Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КООРДИНАТ

В. А. Троицкий
(Ленинград)

При изучении оптимальных процессов рассматриваются обычно задачи [1], вариационная формулировка которых приводит к связанным проблемам Лагранжа, Майера и Больца вариационного исчисления [2, 3, 4]. Функционалы в них могут зависеть от значений координат на концах исследуемого интервала времени.

Здесь рассматриваются вариационные задачи оптимизации процессов управления, функционалы которых зависят от значений координат в некоторых внутренних точках этого интервала.

1. Постановка задачи. Предполагается, что поведение оптимизируемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида

$$g_s = \dot{x}_s - f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Считается также, что функции $u_k(t)$, $(k = 1, \ldots, m)$ связаны r конечными зависимостями

$$\psi_k = \psi_k(u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.2}$$

Переменные $x_s(t)$ называются координатами, а $u_k(t)$ — параметрами управления [1].

При помощи зависимостей (1.2) осуществляется переход от замкнутых к открытым областям допустимых изменений параметров управления. Соответствующие выкладки подробно описаны в работах [5, 6].

В дальнейшем предполагается, что в $n + m + 1$-мерном пространстве переменных задачи $x_1, \ldots, x_m$; $u_1, \ldots, u_m$; t имеется открытая область R_1 допустимых изменений координат $x_s(t)$, управлений $u_k(t)$ и времени t, в которой функции f_s и ψ_k непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам до третьего порядка включительно [4].

Рассмотрим интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_{q+1} = T$, принадлежащий области R_1, и внутри него q точек $t = t_i$ $(i = 1, \ldots, q)$, для которых выполняются зависимости

$$\varphi_l\,[x(t_0), t_0, x(t_1), t_1, \ldots, x(t_q), t_q, x(T), T] = 0 \tag{1.3}$$
$$(l = 1, \ldots, p \leqslant (n+1)(q+2) - 1)$$

В них для сокращения записи совокупность $x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i)$ обозначена через $x(t_i)$.

Будем считать, что функции φ_l непрерывны и имеют непрерывные производные по их аргументам до третьего порядка включительно в замкнутой области R_2 пространства $(n+1)\times(q+2)$ переменных $x_1(t_0), \ldots$ $\ldots, x_n(t_0), t_0;$ $x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1), t_1; \ldots, x_1(t_q), \ldots, x_n(t_q), t_q$ $x_1(T), \ldots, x_n(T), T$. Предположим, что матрица [4]

$$\left\| \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(t_0)} \vdots \frac{\partial\varphi_l}{\partial t_0} \vdots \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(t_1)} \vdots \frac{\partial\varphi_l}{\partial t_1} \vdots \cdots \vdots \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s(T)} \vdots \frac{\partial\varphi_l}{\partial T} \right\| \tag{1.4}$$

имеет ранг p, равный числу ее строк. Элементами l-й строки этой матрицы являются частные производные функции φ_l по ее аргументам.

Элемент $(x, u, t) = (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)$ кривой в указанном выше $n+m+1$-мерном пространстве будем называть допустимым, если он принадлежит области R_1. Совокупность $(x(t_0), t_0, x(t_1), t_1, \ldots, x(T), T)$ назовем концевым элементом кривой. Он определяется и промежуточными, и концевыми значениями координат и времени. Если концевой элемент принадлежит области R_2, то он также называется допустимым.

Угловыми точками кривой будем считать точки разрыва непрерывности параметров управления $u_k(t)$. Число их в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ будет предполагаться конечным. Кривая с конечным числом угловых точек в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, все элементы которой вместе с концевыми являются допустимыми, будет называться допустимой.

Будет изучаться следующая задача оптимизации процессов управления.

Среди допустимых кривых, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ уравнениям (1.1) и (1.2), для которых в точках $t = t_i$, $(i = 0, 1, \ldots, q+1)$ выполняются соотношения (1.3), выбрать такую, которая сообщает функционалу

$$J = g\,[x(t_0), t_0, x(t_1), t_1, \ldots, x(t_q), t_q, x(t_{q+1}), t_{q+1}] + \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)\,dt \tag{1.5}$$

минимальное значение.

Аргументами функции g являются те же значения $x_s(t_i)$ координат $x_s(t)$ в точках $t = t_i$, которые входят в функции φ_l. Задачи максимизации сводятся к задачам на минимум изменением знака функционала. Они здесь отдельно не изучаются.

Сформулированная задача отличается от связанных проблем Майера и Больца вариационного исчисления тем, что в соотношения (1.3) и в функционал (1.5) входят величины $x_s(t_i)$, $(s = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, q)$. Они соответствуют точкам $t = t_i$ внутри интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

С задачами такого типа приходится иметь дело при построении оптимальных режимов, если в качестве критерия оптимальности используется отклонение системы от положения равновесия в некоторый фиксированный момент времени $t = t_1$ при условиях вида [5, 6]

$$\varphi_l\,[x(t_0), t_0, x(T), T] = 0$$

Здесь считается, что $t_0 < t_1 < T$. К аналогичной постановке приводится задача разыскания минимума (или максимума) экстремального отклонения системы и многие другие задачи.

Следует отметить, что изученная в работе [6] задача Майера — Больца является частным случаем описанной и получается из нее при $q = 0$.

2. Условие стационарности функционала J. Рассмотрим кривую E удовлетворяющую уравнениям (1.1) и (1.2). Будем считать, что на ней ранг матрицы [6]

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial u_\beta} \right\|$$

k, β-м элементом которой является производная $\partial \psi_k / \partial u_\beta$, имеет ранг r. Кроме того, будем предполагать, что для этой кривой справедливы «условия некасания»

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t_i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_\alpha(t_i)} \dot{x}_\alpha(t_i) \neq 0 \qquad (l = 1, \ldots, p) \tag{2.1}$$

Тогда могут быть доказаны леммы о включении кривой E в однопараметрическое или многопараметрическое семейства кривых сравнения, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и (1.2). Формулировки их почти в точности совпадают с приводимыми Г. А. Блиссом и здесь не воспроизводятся [4].

Предположим теперь, что имеется кривая E, сообщающая минимум функционалу J. На основании леммы о включении она может быть включена в $p+1$-параметрическое семейство кривых сравнения и будет содержаться в нем при нулевых значениях параметров. Составив полный дифференциал этого семейства и повторив выкладки и рассуждения, аналогичные описанным в книге Г. А. Блисса [4], убедимся в том, что на этой кривой должно выполняться первое необходимое условие минимума функционала J. Оно называется правилом множителей или условием стационарности функционала J.

Введя в рассмотрение функции [6]

$$L = f_0 + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s g_s - \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \dot{x}_s - H \tag{2.2}$$

$$\varphi = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \tag{2.3}$$

где

$$H = H_\lambda + H_\mu = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s f_s + \sum_{k=1}^{r} \mu_k \psi_k, \qquad (\lambda_0 = -1) \tag{2.4}$$

можно представить это условие в форме равенства $\Delta I = 0$, в котором через ΔI обозначена полная вариация функционала I, имеющего вид

$$I = \varphi + \int_{t_0}^{T} L dt \tag{2.5}$$

Соотношение $\Delta I = 0$ должно выполняться на всякой кривой, сообщающей минимум функционалу J. Функции $\lambda_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ и $\mu_k(t)$ $(k = 1, \ldots, r)$ не могут одновременно обратиться в нуль в какой-либо точке интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Переходим к установлению развернутой формы необходимого условия стационарности функционала J, которая используется обычно при решении задачи оптимизации процессов управления. Для упрощения выкладок предположим сначала, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t_1$, в которой выполняются соотношения (1.3).

Будем считать, что точек разрыва непрерывности параметров управления в этом интервале нет. При сделанных предположениях функционал I представится в виде (2.6)

$$I=\varphi+\int_{t_0}^{t_1} L dt+\int_{t_1}^{T} L dt=\varphi+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\dot{x}_s-H\Big]dt+\int_{t_1}^{T}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\dot{x}_s-H\Big]dt$$

Составив его полную вариацию ΔI, получим выражение [5]

$$\Delta I=\Delta\varphi-[\lambda_s(t_0)\,\dot{x}_s(t_0)-(H)_{t_0}]\,\delta t_0+ \tag{2.7}$$

$$+[\lambda_s^-(t_1)\,\dot{x}_s^-(t_1)-\lambda_s^+(t_1)\,\dot{x}_s^+(t_1)-(H^-)_{t_1}+(H^+)_{t_1}]\,\delta t_1+$$

$$+[\lambda_s(T)\,\dot{x}_s(T)-(H)_T]\,\delta T+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\delta\dot{x}_s-\delta H\Big]dt+\int_{t_1}^{T}\Big[\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\delta\dot{x}_s-\delta H\Big]dt$$

В нем верхними индексами минус и плюс отмечаются левые и правые пределы соответствующих функций; там, где это не вносит путаницы, они опускаются. Кроме этого, использованы обозначения

$$\Delta\varphi=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_i)}\Delta x_s(t_i)+\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\delta t_i=$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_i)}\delta x_s(t_i)+\Big[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_i)}\dot{x}_s(t_i)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\Big]\delta t_i\Big\} \tag{2.8}$$

$$\delta H=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_s}\delta x_s+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k \tag{2.9}$$

Коэффициенты при δt_i в правой части равенства (2.7) при помощи соотношения (2.4) преобразуются к виду

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(t_i)\,\dot{x}_s(t_i)-(H)_{t_i}=(f_0)_{t_i}\,\delta t_i \tag{2.10}$$

При помощи интегрирования по частям найдем

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\delta\dot{x}_s dt=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\delta x_s\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sum_{s=1}^{n}\dot{\lambda}_s\delta x_s dt \tag{2.11}$$

Подставив выражения (2.8) — (2.11) в зависимости (2.5) и (2.7), получим

$$\Delta I=\sum_{s=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_0)}-\lambda_s(t_0)\Big]\Delta x_s(t_0)+\sum_{s=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(T)}+\lambda_s(T)\Big]\Delta x_s(T)+$$

$$+\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}+(H)_{t_0}\Big]\delta t_0+\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial T}-(H)_T\Big]\delta T+\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}-(H^-)_{t_1}+(H^+)_{t_1}\Big]\delta t_1+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_1)}+\lambda_s^-(t_1)-\lambda_s^+(t_1)\Big]\Delta x_s(t_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}\Big(\dot{\lambda}_s+\frac{\partial H}{\partial x_s}\Big)\delta x_s+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\Big]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{T}\Big[\sum_{s=1}^{n}\Big(\dot{\lambda}_s+\frac{\partial H}{\partial x_s}\Big)\delta x_s+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\Big]dt=0 \tag{2.12}$$

Анализ его, аналогичный описанному в работе [5], приводит к следующим результатам. На кривой, сообщающей минимум функционалу J, должны выполняться уравнения

$$\dot{\lambda}_s + \frac{\partial H}{\partial x_s} = 0, \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.13}$$

концевые условия

$$\lambda_s(t_0) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} = 0, \qquad \lambda_s(T) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(T)} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

$$(H)_{t_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = 0, \qquad (H)_T - \frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0 \tag{2.15}$$

и условия Эрдманна — Вейерштрасса

$$\begin{gathered} \lambda_s^-(t_1) - \lambda_s^+(t_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_1)} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - (H^-)_{t_1} + (H^+)_{t_1} = 0 \end{gathered} \tag{2.16}$$

При построении оптимального режима следует использовать еще уравнения

$$\dot{x}_s - \frac{\partial H}{\partial \lambda_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial H}{\partial \mu_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.17}$$

эквивалентные уравнениям (1.1) и (1.2), соотношения (1.3) и равенства

$$x_s^-(t_1) - x_s^+(t_1) = 0, \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.18}$$

отражающие непрерывность координат $x_s(t)$ в точке $t = t_1$.

Отметим, что в этой задаче, так же как и в задаче Майера — Больца [6], нужно различать функции $x_s(t)$, $\lambda_s(t)$, $u_k(t)$ и $\mu_k(t)$ и уравнения (2.14) и (2.17) в различных подинтервалах $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $t_1 \leqslant t \leqslant T$ интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Условимся обозначать верхним индексом минус функции, принадлежащие первому подинтервалу, и функции, соответствующие второму подинтервалу — индексом плюс, придем к следующему результату.

Для определения $4n + 2m + 2r$ функций $x_s^\pm(t)$, $\lambda_s^\pm(t)$, $u_k^\pm(t)$ и $\mu_k^\pm(t)$ имеются $2n + 2m$ уравнений (2.13) и $2n + 2r$ уравнений (2.17). При интегрировании $4n$ дифференциальных уравнений войдут $4n$ произвольных постоянных. Для нахождения их вместе с p множителями ρ_l и величинами t_0, t_1 и T используются соотношения (1.3), (2.14), (2.15), (2.16) и (2.18). Число их также равно $4n + p + 3$.

Предположив, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t^*$ разрыва непрерывности параметров управления $u_k(t)$ и повторив описанные выше выкладки, придем к уравнениям (2.13), концевым условиям (2.14) и (2.15) и к условиям Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_s^-(t^*) - \lambda_s^+(t^*) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (H^-)_{t^*} - (H^+)_{t^*} = 0 \tag{2.19}$$

Если считать, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t_1^*$, в которой выполняются зависимости (1.3) и имеет место разрыв непрерывности параметров управления $u_k(t)$, то получатся уравнения (2.13) и соотношения (2.14) — (2.16).

Предположения более общего характера, касающиеся числа точек типа $t = t_i$ и точек разрыва непрерывности параметров управления $u_k(t)$, не изменят перечисленных выше результатов. Они могут заметно усложнить процесс их установления.

Сравнение равенств (2.16) и (2.19) показывает, что точки $t = t_i$, в которых выполняются зависимости (1.3), существенно отличаются от точек $t = t^*$ разрыва непрерывности параметров управления $u_k(t)$. В первых может иметь место разрыв непрерывности множителей $\lambda_s(t)$ и функции H. В точке $t = t^*$ они непрерывны.

Функция H будет непрерывной в точке $t = t_i$ в том случае, когда в зависимости (1.3) величина t_i явно не входит. Если все t_i $(i = 1, \ldots, q)$ не содержатся в соотношениях (1.3) и время t явно не входит в функции f_s и ψ_k, уравнения задачи допускают первый интеграл

$$H = h = \mathrm{const} \tag{2.20}$$

Множители $\lambda_s(t)$ могут иметь разрывы непрерывности; функция H будет непрерывной во всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

3. Необходимое условие Вейерштрасса. При решении задач оптимизации процессов управления, кроме условия стационарности, существенно используется еще необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J.

Доказательство его во многом аналогично описанному в работе [6]. Оно здесь не приводится.

В обобщении нуждается понятие нормальности кривой E, сообщающей минимум функционалу J. Нормальной здесь будет считаться кривая, на которой определитель

$$\left|\frac{\partial \varphi_l}{\partial b_\alpha}\right| \qquad (l = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, p)$$

составленный для $p + 1$-параметрического семейства кривых сравнения, используемого при установлении необходимого условия Вейерштрасса сильного минимума, отличен от нуля.

Будем считать, что кривая E удовлетворяет необходимому условию Вейерштрасса сильного минимума функционала J, если на ней выполняются уравнения (1.1) и (1.2) и условие стационарности с множителями $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$ и ρ_l и с этими множителями в каждой точке этой кривой справедливо неравенство

$$E \geqslant 0 \tag{3.1}$$

при всевозможных допустимых величинах $\dot{X}_s$, $U_k \neq \dot{x}_s$, u_k, связанных уравнениями (1.1) и (1.2).

Любая нормальная, реализующая минимум функционала J кривая E удовлетворяет необходимому условию Вейерштрасса.

Функция Вейерштрасса E, входящая в неравенство (3.1), определяется формулой

$$E = L(x, \dot{X}, U, \lambda, \mu, t) - L(x, \dot{x}, u, \lambda, \mu, t) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}(\dot{X}_s - \dot{x}_s) \tag{3.2}$$

в которой x_s и u_k соответствуют кривой, сообщающей минимум функционалу J, а X_s и U_k — любые допустимые функции.

Зависимость (3.2) показывает, что функция Вейерштрасса E, так же как L, может иметь разрывы непрерывности первого рода. Поэтому в точках таких разрывов неравенство (3.1) должно проверяться дважды: для левого и правого пределов функции E.

Подстановка в соотношение (3.2) выражения (2.2) приводит к формуле

$$E = H(x, u, \lambda, \mu, t) - H(x, U, \lambda, \mu, t) \tag{3.3}$$

При учете тождества $H_\mu \equiv 0$, неравенство (3.1) может быть представлено в форме

$$H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \geqslant$$
$$\geqslant H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \tag{3.4}$$

Ею, обычно, пользуются при решении задач оптимизации процессов управления.

Неравенство (3.4) показывает, что параметры управления, соответствующие оптимальному режиму, сообщают максимум функции H_λ. Поэтому необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J может быть и в этой задаче сформулировано в виде, аналогичном принципу максимума [1].

4. Пример. Задача о накоплении периодических возмущений. В качестве примера применения описанных выше общих приемов исследования рассмотрим следующую задачу о накоплении периодических возмущений в линейной системе с одной степенью свободы [7].

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = u \tag{4.1}$$

в котором $u(t)$ — возмущающее воздействие, удовлетворяющее неравенству

$$|u(t)| \leqslant U^* \tag{4.2}$$

Требуется из всех функций $u(t)$ заданного периода T_0, связанных условием (4.2), найти такую, которая сообщает максимум наибольшему значению $x(t)$ в установившемся режиме.

Введем обозначения

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x} \tag{4.3}$$

и перепишем уравнение (4.1) в виде

$$g_1 = \dot{x}_1 - x_2 = 0, \qquad g_2 = \dot{x}_2 + k^2 x_1 + 2n x_2 - u = 0 \tag{4.4}$$

Составим соотношение

$$\psi = u^2 + v^2 - (U^*)^2 = 0 \tag{4.5}$$

осуществляющее переход к открытой области изменения $u(t)$ и $v(t)$. Построим условия периодичности

$$\varphi_1 = x_1(t_0) = 0, \qquad \varphi_2 = x_1(T) = 0, \qquad \varphi_3 = x_2(t_0) - x_2(T) = 0 \tag{4.6}$$

и зависимость

$$\varphi_4 = T - t_0 - T_0 = 0 \tag{4.7}$$

отражающую фиксированность периода.

Необходимое условие экстремума функции $x_1(t)$ имеет вид

$$\varphi_5 = x_2(t_1) = 0 \tag{4.8}$$

Функционал J представится формулой

$$J = -x_1(t_1) \tag{4.9}$$

Задача о накоплении возмущений сформулируется следующим образом.

Среди непрерывных функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с кусочно-непрерывной производной $\dot{x}_2(t)$ и среди кусочно-непрерывных возмущений $u(t)$, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ уравнениям (4.4) и (4.5), на концах его — соотношениям (4.6) и (4.7) и в точке $t = t_1$ — зависимости (4.8), найти такие, которые сообщают функционалу (4.9) минимальное значение.

В таком виде задача является частным случаем рассмотренной в предыдущих параграфах. При решении ее можно использовать все установленные в них результаты.

Составляем функции H и φ. На основании формул (2.3) и (2.4) для них будут иметь место выражения

$$H = H_\lambda + H_\mu = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 [-k^2 x_1 - 2n x_2 + u] + \mu [u^2 + v^2 - (U^*)^2] \tag{4.10}$$

$$\varphi = -x_1(t_1) + \rho_5 x_2(t_1) + \rho_1 x_1(t_0) + \rho_2 x_1(T) + \rho_3 [x_2(t_0) - x_2(T)] + \rho_4 (T - t_0 - T_0) \tag{4.11}$$

При помощи зависимостей (2.18) строим уравнения

$$\dot{\lambda}_1 = k^2 \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + 2n\lambda_2, \quad \lambda_2 + 2\mu u = 0, \quad 2\mu v = 0 \tag{4.12}$$

Использовав соотношения (2.14) и (2.15), получим концевые условия

$$\lambda_1(t_0) = \rho_1, \quad \lambda_1(T) = -\rho_2, \quad \lambda_2(t_0) = \rho_3, \quad \lambda_2(T) = \rho_3, \quad (H_\lambda)_{t_0} = (H_\lambda)_T = \rho_4 \tag{4.13}$$

Равенства (2.16) приводят к следующим условиям Эрдманна — Вейерштрасса:

$$\lambda_1^-(t_1) - \lambda_1^+(t_1) = 1, \quad \lambda_2^-(t_1) - \lambda_2^+(t_1) = -\rho_5, \quad (H_\lambda^-)_{t_1} - (H_\lambda^+)_{t_1} = 0 \tag{4.14}$$

Для точки $t = t^*$ разрыва непрерывности функции $u(t)$ будем иметь

$$\lambda_1^-(t^*) - \lambda_1^+(t^*) = 0, \quad \lambda_2^-(t^*) - \lambda_2^+(t^*) = 0, \quad (H_\lambda^-)_{t^*} - (H_\lambda^+)_{t^*} = 0 \tag{4.15}$$

Если разрыв непрерывности параметра управления $u(t)$ имеет место в точке $t = t^*_1$, для которой выполняется соотношение (4.8), то нужно пользоваться условиями (4.14).

Неравенство (3.4) дает

$$\lambda_2 u \geqslant \lambda_2 U \tag{4.16}$$

Поэтому для $u(t)$ получаем следующие значения:

$$u(t) = U^* \text{ при } \lambda_2 > 0, \qquad u(t) = -U^* \text{ при } \lambda_2 < 0 \tag{4.17}$$

Равенства (4.12) и (4.17) показывают, что управление $u(t)$ во всех точках интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$ принимает только граничные значения $u(t) = \pm U^*$. Исключением будет конечное число точек $t = t^*$, в которых $\lambda_2(t^*) = 0$.

На основании соотношений (4.15) найдем, что функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и H при $t = t^*$ непрерывны. Множитель $\lambda_1(t)$ имеет разрыв непрерывности в точке $t = t_1$. На это указывает первая зависимость (4.14). Второе из этих условий показывает, что множитель $\lambda_2(t)$ также может иметь разрыв непрерывности в этой точке. Функция H будет в ней непрерывной.

Условие непрерывности функции H в точке $t = t_1$ приводит к соотношению

$$\frac{\lambda_2^-(t_1)}{\lambda_2^+(t_1)} = \frac{u^+(t_1) - k^2 x_1^+(t_1)}{u^-(t_1) - k^2 x_1^-(t_1)} \tag{4.18}$$

В случае $T_0 \geqslant T_1 = 2\pi/k_1$, $k_1^2 = k^2 - n^2$ и $k > n$ можно указать функцию $u(t)$, для которой выполняется неравенство

$$u_{\max} < k^2 x_{1\max}$$

Здесь $u_{\max}$ и $x_{1\max}$ наибольшие значения $u(t)$ и $x_1(t)$. Примером может служить [8] гармоническое возмущение $u(t) = u_{\max} \sin \omega t$. Поэтому при $T_0 \geqslant T_1$ это неравенство должно выполняться и для оптимального режима. Следовательно, множитель $\lambda_2(t)$ в точке $t = t_1$ не меняет знака. Тогда, как показывает формула (4.17), параметр управления не будет иметь разрыва непрерывности в этой точке $t = t_1$. На основании формулы (4.18) находим, что множитель $\lambda_2(t)$ будет в этой точке непрерывен.

Исключив из зависимостей (4.11) множитель $\lambda_1(t)$, получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\lambda}_2 - 2n\dot{\lambda}_2 + k^2\lambda_2 = 0 \tag{4.19}$$

Решение его, удовлетворяющее условиям (4.13), имеет вид

$$\lambda_2 = Ce^{nt}\sin(k_1 t + \alpha) \tag{4.20}$$

Здесь α определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e^{nT_0}\sin k_1 T_0}{1 - e^{nT_0}\cos k_1 T_0} \tag{4.21}$$

Она строится при помощи соотношения $\lambda_2(t_0) = \lambda_2(T)$, получающегося из второй пары равенств (4.13).

В «резонансном» случае $T_0 = T_1$ на основании зависимости (4.20) будем иметь $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Положив $\alpha = 0$, найдем

$$\lambda_2(t) = Ce^{nt}\sin k_1 t$$

Тогда

$$u(t) = U^* \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{k_1}\right), \qquad u(t) = -U^* \quad \left(\frac{\pi}{k_1} < t < \frac{2\pi}{k_1}\right) \tag{4.22}$$

Значение $\alpha = \pi$ будет соответствовать второму экстремуму функции $x_1(t)$ в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

При $T_0 = iT_1$ опять получается уравнение $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Для значений $\alpha = j\pi$, ($j = 0, 1, \ldots$), являющихся решением этого уравнения, находятся режимы, приводящиеся, в конечном итоге, к «резонансному» случаю $T_0 = T_1$. Различные значения α отвечают различным точкам экстремума функции $x_1(t)$ в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

При $T_0 < T_1$ приходится рассматривать все уравнения и условия вариационной задачи.

В заключение автор благодарит А. И. Лурье за внимание к работе.

Поступила 10 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
3. Гельфанд И. М. и Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, 1961.
4. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1951.
5. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, стр. 668—679.
6. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1, стр. 29—38.
7. Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, 1954.
8. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики. Гостехиздат, 1948.