

**О НЕСИММЕТРИЧНОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО КОНУСА**

Б. М. Булах (Саратов)

Невязкий гиперзвуковой поток около кругового конуса под углом атаки  $\alpha$  рассмотрен А. Л. Гонором [1], который искал решение в виде степенных рядов по  $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$  (где  $\gamma$  — адиабатический индекс) и получил первые члены разложений в замкнутом виде в параметрической форме. В настоящей работе показывается, что вблизи поверхности конуса имеется «вихревой слой», в котором решение не может быть аппроксимировано конечным отрезком ряда по степеням  $\varepsilon$ , вследствие чего теория А. Л. Гонора не дает возможности определить компоненты скорости на поверхности конуса; показано, как, исходя из решения Гонора, получить компоненты скорости на поверхности конуса с точностью  $O(\varepsilon)$  включительно.

1. Рассмотрим стационарное обтекание кругового конуса с полураствором  $\theta_k$  невязким однородным гиперзвуковым потоком газа под углом атаки  $\alpha$  в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с осью, совпадающей с осью конуса (фигура).

Обозначим через  $u, v, w$  компоненты вектора скорости частиц газа в направлении увеличения соответственно  $r, \theta, \varphi$ ; через  $p, \rho$  — давление и плотность. Величины, относящиеся к невозмущенному потоку, отмечаем нуликом справа сверху ( $V^\circ$  — скорость,  $M^\circ$  — число Маха невозмущенного потока).

Задачу рассматриваем в рамках теории конических течений, когда  $u, v, w, p, \rho$  не зависят от  $r$ . Уравнения неразрывности, количества движения и энергии в этом случае будут иметь вид

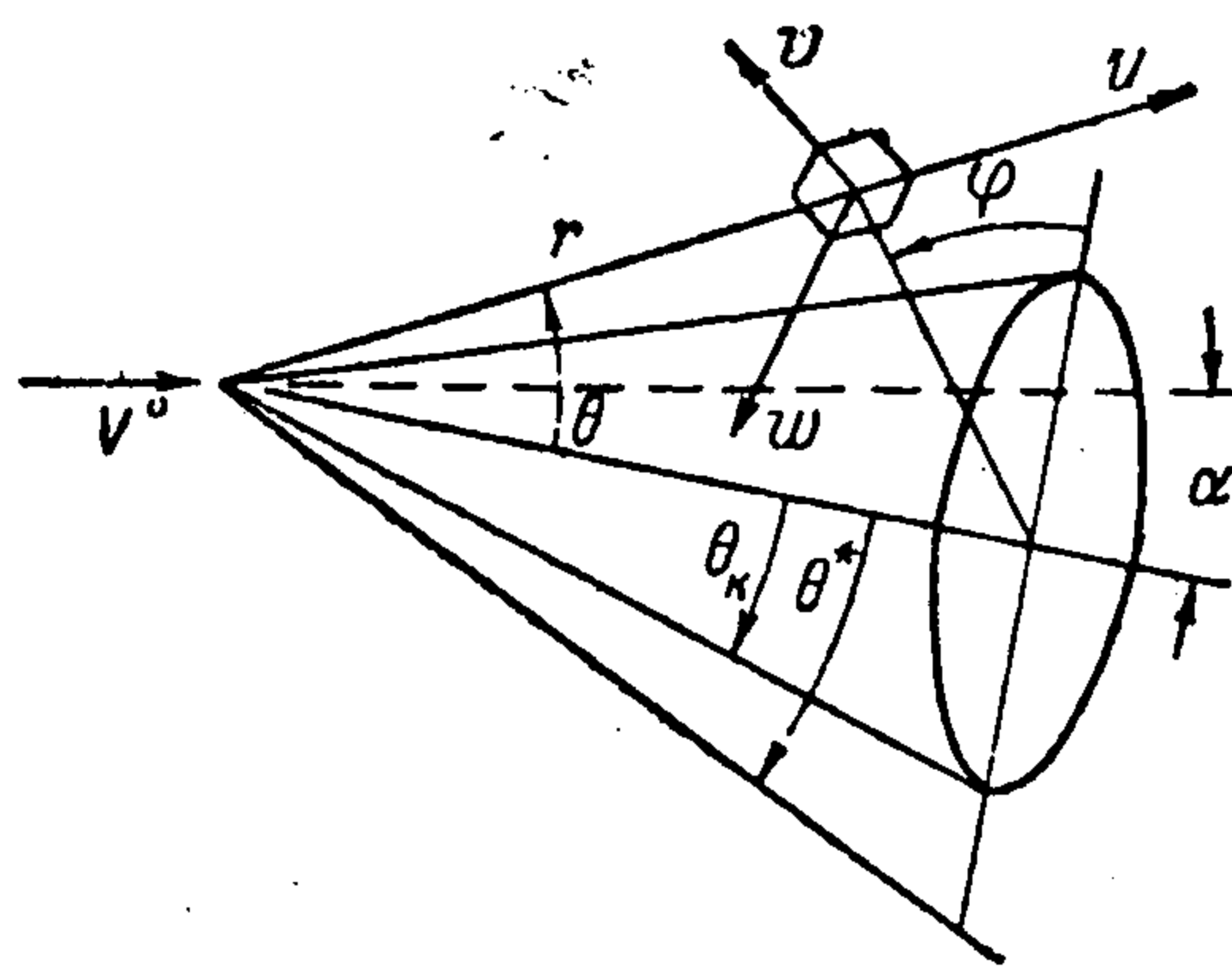
$$2\rho u \sin \theta + (\rho v \sin \theta)_\theta + (\rho w)_\varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$vu_\theta + w \csc \theta u_\varphi - v^2 - w^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$vv_\theta + w \csc \theta v_\varphi + \frac{1}{\rho} p_\theta + uv - \frac{w^2}{\operatorname{tg} \theta} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{V^{\circ 2}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^\circ}{\rho^\circ} \quad (1.4)$$

$$v \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)_\theta + w \csc \theta \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right)_\varphi = 0 \quad (1.5)$$



Индексы  $\theta$  и  $\varphi$  означают производные,  $\gamma$  — адиабатический индекс; газ предполагается совершенным. Уравнение (1.1) после исключения  $\rho$  можно представить так ( $a$  — скорость звука):

$$(a^2 - v^2) \sin \theta v_\theta = (w^2 - a^2) w_\varphi + vw (\sin \theta w_\theta + v_\varphi) + u (v^2 + w^2 - 2a^2) \sin \theta - a^2 v \sin \theta \left( a^2 = a^{\circ 2} - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2 + w^2 - V^{\circ 2}) \right) \quad (1.6)$$

2. Для решения задачи А. Л. Гонор [1] применил метод Г. Г. Черного разложения решения в ряд по  $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$  (при условии, что  $\beta = 1 / M^{\circ 2} (\gamma - 1)$  порядка единицы или меньше при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Решение в области между поверхностью конуса и ударной волной искалось в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, v = \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \dots, w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \quad (2.1)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \rho = \frac{1}{\varepsilon} \rho_0 + \rho_1 + \dots$$

В качестве независимых переменных выбирались  $\varphi, \psi$ , где  $\psi = \text{const}$  на линиях постоянной энтропии ( $\theta$  представлялось также в виде  $\theta = \theta_k + \varepsilon \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_1 + \dots$ ). Для дальнейшего удобно ввести переменные «пограничного слоя» непосредственно в физическом пространстве

$$\Phi = (\theta - \theta_k) \varepsilon^{-1}, \varphi = \varphi \quad (2.2)$$

3. Покажем, что на поверхности конуса компоненты скорости  $u, w$ , определяемые (2.1), не удовлетворяют уравнению (1.2), которое при  $\theta = \theta_k$  записывается в виде

$$w = \frac{1}{\sin \theta_k} u_\varphi$$

После подстановки сюда (2.1) получим

$$w_0 = \frac{1}{\sin \theta_k} u_{0\varphi}, \quad w_1 = \frac{1}{\sin \theta_k} u_{1\varphi}, \dots \quad (3.1)$$

В теории Гонора<sup>[1]</sup>  $w_0 = 0$  при  $\theta = \theta_k$ , а  $u_{0\varphi} \neq 0$  и, следовательно, (3.1) не удовлетворяется. На неприменимость разложения (2.1) вблизи поверхности конуса указывает также тот факт, что в решении Гонора поверхность конуса не является линией постоянной энтропии.

4. Для нахождения  $u, w$  при  $\theta = \theta_k$  воспользуемся тем же способом, которым Виллет<sup>[2]</sup> определил  $u, w$  на поверхности конуса в сверхзвуковом потоке. Поверхность конуса является поверхностью тока, начинающейся на ударной волне при  $\varphi = \pi$ , вследствие чего энтропия на поверхности конуса имеет то же значение, что и на ударной волне при  $\varphi = \pi$  (см., например, <sup>[3]</sup>).

Если обозначить  $\theta$  для ударной волны при  $\varphi = \pi$  через  $\theta^* = \theta_k + \varepsilon\theta^* + \dots$ , записать условия на скачке при  $\varphi = \pi$ , учесть, что  $p/\rho^\gamma = \text{const}$  на рассматриваемой поверхности тока и исключить  $p$  из уравнения Бернулли (1.4), то получим при  $\theta = \theta_k$

$$u^2 + w^2 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{p}{\rho^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{V^{02}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma+1} \sin^2(\alpha + \theta^*) - \varepsilon^2 \beta (\gamma+1) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{2\beta}{\sin^2(\alpha + \theta^*)} \right] = (1 + 2\beta)V^{02} \quad \left( \beta = \frac{1}{M^{02}(\gamma-1)}, \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad (v=0) \quad (4.1)$$

Предположим, что на поверхности конуса  $u, w, p$  можно представить в виде

$$u = u_0^x + \varepsilon u_1^x + \dots, \quad w = w_0^x + \varepsilon w_1^x + \dots, \quad p = p_0^x + \varepsilon p_1^x + \dots \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) и  $\theta^* = \theta_k + \varepsilon\theta^* + \dots$  в (4.1), разлагая результат по  $\varepsilon$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$u_0^{x2} + w_0^{x2} = V^{02} \cos^2(\alpha + \theta_k) \quad (4.3)$$

$$w_0^x w_1^x + u_0^x u_1^x + V^{02} \left\{ \theta^* \cos(\alpha + \theta_k) \sin(\alpha + \theta_k) + \right. \\ \left. + [\sin^2(\alpha + \theta_k) + 2\beta] \ln \frac{p_0^x}{\rho^0 V^{02} \sin^2(\alpha + \theta_k)} \right\} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.2) в (1.2) при  $\theta = \theta_k$ , аналогично получим

$$w_0^x = \frac{1}{\sin \theta_k} u_{0\varphi}^x, \quad w_1^x = \frac{1}{\sin \theta_k} u_{1\varphi}^x \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3), находим дифференциальное уравнение (при  $\theta = \theta_k$ )

$$u_0^{x2} + \frac{1}{\sin^2 \theta_k} u_{0\varphi}^{x2} = V^{02} \cos^2(\alpha + \theta_k) \quad (4.6)$$

Единственным решением (4.6), удовлетворяющим условию

$$w_0^x = \frac{1}{\sin \theta_k} u_{0\varphi}^x = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \pi$$

будет

$$u_0^x = V^0 \cos(\alpha + \theta_k), \quad w_0^x \equiv 0 \quad (4.7)$$

а из (4.4), (4.5), (4.7) получим

$$u_1^x = V^0 \left[ -\vartheta^* \sin(\alpha + \theta_k) + \frac{\sin^2(\alpha + \theta_k) + 2\beta}{\cos(\alpha + \theta_k)} \ln \frac{\rho^0 V^{02} \sin^2(\alpha + \theta_k)}{\rho_0^x} \right] \quad (4.8)$$

$$w_1^x = -V^0 \frac{\sin^2(\alpha + \theta_k) + 2\beta}{\sin \theta_k \cos(\alpha + \theta_k)} \frac{\rho_{0\varphi}^x}{\rho_0^x}$$

Из (4.7) следует, что величина  $w_0$  при  $\theta = \theta_k$  определяется решением Гонора верно, а величина  $u_0$  — нет.

5. Исследуем поведение решения вблизи поверхности конуса. Из (4.7), (4.8), (1.6) следует, что при  $\theta = \theta_k$

$$v_\theta = -2u_0^x + O(\varepsilon)$$

поэтому в окрестности  $\theta = \theta_k$

$$v = -2u_0^x (\theta - \theta_k) + O[\varepsilon (\theta - \theta_k)] + o(\theta - \theta_k) = -2V^0 \cos(\alpha + \theta_k) \varepsilon \vartheta + o(\varepsilon \vartheta) \quad (5.1)$$

а  $w$  можно представить в виде

$$w = w_0'(\vartheta, \varphi) + \varepsilon w_1^x(\varphi) + o(\varepsilon) \quad (5.2)$$

где  $w_0'(0, \varphi) \equiv 0$ . (Если теория Гонора определяет  $w_0$  правильно не только при  $\theta = \theta_k$ , но и в некоторой окрестности  $\theta = \theta_k$ , то  $w_0' = w_0$ .)

Введем в рассмотрение величину

$$S = \frac{P}{(\varepsilon \rho)^\gamma}$$

Подставляя (5.1), (5.2) в (1.5), отбрасывая малые члены, переходя от  $\theta$  к  $\vartheta$ , получим уравнение для  $S$

$$\vartheta S_\vartheta + [\varepsilon g(\varphi) + h(\vartheta, \varphi)] S_\varphi = 0 \quad (5.3)$$

$$\left( g(\varphi) = -\frac{w_1^x(\varphi)}{2V^0 \cos(\alpha + \theta_k)}, \quad h(0, \varphi) \equiv 0 \right)$$

Общее решение (5.3) имеет структуру

$$S = f \left[ \vartheta^\varepsilon \exp \left( - \int \frac{d\varphi}{g} \right) Q \right] \quad (5.4)$$

Здесь  $f$  — произвольная функция, а функция  $Q$  удовлетворяет уравнению

$$\vartheta Q_\vartheta + (\varepsilon g + h) Q_\varphi - \frac{h}{g} Q = 0 \quad (5.5)$$

с граничным условием  $\vartheta = 0, Q = 1$ .

Из (5.4), (5.5) ясно видно, что при малых  $\vartheta$  функция  $S$  не может быть аппроксимирована конечным отрезком ряда по степеням  $\varepsilon$ , так как такая аппроксимация не имеет места ни для  $\vartheta^\varepsilon$ , ни для  $Q$ .

Например, любой конечный отрезок ряда

$$\vartheta^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln \vartheta} = 1 + \varepsilon \ln \vartheta + \frac{1}{2} (\varepsilon \ln \vartheta)^2 + \dots$$

обращается в бесконечность при  $\vartheta = 0$ , в то время как  $\vartheta^\varepsilon = 0$  при  $\vartheta = 0$ .

Возможность разложения  $S$  в хорошо сходящийся ряд по  $\varepsilon$  связана с возможностью разложения  $\vartheta^\varepsilon$  и  $Q$  в такой ряд. Для  $\vartheta^\varepsilon$  это имеет место при  $\vartheta = O(\varepsilon)$ , так как  $\varepsilon \ln \varepsilon$  мало при малых  $\varepsilon$ ; поведение  $Q$  определяется функцией  $h$ .

Если принять, что  $w_0' = w_0$ , то  $h \sim \sqrt{\vartheta}$  и при  $\vartheta = O(\varepsilon)$  функция  $Q$  представляется рядом

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots$$

Для  $S$  имеем разложение по степеням  $\varepsilon$

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \dots = f \left[ \exp \left( - \int \frac{d\varphi}{g} \right) Q_0 \right] + \varepsilon O(\ln \vartheta) + \dots \quad (5.6)$$

Исследование уравнений системы (1.1) — (1.5) показывает, что не видно препятствий и для разложения других искомых величин в ряды по  $\varepsilon$  при  $\vartheta = O(\varepsilon)$ . Поэтому можно ожидать, что разложение (2.1) представляет решение вне вихревого слоя толщиной  $\vartheta = O(\varepsilon)$ , и для  $S$  при  $\vartheta = O(\varepsilon)$  можно принять

$$S = \frac{P}{(\varepsilon\rho)^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0} + \varepsilon \left( \frac{P_1}{\rho_0} - \frac{P_0\rho_1}{\rho_0^2} - \frac{P_0}{\rho_0} 2 \ln \rho_0 \right) + \dots = S_0 + \varepsilon S_1 + \dots \quad (5.7)$$

Из (5.6), (5.7) получим

$$f \left[ \exp \left( - \int \frac{d\varphi}{g} \right) Q_0 \right] = \frac{P_0}{\rho_0} \quad \text{при } \vartheta = 0, \quad \rho_1 \sim \ln \vartheta \quad \text{при } \vartheta \rightarrow 0$$

Также можно получить, что

$$u_1 \sim \ln \vartheta \quad \text{при } \vartheta \rightarrow 0$$

Если в уравнениях (1.1) — (1.5) перейти от  $\theta$  к  $\vartheta$ , подставить туда разложения (2.1) и получить уравнения для  $u_1, v_1, w_1, p_1, \rho_1$ , то из них можно установить, что если  $w_1 \neq 0$  при  $\vartheta = 0$ , то  $\rho_1, u_1 \sim \ln \vartheta$  при  $\vartheta \rightarrow 0$ , что подтверждает вышесказанное.

Из уравнения (1.3) легко получить, что  $p_0 = O(\varepsilon)$  в вихревом слое, поэтому давление при переходе через вихревой слой толщиной  $\theta - \theta_k = \varepsilon\vartheta = O(\varepsilon^2)$  меняется на величины  $O(\varepsilon^3)$ .

6. Из качественного анализа п. 5 и большого сходства структур вихревых слоев в сверхзвуковом и гиперзвуковом потоках (см., например, [4]) следует ожидать, что разложение (2.1) правильно определяет на поверхности конуса  $p$  и  $w$  с точностью  $O(\varepsilon)$  и правильно представляет решение вне вихревого слоя толщиной  $\theta - \theta_k = O(\varepsilon^2)$ .

Если принять вышесказанное, то  $p_0^* = p_0$  при  $\theta = \theta_k$  и формулы (4.2), (4.7), (4.8) определяют  $u, w$  на поверхности конуса с точностью  $O(\varepsilon)$ , причем  $\vartheta^*$  определяется по формуле

$$\vartheta^* = \frac{\sin^2 \theta_k \cos(\alpha + \theta_k) [\sin^2(\alpha + \theta_k) + 2\beta]}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha + \theta_k)} \times \left\{ \left[ 1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta_k \cos(\alpha + \theta_k)} \right] \ln \left[ 1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta_k \cos(\alpha + \theta_k)} \right] - \frac{\sin \alpha}{\sin \theta_k \cos(\alpha + \theta_k)} \right\} \quad (6.1)$$

Эта формула получается из результатов Гонора [1] путем элементарных, но громоздких вычислений. При  $\alpha \rightarrow 0$  формулы (4.7), (4.8), (6.1) переходят в известные формулы для конуса при  $\alpha = 0$  (см., например, [5]). Отметим, что вихревой слой существует также и вблизи поверхности произвольного конического тела, что связано с обращением в нуль  $w_0$  на поверхности тела [6]. Компоненты скорости на поверхности тела можно вычислить аналогично.

После того как работа была написана, автор познакомился с только что вышедшей статьей Ченга [7], в которой получены аналогичные результаты, однако только для случаев малых и умеренных углов атаки (Ченг разлагал решение в ряды по  $\varepsilon$  и  $\sigma = \sin \alpha / \sin \theta_k$  и ограничивался членами  $O(\sigma^2)$ ).

Поступила 29 IV 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 7.
2. Willett J. E. Supersonic Flow at the Surface of a Circular Cone at Angle of Attack, I. A. S., 1960, vol. 27, № 12.
3. Ferris A. Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack. NASA, Report, 1951, № 1045.
4. Булах Б. М. Сверхзвуковой поток около наклоненного кругового конуса. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
5. Черный Г. Г. Обтекание тел идеальным газом при большой сверхзвуковой скорости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 6.
6. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 1.
7. Cheng H. K. Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies, Jour. Fluid Mech, 1962, February, vol. 12, p. 2.