среди чисел $\alpha([\chi, \sigma]^{(\gamma)})$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, \sigma - 1)$ есть нули. Всякое составное решение уравнения (3.4) может быть единственным образом представлено в виде произведения двух, трех и т. д. простых решений уравнения (3.4). Число $[0, 0]$ по определению считаем составным. Чем больше простых решений содержит в своем разложении число $[\chi, \sigma]$, тем больше мероморфных множителей $L_0^{-1}(p)$ в (2.1), тем больше порядок полюсов выражения (2.1) в точках $p = \rho_j$, определенных из (3.2). Матрицы (2.1), соответствующие простым решениям s_0^*, содержат лишь один множитель $L_0^{-1}(p)$.

Можно сказать, что числа, входящие в s_0^* и $[0, 0]$, составляют порождающее множество ([5], (стр. 139)) полугруппы W. Все решения $[\chi, \sigma]$ уравнения (3.4), входящие в s_0, можно получить следующим образом из порождающего множества s_0^*

$$s_0 = [0, 0] + s_0^* + s_0^* s_0^* + s_0^* s_0^* s_0^* + \ldots = [0, 0] + s_0^* s_0 \qquad (3.5)$$

Для соответствующих матричных выражений получаем

$$S_0(p) = F + S_0^*(p) S_0(p), \qquad S(\rho) = (E - S_0^*(p)]^{-1} \qquad (3.6)$$

Введем обозначение — матрицу $D(p)$, — используя (1.8)

$$D(p) = L_0(p) - L_0(p) S_0^*(p) \qquad (3.7)$$

Имеем, что $S_0(p) L_0^{-1}(p) = D^{-1}(p)$. Из предыдущих рассуждений получим для $S_0^*(p)$ разложение вида (1.11)

$$S_0^*(p) = \sum_{\sigma=2}^{\infty} \sum_{\varkappa_\sigma} K_{q_1}(p) K_{q_1}(p + \alpha_{q_1}) \ldots K_{q_\sigma}(p + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_{\sigma-1}}) \qquad (3.8)$$

Здесь $\varkappa_\sigma$ — обозначение для выражения $q_1, q_2, \ldots, q_l = 1, 2, \ldots, l$, где q_j удовлетворяют условиям

$$\alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \ldots + \alpha_{q_\sigma} = 0 \qquad (3.9)$$

$$0 \overline{\in} \{\alpha_{q_1}, \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2}, \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \alpha_{q_3}, \ldots, \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \ldots + \alpha_{q_{\sigma-1}}\} \qquad (3.10)$$

В случае $\alpha_1 = -\alpha_2$ $(l = 2)$ в (1.1) теория обобщенных чисел $[\chi, \sigma]$ применена в работе [6] для полного аналитического продолжения $F(p)$ в (1.11) на всю комплексную плоскость p.

4. Применим результат п. 3 к исследованию устойчивости системы уравнений более простой, чем (1.1) с малым параметром μ

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-h}^{0} dA_{0k}(\vartheta,\mu)\frac{d^kY(t+\vartheta)}{dt^k}+$$

$$+\mu\sum_{q=1}^{l}e^{-\alpha_q t}\left(A_{qn}(\mu)\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-h}^{0} dA_{qk}(\vartheta,\mu)\frac{d^kY(t+\vartheta)}{dt^k}\right)=0 \quad (4.1)$$

Элементы матриц $A_{qk}(\vartheta,\mu)$ предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями μ при $0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$. При $\mu=0$ система уравнений (4.1) вырождается в систему уравнений с постоянными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. В ряде (2.13), (1.11) исчезают все члены, за исключением мероморфной матрицы $S_0(p)L_0^{-1}(p)R(p)|_{\mu=0}$. Матрица $S_0(p)\equiv E$ при $\mu=0$. Вектор $R(p)$ (1.9) имеет элементами целые функции $Q(p)\equiv 0$. При достаточно малых значениях $\mu>0$ полюсы с коэффициентами в главных частях разложения в полюсах может иметь лишь матрица $S_0(p)L_0^{-1}(p)$. Из (3.6), (3.7) следует, что сами полюсы, определяющие асимптотическое поведение решений системы (4.1), можно найти из уравнения

$$\operatorname{Det} D(p)\equiv\operatorname{Det}(L_0(p)-L_0(p)S_0^*(p))=0 \quad (4.2)$$

Входящие в (4.2) матрицы определены в (1.8), (3.8).

Форма уравнения (4.2) без дополнительных преобразований пригодна для отыскания корней уравнения (4.2) в одном важном частном случае.

Пусть $\rho_0(\mu)$, $\rho_1(\mu)$, $\rho_2(\mu)$, ... — корни уравнения (3.2), составленного для системы (4.1). Они предполагаются непрерывными при $0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$.

Пусть для одного из этих корней $\rho^*(\mu)$ выполнено условие

$$\rho_k(0)-\rho^*(0)\neq\beta_r \qquad (r=1,2,\ldots,\ k=0,1,2,\ldots) \quad (4.3)$$

Из (3.8) следует, что особые точки членов ряда $L_0(p)S_0^*(p)$ могут находиться лишь в точках

$$p_{k,r}=\rho_k(\mu)-\beta_r \qquad (k=0,1,2,\ldots,r=1,2,3,\ldots) \quad (4.4)$$

где $\beta_r\neq 0$ при $r\neq 0$. Если числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ имеют общую меру, т. е. $\alpha_q=n_q\theta i$, $\operatorname{Im}\theta=0$, n_q — целые числа, то $|\beta_r|\geqslant\theta>0$ $(r=1,2,\ldots)$. Поэтому при достаточно малых $\mu_2\geqslant\mu>0$, $\varepsilon>0$ матрица $L_0(p)S_0^*(p)$ будет аналитической в круге $|p-\rho^*(0)|\leqslant\varepsilon$ и сколь угодно мала по норме. Ряд (3.8) будет абсолютно и равномерно сходиться при $|p-\rho^*(0)|\leqslant\varepsilon$, $0<\mu\leqslant\mu_2$. Уравнение (4.2) будет иметь в круге $|p-\rho^*(0)|\leqslant\varepsilon$ столько корней, какова была кратность корня $\rho^*(0)$. Эти корни при $\mu\to 0$ стремятся к $\rho^*(0)$.

Если среди чисел $i\alpha_1, i\alpha_2,\ldots,i\alpha_l$ есть рационально несоизмеримые, то $\lim|\beta_r|=0$ при $r\to+\infty$. В ряде чисел $L_0(p)S_0^*(p)$ слагаемые будут иметь полюсы, сколь угодно близко расположенные к $\rho^*(0)$ при любом $\mu\neq 0$. Поэтому ряд (3.8) для $L_0(p)S_0^*(p)$ будет расходиться в круге $|p-\rho^*(0)|\leqslant\varepsilon$ при любых $\mu>0$, $\varepsilon>0$.

Тем не менее, частная сумма (3.8) для ряда $L_\theta(p) S_0^*(p)$ от $\sigma = 2$ до $\sigma = \sigma_0 < \infty$ является голоморфной в круге $|p - p^*(0)| \leqslant \varepsilon$ при достаточно малых значениях $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ и любом $\sigma_0 \geqslant 2$. Это дает возможность разложения корней уравнения (4.2) в формальные ряды по возрастающим степеням μ (при аналитической зависимости коэффициентов системы (4.1) от μ при $|\mu| < \mu_1$).

Для системы уравнений (6.1) без запаздывания аргумента из работы [7] следует асимптотический характер этих разложений при $\mu \to 0$.

В более общем случае системы (4.1) со стационарными запаздываниями аргумента всегда удается разложить корни уравнения (4.2) в формальные ряды по возрастающим степеням μ (эти ряды обычно расходятся при $\mu \neq 0$), асимптотический характер этих разложений при $\mu \to 0$ в определении устойчивости решений еще не доказан.

Пример 4.1. Найдем характеристический показатель решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu^2 c \frac{dy(t-\tau)}{dt} + (\omega^2 + 2\mu\cos 2t)\, y(t) = 0 \tag{4.5}$$

где $\omega \neq k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, $c > 0$, $\tau > 0$. Из (1.8) имеем

$$L_0(p) = p^2 + \mu^2 c p e^{-p\tau} + \omega^2, \quad L_1(p) = L_2(p) = \mu, \; l = 2, \; \alpha_1 = -\alpha_2 = 2i \tag{4.6}$$

Уравнение (4.2), (3.8) принимает вид

$$p^2 + \omega^2 + \mu^2 c p e^{-p\tau} - \frac{\mu^2}{(p+2i)^2 + \omega^2} - \frac{\mu^2}{(p-2i)^2 + \omega^2} + O(\mu^4) = 0 \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.7) находим приближенное значение p

$$p = i\omega + \frac{i\mu^2}{4\omega(1-\omega^2)} + \frac{i\mu^2 c \sin\tau\omega}{2} - \frac{\mu^2 c \cos\tau\omega}{2} + O(\mu^4) \tag{4.8}$$

При достаточно малых значениях $|\mu|$ решения (4.5) асимптотически устойчивы при

$$c\cos\tau\omega > 0 \tag{4.9}$$

и неустойчивы при $c\cos\tau\omega < 0$.

Пример 4.2. Найдем приближенное уравнение границы области неустойчивости решений дифференциального уравнения с почти периодическими коэффициентами и запаздывающим аргументом

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu c \frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) + 2\mu \sum_{q=1}^{l} b_q \cos\omega_q t\, y(t - \tau_q) = 0 \tag{4.10}$$

Здесь $c > 0$, $\mu > 0$, $\lambda \approx 0$, $\mu \approx 0$; c, λ, $\omega_q > 0$, $\tau_q \geqslant 0$ — вещественные числа. Из (1.8) получаем

$$L_0(p) = p^2 + \mu c p + \lambda, \qquad L_{2q-1}(p) = L_{2q}(p) = \mu b_q \exp(-\tau_q p) \tag{4.11}$$

Уравнение (4.2) принимает вид

$$p^2 + \mu c p + \lambda - \mu^2 \sum_{q=1}^{l} \left(\frac{b_q^2 \exp[-\tau_q(2p + i\omega_q)]}{(p+i\omega)^2} + \frac{b_q^2 \exp[-\tau_q(2p - i\omega_q)]}{(p-i\omega)^2} \right) + O(\mu^3) = 0 \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) имеет два корня p_1, p_2, обращающихся в нуль при $\mu \to 0$, $\lambda \to 0$. Левая часть уравнения (4.12) вещественна при вещественном p и $\mathrm{Re}\, p_1 \neq \mathrm{Re}\, p_2$. Поэтому на границе области неустойчивости $p = 0$.

Получаем уравнение границы [1]

$$\lambda = -2\mu^2 \sum_{q=1}^{l} b_q^2 \omega_q^{-2} \cos(\omega_q \tau_q) + O(\mu^3) \tag{4.13}$$

Пример 4.3. Найдем приближенное выражение для характеристических показателей системы уравнений

$$\frac{dY(t)}{dt} = A + 2\mu \sum_{q=1}^{l} B_q \cos \omega_q t Y(t - \tau_q) = 0 \tag{4.14}$$

Здесь $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — диагональная матрица, $\operatorname{Re} a_q \neq \operatorname{Re} a_s \ (q \neq s)$, $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_l$ — вещественные числа. Положим $\alpha_{2q-1} = -\alpha_{2q} = i\omega_b$ $(q = 1, \ldots, l)$ в (4.1). Из (1.8) (4.14) получим

$$L_0(p) = Ep - A, \qquad L_{2q-1}(p) = L_{2q}(p) = -\mu B_q e^{-p\tau_q} \tag{4.15}$$

Уравнение (4.2), (3.8) имеет вид (4.16)

$$\operatorname{Det}\left(L_0(p) - L_0(p) \sum_{q=1}^{n} (K_{2q-2}(p) K_{2q}(p + \omega_q i) + K_{2q}(p) K_{2q-1}(p - \omega_q i))\right) + O(\mu^4) = 0$$

Из (1.7), (4.15), (4.16) получаем приближенные выражения корней уравнения (4.16), близких к a_q, $\operatorname{Im} a_q = 0$

$$p = a_k + 2\mu^2 \sum_{s=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} b_{ks}^{(q)} b_{sk}^{(q)} \frac{(a_k - a_s)\cos \tau_q \omega_q - \omega_q \sin \tau_q \omega_q}{(a_k - a_s)^2 + \omega_q^2} + O(\mu^3) \tag{4.17}$$

Здесь $b_{ks}^{(q)}$ — элементы матрицы B_q, $B_q = \| b_{ks}^{(q)} \|_1^m$.

5. Рассмотрим случай, когда в (1.1) будет $\alpha_0 \equiv 0$, $\alpha_q = n_q \theta i$ $(q = 1, \ldots, l)$, n_q — целые числа, т. е. рассматривается случай линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Для этих уравнений пригоден полностью метод статьи [4]. Приведем важнейшие выводы, следующие из [4].

Теорема 5.1. Пусть $\alpha_0 \equiv 0$, $\alpha_q = n_q \theta i$ $(q = 1, 2, \ldots, l)$, n_q — целые числа. В этом случае изображение (1.5) для $F(p)$ для решения $Y(t)$ системы (1.1) аналитически продолжимо на всю комплексную плоскость p. Компоненты вектора $F(p)$ являются мероморфными функциями p регулярными и ограниченными при достаточно большой $\operatorname{Re} p$. Полюсы $F(p)$ расположены в точках p_{jk} вида

$$p_{jk} = p_j + k\theta i \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{5.1}$$
$$(\operatorname{Re} p_j \to -\infty \text{ при } j \to +\infty)$$

Теорема 5.2. Общее решение однородной ($\Phi(t) \equiv 0$) системы уравнений (1.1) с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента ($\alpha_0 \equiv 0$, $\alpha_q = n_q \theta i$, n_q — целые числа) при выполнении условий (1.2) всегда может быть представлено в виде асимптотического ряда при $t \to +\infty$.

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{p_j t} [B_{j_0}(t) + t B_{j_1}(t) + \ldots + t^{\delta_j} B_{j\delta_j}(t)] \tag{5.2}$$
$$(\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \operatorname{Re} p_3 \geqslant \ldots, \quad \operatorname{Re} p \to -\infty \text{ при } j \to +\infty)$$

Векторы $B_{jk}(t)$ регулярны в некоторой полосе вдоль вещественной оси t и периодичны с периодом $2\pi\theta^{-1}$. Если $\operatorname{Re} p^* > \operatorname{Re} p_r$, то

$$\left\{Y(t) - \sum_{j=1}^{r} e^{p_j t}\left[B_{j0}(t) + tB_{j1}(t) + \ldots + t^{\delta_j} B_{j\delta_j}(t)\right]\right\} e^{-p^* t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (5.3)$$

В частном случае теорема 5.2 доказана в работе [6].

Зимечание 5.1. Ряд (3.8) в (4.2) можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость p, пользуясь работой [4] (стр. 595, лемма 7.1).

Замечание 5.2. Для системы (4.1), в коэффициенты которой входит регулярно μ при $|\mu| \leqslant \mu$, корни уравнения (4.2) разлагаются в ряды по возрастающим, в общем случае дробным, степеням μ, сходящиеся при $0 < |\mu| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Эти ряды могут содержать отрицательные степени μ. Пусть при $\mu = 0$ система дифференциальных уравнений (4.1) не содержит членов с запаздыванием аргумента и имеет характеристические показатели p_j^0 $(j = 1, 2, \ldots, m \times n)$. При достаточно малых значениях $|\mu| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ характеристические показатели $p_j(\mu)$, имеющие наибольшую вещественную часть, будут сколь угодно близки к p_j^0. Функции $p_j(\mu)$ уже ограничены при $|\mu| \leqslant \varepsilon$. Если для p_j^0 выполнено условие

$$p_j^0 - p_h^0 \neq k\theta \qquad (h = 1, \ldots, m \times n, h \neq j,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (5.4)$$

то $dp_j(\mu)/d\mu = 0$ при $\mu = 0$.

6. В этом пункте метод работы [4] обобщается для уравнений с почти периодическими коэффициентами и запаздывающим аргументом.

Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_\eta$, $k_0, k_1, \ldots, k_\xi$ — целые неотрицательные числа. Введем матрицы-функции $S(p)$, определяемые матричными рядами ([4], (стр. 590)) вида

$$S_{k_0, k_1, \ldots, k_\xi}^{r_0, r_1, \ldots, r_\eta}(p) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{\varkappa_\sigma} K_{q_1}(p + \beta_{k_0}) K_{q_2}(p + \beta_{k_0} + \alpha_{q_1}) \times$$
$$\times K_{q_3}(p + \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2}) \ldots K_{q_\sigma}(p + \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_{\sigma-1}}) \qquad (6.1)$$

Буквой $\varkappa_\sigma$ коротко обозначены различные множества индексов $q_j = 1, \ldots, l$ $(j = 1, \ldots, \sigma)$, удовлетворяющие добавочным условиям

$$\text{(a)} \qquad \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \ldots + \alpha_{q_\sigma} = \beta_{r_0} \qquad (6.2)$$

$$\text{(b)} \qquad \{\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_\xi}\} \cap \{\beta_{k_0} + \alpha_{q_1}, \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2}, \ldots$$
$$\ldots, \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_{\sigma-1}}\} = \Lambda$$

$$\text{(c)} \qquad \{\beta_{r_1}, \beta_{r_2}, \ldots, \beta_{r_\eta}\} \subset \{\beta_{k_0} + \alpha_{q_1}, \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \alpha_{q_2}, \ldots$$
$$\ldots, \beta_{k_0} + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_{\sigma-1}}\}$$

Здесь $k_0, k_1, \ldots, k_\xi$, $r_0, r_1, \ldots, r_\eta$ обозначают номера чисел β_r, введенных в п. 2. Символы $\{\ \}$ обозначают множество, $\cap$ — знак пересечения множеств, $\subset$ — знак включения множеств, Λ — пустое множество индексов, $K_q(p)$ — матрицы из (1.7).

Пользуясь обозначением (6.1), ряд (1.11) можно записать в форме

$$F(p) = \Omega(p) + \sum_{r=0}^{\infty} S_0^r(p)\, \Omega(p + \beta_r) \qquad (6.3)$$

Из (6.2) следует, что чем больше нижних индексов, тем «лучше сходится» ряд (6.1), в том смысле, что из (6.1) выпадают члены, не удовлетворяющие добавочному условию (b) в (6.2).

Дословно, как в статье [4], можно доказать соотношения, обобщающие лемму (7.1) работы [4] (стр. 595) для функций $S(p)$ определения [6.1]. Эти соотношения позволяют выражать матрицы-функции $S(p)$ через матрицы-функции с добавочным нижним индексом γ.

Приведем окончательные формулы для трех возможных случаев:

(A). Пусть $\gamma = k_0, \neq k_1, k_2, \ldots, k_\alpha$, тогда

$$S^r_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha}(p) = (E - S^{k_0}_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p))^{-1} S^r_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p) \tag{6.4}$$

(B). Пусть $\gamma = r \neq k_0, k_1, \ldots, k_\alpha$, тогда

$$S^r_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha}(p) = S^r_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p)(E - S^r_{r, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p))^{-1} \tag{6.5}$$

(C). Пусть $\gamma \neq r, k_0, k_1, \ldots, k_\alpha$, имеем

$$S^r_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha}(p) = S^r_{k_1, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p) +$$
$$+ S^\gamma_{k_0, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p)(E - S^\gamma_{\gamma, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p))^{-1} S^r_{\gamma, k_1, \ldots, k_\alpha, \gamma}(p)$$

Если числа α_q имеют общую меру (п. 5), то эти соотношения позволяют аналитически продолжить ряд (1.11), (6.3) на всю комплексную плоскость p; что приводит к теореме 5.1.

Уравнение (4.2) для определения особенностей изображения $F(p)$ принимает вид в обозначениях (6.1)

$$\operatorname{Det} D(p) \equiv \operatorname{Det}(L_0(p) - L_0(p) S^0_{0,0}(p)) = 0 \tag{6.7}$$

Рассмотрим вопрос об исследовании устойчивости решений системы (4.1) в случае невыполнения условия (4.3). А именно, пусть например

$$\rho_1(0) - \rho_0(0) = \beta_\gamma (\gamma \neq 0), \quad \rho_k(0) - \rho_0(0) \neq \beta_r \; (k = 2, 3, \ldots, \; r = 1, 2, \ldots) \tag{6.8}$$

В этом случае удобно применять при решении (6.7) формулу, вытекающую из (6.6)

$$L_0(p) S^0_{0,0}(p) = L_0(p) S^0_{0,0,\gamma}(p) + L_0(p) S^\gamma_{0,0,\gamma}(p) \tag{6.9}$$
$$[L_0(p + \beta_\gamma) - L_0(p + \beta_\gamma) S^\gamma_{\gamma,0,\gamma}(p)]^{-1} L_0(p + \beta_\gamma) S^0_{\gamma,0,\gamma}(p)$$

Любые конечные частные суммы рядов, входящих в правую часть (6.9), регулярны по p и μ в области $|p - \rho_0(0)| \leqslant \varepsilon$, $|\mu < \varepsilon$ при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$. Среди всех матриц вида $L_0^{-1}(p + \beta_r)$, входящих в ряды в правую часть (6.9), здесь отсутствуют $L_0^{-1}(p + \beta_0)$ ($\beta_0 \equiv 0$), $L_0^{-1}(p + \beta_\gamma)$, т. е. именно те, которые имеют особенность в точке $p = \rho_0(0)$.

Пример 6.1. Найдем границу области неустойчивости решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda y(t) + 2\mu a \cos 2ty(t - \tau_1) + 2\mu b \cos 4ty(t - \tau_2) = 0 \tag{6.10}$$

при $\lambda \approx 1$, $\mu \approx 0$; λ, $\mu > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ — вещественные параметры.

Из (1.1) имеем $l=4$, $\alpha_0\equiv 0$, $\alpha_1=-\alpha_2=2i$, $\alpha_3=-\alpha_4=4i$. Из (1.8) получаем

$$L_0(p)=p^2+\lambda,\qquad L_1(p)=L_2(p)=\mu a e^{-p\tau_1},\qquad L_3(p)=L_4(p)=\mu b e^{-p\tau_2}\qquad (6.11)$$

Вычисляем числа β_r, $\beta_0\equiv 0$

$$\alpha_1=\beta_1=2i,\quad \alpha_2=\beta_2=-2i,\quad \alpha_3=\beta_3=4i,\quad \alpha_4=\beta_4=-4i,\quad 2\alpha_1=\beta_3$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\beta_0,\quad \alpha_1+\alpha_3=\beta_5=6i,\quad \alpha_1+\alpha_4=\beta_2,\quad 2\alpha_2=\beta_4,\ldots \text{ и т. д.}$$

Из (6.8) находим $\rho_1(0)=\sqrt{-\lambda}\approx i$, $\rho_2(0)\approx -i$, $\rho_2-\rho_1=-2i=\beta_2$. Строим линейные комбинации вида (2.11), дающие β_0 и β_2. Имеем

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1=\alpha_3+\alpha_4=\alpha_4+\alpha_3=\ldots=\beta_0\qquad (6.12)$$

$$\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4=\alpha_4+\alpha_1=\ldots=\beta_2.$$

Комбинация $\alpha_2+\alpha_1$ не удовлетворяет условию b (6.2) для функции $S^0_{0,0,\gamma}(p)$, поэтому исключаем соответствующее ей слагаемое в (6.1) для $S^0_{0,0,\gamma}(p)$.

Уравнение (6.7) с учетом (6.9) принимает вид

$$\begin{aligned}&\{L_0(p)-L_0(p)\,[K_1(p)K_2(p+2i)+K_3(p)K_4(p+4i)+K_4(p)K_3(p-4i)+\ldots]\}\times\\ &\times\{L_0(p-2i)-L_0(p-2i)\,[K_2(p-2i)K_1(p-4i)+K_3(p-2i)K_4(p+2i)+\\ &+K_4(p-2i)K_3(p-6i)+\ldots]\}=\\ &=\{L_0(p)\,[K_2(p)+K_1(p)K_4(p+2i)+K_4(p)K_1(p-4i)+\ldots]\}\times\\ &\times\{L_0(p-2i)\,[K_1(p-2i)+K_3(p-2i)+K_2(p-2i)+K_2(p-2i)K_3(p-4i)+\ldots]\}\end{aligned}\qquad (6.13)$$

В (6.13) все ряды выписаны с точностью до малых $O(\mu^2)$ включительно. Пользуясь скалярностью функций $L_q(p)$ (6.11) в (6.7), (6.9) освободились от знаменателя и пришли к уравнению (6.13). После подстановки в (6.13) выражений (1.7), (6.11) получаем явное уравнение для характеристических показателей p. Из условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (6.13), близких к i, имеем

$$\left(\lambda-1+\frac{\mu^2a^2}{8}\cos 4\tau_1+\frac{\mu^2b^2}{6}\cos^3 2\tau_2\right)^2>\left(\mu a+\frac{\mu^2ab}{4}\cos 2(\tau_2-\tau_1)\cos(\tau_2+2\tau_1)\right)^2+O(\mu^4).\qquad (6.14)$$

Условие (6.14) лишь необходимо, но недостаточно для устойчивости решений (6.10).

7. Рассмотрим получение асимптотического при $\mu\to 0$ критерия устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с почти периодическими коэффициентами [7]

$$(1+\mu f_2(t))\frac{d^2y}{dt^2}+\mu f_1(t),\quad \frac{dy}{dt}+(\lambda+\mu f_0(t))\,y=0\qquad (7.1)$$

Здесь $\lambda,\mu\geqslant 0$ — вещественные параметры, $f_k(t)$ — вещественные функции (7.2)

$$f_k(t)=\sum_{q=0}^{l}a_{qk}(\mu)\,e^{-\alpha_q t}\quad (k=0,1,2),\qquad \alpha_0\equiv 0,\qquad \alpha_q=\theta_q i\quad (\theta_q\neq\theta_h (q\neq h))$$

где $a_{qk}(\mu)$ — достаточно раз дифференцируемые функции μ, $\theta_{q\,(q=1,\ldots,l)}$ — произвольные вещественные числа. Из (1.8) получаем (7.3)

$$L_0(p)=(1+\mu a_{02})\,p^2+\mu a_{01}p+\lambda+\mu a_{00},\qquad L_q(p)=\mu\,(a_{q2}p^2+a_{q1}p+a_{q0})$$

Как и в работе [4] (стр. 598), составляем уравнение (6.7) для отыскания характеристических показателей. Условия отрицательности вещественных частей и применение результатов работы [7] приводит к теореме.

Теорема 7.1. Пусть $-2i\sqrt{\lambda} = \beta_\gamma \neq 0$ «резонансный случай». Для того чтобы решения уравнения (7.1) были асимптотически устойчивы при достаточно малых значениях μ, $0 < \mu \leqslant \varepsilon_1$, достаточно выполнения двух условий при $0 < \mu \leqslant \varepsilon_1$

$$h(\mu) \equiv \lim_{\tau\to\infty} \mu\tau^{-1} \int_0^\tau \frac{f_1(t)}{1+\mu f_2(t)}\, dt > 0 \tag{7.4}$$

$$g_\gamma(\mu, \lambda) \equiv |\, c_\gamma(i\sqrt{\lambda})|^2 - |\, d_\gamma(i\sqrt{\lambda})|^2 > 0 \tag{7.5}$$

Решения (7.1) неустойчивы, если $h(\mu) < 0$ или $g_\gamma(\mu, \lambda) < 0$. Если $h(\mu) = 0$ или $g(\mu, \lambda) = 0$, то имеем сомнительный случай.

Здесь введены обозначения, использующие (6.1)

$$c_\gamma(p) = L_0(p) - L_0(p) S^0_{0,0,\gamma}(p), \qquad d_\gamma(p) = L_0(p) S^\gamma_{0,0,\gamma}(p) \tag{7.6}$$

Замечание 7.1. Если $-2i\sqrt{\lambda} \neq \beta_\gamma$ $(\gamma = 1, 2, \ldots)$ в (7.1), то решения (7.1) устойчивы при $h(\mu) > 0$ и неустойчивы при $h(\mu) < 0$. Устойчивость рассматривается в асимптотическом смысле при $\mu \to 0$.

Замечание 7.2. Ряды в (7.5) расходятся при $\mu > 0$. Неравенство (7.5) понимается в асимптотическом смысле при $\mu \to 0$, $\mu > 0$. Оно считается выполненным, если положителен первый отличный от нуля коэффициент в разложении $g_\gamma(\mu, \lambda)$ по степеням μ.

Замечание 7.3. Условие (7.5) можно найти из условия существования почти периодического решения уравнения (7.1).

Пример 7.1. Рассматривается устойчивость решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu^n c \frac{dy}{dt} + (\lambda + 2\mu\cos\omega_1 t + 2\mu\cos\omega_2 t)\, y = 0 \qquad \begin{pmatrix} c > 0 \\ \mu > 0 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

где ω_1, ω_2 — рационально несоизмеримые вещественные числа. Имеем из (1.1) случай $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\omega_1$, $\alpha_3 = -\alpha_4 = i\omega_2$. Резонансные значения $\lambda_\gamma = -0.25\,\beta_\gamma^2$ образуют (2.11) счетное, всюду плотное при $\lambda > 0$, множество чисел вида

$$\lambda_\gamma = -0.25\beta_\gamma^2 = 0.25\,(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)^2 \qquad (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{7.8}$$

При $c > 0$ к оси $\mu = 0$ может примыкать лишь конечное число областей неустойчивости. Порядок ширины области неустойчивости (7.7), примыкающей к λ_γ, равен $O(\mu^{|k_1| + |k_2|})$.

Из (2.11) получим

$$\beta_0 \equiv 0, \quad \beta_1 = i\omega_1, \quad \beta_2 = -i\omega_1, \quad \beta_3 = i\omega_2, \quad \beta_4 = -i\omega_2, \quad \beta_5 = 2i\omega_1, \quad \beta_6 = i(\omega_1 + \omega_2), \ldots$$

Пусть

$$\lambda \approx \lambda_1 = 0.25\,\omega_1^2, \qquad \lambda \approx \lambda_5 = \omega_1^2, \qquad \lambda \approx \lambda_6 = 0.25\,(\omega_1 + \omega_2)^2$$

Нетривиальное условие устойчивости (7.5) принимает вид

$$\left(\lambda - 0.25\omega_1^2 + \frac{\mu^2}{2\omega_1^2} + \frac{2\mu^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right)^2 - \mu^2 + O(\mu^4) > 0 \tag{7.9}$$

$$\left(\lambda - \omega_1^2 - \frac{2\mu^2}{3\omega_1^2} + \frac{2\mu^2}{\omega_2^2 - 4\omega_2^2}\right)^2 - \frac{\mu^4}{\omega_1^4} + O(\mu^6) > 0 \tag{7.10}$$

$$\left(\lambda - 0.25\,(\omega_1 + \omega_2)^2 - \frac{2\mu^2}{\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} - \frac{2\mu^2}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)}\right)^2 - \frac{4\mu^4}{\omega_1^2\omega_1^2} + O(\mu^6) > 0 \tag{7.11}$$

Если рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\lambda+\mu f(t))\,y=0 \tag{7.12}$$

где $f(t)$ — вещественная функция вида

$$f(t)=\sum_{q=1}^{l}(a_q\cos\omega_q t+b_q\sin\omega_q t) \tag{7.13}$$

то на основании теоремы 7.1 можно доказать, что к каждому резонансному значению λ_γ, $\mu=0$

$$\lambda_\gamma=-0.25\,\beta_\gamma^2=0.25\,(\omega_1k_1+\omega_2k_2+\ldots+\omega_lk_l)^2 \tag{7.14}$$

$$(k_q=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

может примыкать при $\mu>0$ область асимптотической неустойчивости решений. Ширина области неустойчивости при этом имеет $O(\mu^{\mathrm{Rg}\beta_\gamma})$.

Здесь символ $\mathrm{Rg}\,\beta_\gamma$ обозначает

$$\mathrm{Rg}\,\beta_\gamma=\min\,(|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_l|) \tag{7.15}$$

при условии

$$i\,(\omega_1k_1+\omega_2k_2+\ldots+\omega_lk_l)=\beta_\gamma$$

Вопрос о достаточных условиях устойчивости решений уравнения (7.12) в общем виде, как известно автору, еще не решен. Предложенный в этом пункте способ исследования устойчивости решений (7.1) не содержит принципиально нового по сравнению с [7], но более удобен при конкретных расчетах.

Пример 7.2. Решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\mu\cos\omega_1t\,\frac{dy}{dt}+(\lambda+2\mu\cos\omega_2t)\,y=0 \tag{7.16}$$

где $\mu>0$; ω_1, ω_2 — рационально несоизмеримы, неустойчивы при $\lambda\approx0.25\omega_1^2$, если

$$\left(\lambda-\frac{\omega_1^2}{4}-\frac{3}{8}\mu^2+\frac{2\mu^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}+O(\mu^4)\right)^2<\left(\frac{\mu\omega_1^2}{2}+O(\mu^3)\right)^2 \tag{7.17}$$

Поступила 29 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. О линейных дифференциальных уравнениях с экспоненциальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Регулярный случай. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М., Физматгиз, 1960.
3. Штокало И. З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Киев, АН УССР, 1961.
4. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
5. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.
6. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Международный симпозиум по нелинейным колебаниям. Киев, 1961.
7. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев, АН УССР, 1960.