О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ В СРЕДЕ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. П. Карликов, В. П. Коробейников

(Москва)

Рассматривается задача о движении с постоянной скоростью U плоского бесконечно проводящего поршня в среде с конечной проводимостью, изменяющейся в направлении движения поршня (вдоль оси x) по закону

$$\sigma = sx^{-1} \tag{1}$$

где s — постоянная в области непрерывности параметров газа. Задача для среды с постоянной конечной проводимостью в предположении малости U рассматривалась Коулом [1]. Для случая ударной волны со скачком проводимости задача о плоском поршне с учетом излученной электромагнитной волны решена в работе [2].

В начальный момент времени в покоящемся газе с давлением p_0 и плотностью ρ_0 из начала координат начинает двигаться со скоростью U плоский поршень. В начальный момент времени задано постоянное магнитное поле напряженности $\mathbf{H}_0$, направленное по оси z. По газу будет распространяться ударная волна, резко меняющая параметры газа. Перед ударной волной начальное электромагнитное поле и параметры среды будут возмущаться проходящей электромагнитной волной. Требуется найти зависимость скорости движения газа v, давления p, плотности ρ, магнитного поля $\mathbf{H}$ и других характеристик от координаты x и времени t.

Система уравнений магнитной гидродинамики с учетом токов смещения имеет вид (c — скорость света)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \qquad \rho\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c}jH \qquad \frac{dp}{dt} = -\gamma p\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{\sigma}j^2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -c\frac{\partial E}{\partial x} \qquad -\frac{\partial H}{\partial x} = 4\pi j\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad j = \sigma\left(E + \frac{v}{c}H\right)$$

$$(\mathbf{H}\cdot\mathbf{E} = 0)$$

Граничные условия на ударной волне имеют вид

$$\{\rho(v-D)\} = 0, \qquad \{\rho v(v-D) + p\} = 0 \quad \left\{(v-D)\left(\frac{1}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho v^2\right) + pv\right\} = 0 \tag{3}$$

$$\left\{vH - \nu_m\frac{\partial H}{\partial x}\right\} = 0, \qquad \{H\} = 0, \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

Здесь D — скорость ударной волны, фигурными скобками обозначены разности величин на сторонах поверхности разрыва. На поршне имеем условие $v = U$.

Из соображений теории размерностей [3] следует, что искомые характеристики должны зависеть лишь от одной безразмерной переменной, за которую примем величину $\lambda = x(D_0t)^{-1}$. Введем безразмерные функции

$$H = H_0G(\lambda), \qquad E = H_0F(\lambda), \qquad v = D_0V(\lambda)$$

$$p = \rho_0D_0^2P(\lambda), \qquad \rho = \rho_0R(\lambda), \qquad D = D_0\Delta \qquad (\Delta = \mathrm{const})$$

Здесь D_0 — скорость ударной волны при $H_0 = 0$. В безразмерной форме система (2) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\lambda R' + (RV)' = 0, \qquad R(-\lambda^2V' + \lambda VV') = -\lambda P' + qi \tag{4}$$

$$\lambda(V-\lambda)P' + \gamma\lambda PV' = \frac{(\gamma-1)}{\omega\delta}qi^2, \qquad \lambda G' = \delta^{-1}F', \qquad -\lambda G' = 4\pi i - \delta\lambda^2F'$$

$$i = \omega(F - \delta VG), \quad \omega = sc^{-1}, \qquad \delta = D_0c^{-1}, \quad q = H_0^2(D_0^2\rho_0)^{-1}$$

Условия (3) при $x = Dt$, т. е. при $\lambda = \Delta$, также могут быть записаны в безразмерном виде. Условие на поршне примет вид

$$V = \frac{U}{D_0} = V_n \quad \text{при } \lambda = V_n$$

Кроме того, при $\lambda = \delta^{-1}$, т. е. на переднем фронте электромагнитной волны должно быть выполнено условие непрерывности электрического и магнитного полей.

Задача будет решаться в области между электромагнитной волной и ударной волной (область *1*) и в области между ударной волной и поршнем (область *2*). Найденные в области *1* и в области *2* решения должны сопрягаться в соответствии с условиями на ударной волне.

Ниже для решения будет использован метод малого параметра, за который примем q. Такой метод решения задачи очевидно соответствует либо наличию слабого начального магнитного поля и ударных волн умеренной интенсивности, либо случаю умеренных магнитных полей, но сильных ударных волн.

Решение задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} V &= V_{k0} + qV_{k1} + \ldots, & P &= P_{k0} + qP_{k1} + \ldots \\ R &= R_{k0} + qR_{k1} + \ldots, & G &= G_{k0} + qG_{k1} + \ldots \\ F &= F_{k0} + qF_{k1} + \ldots, & \Delta &= 1 + q\Delta_1 + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

где $k = 1$ в области *1* и $k = 2$ в области *2*. Для искомых функций в нулевом приближении на ударной волне должны выполняться условия

$$\begin{gathered} R_{20}(V_{20} - 1) = -R_{10}, \qquad V_{20}R_{20}(V_{20} - 1) + P_{20} = P_{10} \\ (V_{20} - 1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} P_{20} + \frac{1}{2} R_{20}V_{20}^2\right) + P_{20}V_{20} = -\frac{1}{\gamma - 1} P_{10} \\ 4\pi\delta V_{20} = \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{dG}{d\lambda}\right)_2 - \frac{1}{\omega_1}\left(\frac{dG}{d\lambda}\right)_1 \qquad G_{20} = G_{10} \end{gathered} \tag{6}$$

На поршне, т. е. при $\lambda = V_n$, имеем условие $V_{20} = V_n$.

Рассмотрим решение задачи в области *1*. Подставив (5) с учетом $V_{10} = 0$ в систему (4), получим для нулевого приближения

$$\lambda G_{10}' = \delta^{-1}F_{10}', \qquad -\lambda G_{10}' = 4\pi\omega_1 F_{10} - \delta\lambda^2 F_{10}' \tag{7}$$

Остальные уравнения системы (4) удовлетворяются тождественно.

Решение системы (7) имеет вид

$$F_{10} = c_{10}\left[\frac{1 - \delta\lambda}{1 + \delta\lambda}\right]^{2\pi\omega_1}, \quad G_{10} = -c_{10}4\pi\omega_1 \int \lambda^{-1}(1 - \delta\lambda)^{2\pi\omega_1 - 1}(1 + \delta\lambda)^{-(2\pi\omega_1 + 1)} d\lambda \tag{8}$$

В частности, при $2\pi\omega_1 = 1$ получаем

$$G_{10} = 2c_{10}\left[\ln\frac{(1 + \delta\lambda)}{\lambda} + \frac{\delta\lambda}{1 + \delta\lambda}\right] + c_{20}, \quad F_{10} = c_{10}\frac{1 - \delta\lambda}{1 + \delta\lambda} \tag{9}$$

Рассмотрим решение задачи в области *2*. Подставляя (5) в систему (4), получаем для нулевого приближения уравнения (10)

$$-\lambda R_{20}' + (R_{20}V_{20})' = 0, \qquad R_{20}(V_{20} - \lambda)V_{20}' + P_{20}' = 0, \qquad (V_{20} - \lambda)P_{20}' + \gamma P_{20}V_{20}' = 0$$

$$\lambda G_{20}' = \frac{1}{\delta}F_{20}', \qquad -\lambda G_{20}' = 4\pi i_{20} - \delta\lambda^2 F_{20}' \tag{11}$$

Уравнениям системы (10) удовлетворяет гидродинамическое решение

$$V_{20} = V_n, \qquad P_{20} = \text{const}, \qquad R_{20} = \text{const}$$

Уравнения (11) должны решаться при $V_{20} = \text{const}$. Из системы (11) найдем

$$\begin{gathered} G_{20}' = c_{30}(1 + \delta\lambda)^a(1 - \delta\lambda)^b\lambda^{-1 + 4\pi\omega_2\delta V_{20}} \\ a = -(1 + 2\pi\omega_2 + 2\pi\omega_2\delta V_{20}), \qquad b = -1 + 2\pi\omega_2 - 2\pi\omega_2\delta V_{20} \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, G_{20} находится квадратурой, а затем из второго уравнения системы (11) определяется F_{20}. В общем случае зависимость $G_{20}(\lambda)$ не может быть выписана в простом виде. (Это можно сделать для частных значений параметров, например, при $4\pi\omega = 3$, $3\delta V_{20} = 1$).

Однако, учитывая, что $\lambda \leqslant 1$ в области *2*, а $\delta = D_0 / c$ мало для обычных ударных волн, можно рассмотреть приближенное решение, пренебрегая членом $\delta\lambda$ по сравнению с единицей в соотношениях (12) и в дальнейших вычислениях. Для определения произвольных постоянных, входящих в решение, следует воспользоваться условиями непрерывности электромагнитного поля на ударной волне и на переднем фронте электромагнитной волны.

Найдем первое приближение, т. е. выясним, каким образом наличие начального магнитного поля сказывается в первом приближении на движении газа.

В области *1* и *2* для R_{k1}, V_{k1}, P_{k1} имеем уравнения

$$\begin{gathered} R_{k0}V_{k1}' + (V_{k0} - \lambda) R_{k1}' = 0 \\ R_{k0}(V_{k0} - \lambda) V_{k1}' + P_{k1}' = \Phi_{k1}(\lambda) \\ (V_{k0} - \lambda) P_{k1}' + \gamma P_{k0} V_{k1}' = \Phi_{k2}(\lambda) \end{gathered} \qquad \begin{gathered} \Phi_{k1}(\lambda) = \frac{\omega_k}{\lambda}(F_{k0} - \delta V_{k0}G_{k0}) G_{k0} \\ \Phi_{k2}(\lambda) = \frac{\gamma - 1}{\delta\lambda}\omega_k (F_{k0} - \delta V_{k0} G_{k0})^2 \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь Φ_{k1} и Φ_{k2} — известные функции, зависящие от нулевого приближения; $V_{10} = 0$, P_{10} и R_{10} — постоянные безразмерные значения давления и плотности в невозмущенной среде. Условия на ударной волне для функций V_{k1}, R_{k1}, P_{k1} и G_{k1}

$$\{R_{k0}V_{k1} - R_{k0}\Delta_1 + R_{k1}V_{k0} - R_{k1}\} = 0$$

$$\{(V_{k0} - 1)(R_{k0}V_{k1} + V_{k0}R_{k1}) + V_{k0}R_{k0}(V_{k1} - \Delta_1) + P_{k1}\} = 0$$

$$\begin{gathered} \Big\{(V_{k0} - 1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} P_{k1} + \frac{1}{2} R_{k1}V_{k0}^2 + R_{k0}V_{k0}V_{k1}\right) + \\ + (V_{k1} - \Delta_1)\left(\frac{1}{\gamma - 1} P_{k0} + \frac{1}{2} P_{k0}V_{k0}^2\right) + P_{k0}V_{k1} + V_{k0}P_{k1}\Big\} = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

$$\left\{4\pi\delta V_{k0}(G_{k0}'\Delta_1 + G_{k1}) + 4\pi\delta V_{k1}G_{k0} - \frac{1}{\omega_k}(G_{k0}''\Delta_1 + G_{k1}') + \frac{\Delta_1}{\omega_k} G_{k0}'\right\} = 0$$

$$\{G_{k1} + G_{k0}'\Delta_1\} = 0$$

На поршне для второго приближения имеем условие

$$V_{21} = 0 \quad \text{при } \lambda = U / D_0$$

Условия на электромагнитной волне для первого и следующих приближений

$$P_{1m} = R_{1m} = G_{1m} = F_{1m} = 0 \qquad (m = 1, 2, 3\ldots)$$

Найдем решения систем (13). Решения имеют вид

$$V_{11} = -\int\limits_{1/\delta}^{\lambda} \frac{\Phi_{11} + \Phi_{12}}{\lambda^2 R_{10} - \gamma P_{10}} d\lambda, \qquad R_{11} = \int\limits_{1/\delta}^{\lambda} \frac{R_{10}(\lambda\Phi_{11} + \Phi_{12})}{\lambda(\gamma P_{10} - \lambda^2 R_{10})} d\lambda \tag{15}$$

$$P_{11} = \int\limits_{1/\delta}^{\lambda} \left[\Phi_{11} + \lambda R_{10}\frac{\lambda\Phi_{11} + \Phi_{12}}{\gamma P_{10} - \lambda^2 R_{10}}\right] d\lambda, \quad V_{21} = \int\limits_{V_n}^{\lambda} \frac{(V_{20} - \lambda)\Phi_{21} - \Phi_{22}}{(V_{20} - \lambda)^2 R_{20} - \gamma P_{20}} d\lambda$$

$$\begin{gathered} P_{21} = \int \left[\Phi_{21} - (V_{20} - \lambda) R_{20}\frac{(V_{20} - \lambda)\Phi_{11} - \Phi_{12}}{(V_{20} - \lambda)^2 R_{20} - \gamma P_{20}}\right] d\lambda + c_{21} \\ R_{21} = -\int \frac{R_{20}[(V_{20} - \lambda)\Phi_{11} - \Phi_{12}]\, d\lambda}{(V_{20} - \lambda)[(V_{20} - \lambda)^2 R_{20} - \gamma P_{20}]} + c_{31} \end{gathered} \tag{16}$$

Постоянные c_{21} и c_{31} находятся вместе с Δ_1 из системы трех алгебраических уравнений, которые получаются после подстановки (15) и (16) в первые три уравнения условий (14). Этим полностью решается задача определения функций первого приближения. Аналогично строится решение для последующих приближений.

Таким же способом может быть рассмотрена задача о движении плоского поршня с постоянной скоростью в детонирующей среде, с принятым в рассматриваемой работе законом для изменения σ от x. Изложенный выше метод может быть использован и для решения задачи о распространении плоской детонационной волны с учетом влияния магнитного поля.

Поступила 21 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Cole J. D. Magnetohydrodynamic waves. The Magnetodynamics of conducting fluids, ed. by Bershader D., Stanford, 1959.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Простейшие задачи, содержащие магнитогидродинамические волны, ионизирующие газ. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 3.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е. М., Гостехиздат, 1957.