ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. В. Шарикадзе

(Тбилиси).

Рассмотрим задачу о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными дисками. Диски, отстоящие один от другого на расстоянии h_0, вращаются: один с зависящей от времени угловой скоростью $\omega_1(t)$, другой — с угловой скоростью $\omega_2(t)$. Пусть с первого диска происходит равномерный вдув той же жидкости с переменной от времени скоростью $v_1(t)$ и со второго — со скоростью $v_2(t)$. Жидкость в начальный момент была в покое. Решение этой задачи в работе [1] приведено к таким нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, которые, как указано в статье, можно решить численным способом. В данной статье решение этой задачи сводится к системе интегральных уравнений решаемым методом последовательных приближений.

Уравнения Навье — Стокса, записанные в цилиндрической системе координат, при наличии осевой симметрии и отсутствии массовых сил, можно привести к системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1].

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial w}{\partial t}\right)=w\,\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+4v\,\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=w\,\frac{\partial v}{\partial y}-v\,\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2u+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{2}$$

где

$$u(y,t)=\frac{\tau_0}{r}\,V_r(r,z,\tau), \qquad v(y,t)=\frac{\tau_0}{\tau}\,V_\theta(r,z,\tau) \tag{3}$$
$$w(y,t)=\sqrt{\frac{\tau_0}{\nu}}\,V_z(r,z,\tau)$$

$$p\,\frac{\tau_0}{\rho\nu}=\frac{1}{2}\,\pi_1(t)\,\frac{r^2}{\nu\tau_0}+\pi_2(y,t), \qquad y=\frac{z}{\sqrt{\nu\tau_0}}, \qquad t=\frac{\tau}{\tau_0} \tag{4}$$

Здесь V_r, V_θ, V_z — радиальная, тангенциальная и осевая составляющие вектора скорости. Учитывая граничные условия V_r, V_θ, V_z, определяемые условием прилипания и наличием вдува, и начальные условия — отсутствие скорости движения в начальный момент — для w, v получим следующие предельные условия:

$$w(0,t)=w_1(t), \qquad w(h,t)=w_2(t)$$
$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial y}=\frac{\partial w(h,t)}{\partial y}=0, \qquad w(y,0)=0 \qquad \left(h=\frac{h_0}{\sqrt{\nu\tau_0}}\right) \tag{5}$$

$$v(0,t)=v_1(t), \qquad v(h,t)=v_2(t), \qquad v(y,0)=0 \tag{6}$$

Решение ищем в виде суммы $w(y,t)=F(y,t)+\varphi(y,t)$, где $F(y,t)$ удовлетворяет уравнению (1) с нулевой правой частью и предельным условиям (5), а $\varphi(y,t)$ — решение уравнения [2]

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi_{yy}-\varphi_t\right)=ww_{yyy}+4vv_y \tag{7}$$

удовлетворяющее соответствующим однородным предельным условиям.

Учитывая условия (5), функцию $F(y,t)$ ищем в виде

$$F(y,t)=\psi(y,t)+\Phi(y,t)-y\Phi_y(0,t)-\Phi(0,t) \tag{8}$$

$$\psi(y,t)=\int_0^t \frac{\psi_1(\tau)}{2\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\;y\exp\left(-\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\int_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\;\exp\left(-\frac{(h-y)^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau \tag{9}$$

При этом полагаем, что функция $\psi(y,t)$ должна удовлетворять условиям:

$$\psi(0,t)=w_1(t), \qquad w_y(0,t)=0, \qquad w(y,0)=0 \tag{10}$$

В силу этих граничных условий неизвестные функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ можно определить из системы регулярных интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{gathered}\psi_1(t)+\int_0^t \exp\left(-\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{\psi_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}=w_1(t)\\ \psi_2(t)+\int_0^t \exp\frac{-h^2}{4(t-\tau)}\frac{\psi_1(\tau)\,d\tau}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}-h^2\int_0^t \exp\frac{-h^2}{4(t-\tau)}\frac{\psi_1(\tau)\,d\tau}{4(t-\tau)^{5/2}}=0\end{gathered} \tag{11}$$

Функция $\Phi(y,t)$ — решение уравнения теплопроводности $\Phi_{yy}-\Phi_t=0$, обращающееся в нуль в начальный момент и удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered}\Phi(h,t)-\Phi(0,t)-h\Phi_y(0,t)=w_2(t)-\psi(h,t)=F_1(t)\\ \Phi(h,t)-\Phi(0,t)-h\Phi_y(h,t)=w_2(t)-\psi(h,t)-\psi_y(h,t)=F_2(t)\end{gathered} \tag{12}$$

Представим функцию $\Phi(y,t)$ в виде

$$\Phi(y,t)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_0^t \Phi_1(\tau)\exp\frac{-y^2}{4(t-\tau)}+\Phi_2(\tau)\exp\frac{-(y-h)^2}{4(t-\tau)}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{13}$$

Тогда из граничных условий для $\Phi(y,t)$ для определения функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ получим систему регулярных интегральных уравнений Вольтерра [2]

$$\begin{gathered}\Phi_1(t)+\int_0^t[\Phi_1(\tau)K(t-\tau)+\Phi_2(\tau)L(t-\tau)]\,d\tau=F_1(t)\\ \Phi_2(t)+\int_0^t[\Phi_1(\tau)L(t-\tau)-\Phi_2(\tau)K(t-\tau)]\,d\tau=F_2(t)\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$K(z)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1}{\pi z}}\left[\exp\left(-\frac{h^2}{4z}\right)-1\right],\quad L(z)=\frac{h}{2\sqrt{\pi z^3}}\exp\left(-\frac{h^2}{4z}\right)+K(z) \tag{15}$$

Для определения $\varphi(y,t)$ воспользуемся функцией Грина, построенной Д. Е. Долидзе [2,3,4]

$$G(y,\eta,t)=S(y,\eta,t)+g(y,\eta,t) \tag{16}$$

Здесь

$$S(y,\eta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^y dy\int_{\alpha\eta}^{y-\eta}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4t}\right)d\beta \tag{17}$$

$$\alpha=-1,\quad y\leqslant\mu,\qquad \alpha=1,\quad y\geqslant\mu$$

Функция $g(y,\eta,t)$ — регулярное решение уравнения (7) с нулевой правой частью, обращающееся в нуль в начальный момент и удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered}g(0,\eta,t)=g_y(0,\eta,t)=0,\qquad g(h,\eta,t)=-S(h,y,t)\\ g_y(h,\eta,t)=-S_y(h,y,t),\qquad t>0,\quad 0<\eta<h\end{gathered} \tag{18}$$

Отсюда видно, что задача определения g опять приведется к решению системы двух регулярных интегральных уравнений Вольтерра.

Обычными рассуждениями легко показать, что справедливо равенство [4]

$$\varphi(y,t)=\int_0^t d\tau\int_0^h (ww_{\eta\eta\eta}+4vv_\eta)\,G(y,\eta,t-\tau)\,d\eta \tag{19}$$

и окончательно для $w(y,t)$ получим следующее интегродифференциальное уравнение

$$w(y,t)=F(y,t)+\int_0^t d\tau\int_0^h (ww_{\eta\eta\eta}+4vv_\eta)\,G(y,\eta,t-\tau)\,d\eta \tag{20}$$

Определим $v(y,t)$. Представим решение первого уравнения (2) в виде суммы двух функций

$$v(y,t)=A(y,t)+B(y,t)$$

Функция $A(y,t)$ удовлетворяет первому уравнению (2) с нулевой правой частью и предельным условиям (6), а функция $B(y,t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}-\frac{\partial B}{\partial t}=w\,\frac{\partial v}{\partial y}-v\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

Определение функции $v(y,t)$ сводится к следующим интегродифференциальным уравнениям [3]:

$$v(y,t)=A(y,t)+\int_0^t d\tau\int_0^h (wv_\eta-vw_\eta)\,G(y,\eta,t-\tau)\,d\eta \tag{21}$$

Функцию $A(y,t)$ представим в виде

$$A(y,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\Big[A_1(\tau)\,y\exp\Big(-\frac{y^2}{4(t-\tau)}\Big)+$$
$$+A_2(\tau)(y-h)\exp\Big(-\frac{(h-y)^2}{4(t-\tau)}\Big)\Big]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

первые два из предельных условий (6) запишутся в виде

$$A_1(t)-\int_0^t A_2(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau=v_1(t)\,,\qquad \int_0^t A_1(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau-A_2(t)=v_2(t) \tag{22}$$

где

$$K(z)=\frac{h}{2\sqrt{\pi z^3}}\exp\Big(-\frac{h^2}{4z}\Big)$$

Таким образом определения $w(y,t)$ и $v(y,t)$ сводятся к системе интегродифференциальных уравнений (20) и (21). Беря (20) и (21) с параметром δ и дифференцируя (20) три раза, а (21) один раз под знаком интеграла, справедливость дифференцирования в которых можно легко установить при помощи (17), получим следующую систему:

$$\frac{\partial^n w}{\partial y^n}=\frac{\partial^n F}{\partial y^n}+\delta\int_0^t d\tau\int_0^h (ww_{\eta\eta\eta}+4vv_\eta)\,\frac{\partial^n G}{\partial y^n}\,d\eta\qquad (n=0,1,3) \tag{23}$$

$$\frac{\partial^m v}{\partial y^m}=\frac{\partial^m A}{\partial y^m}+\delta\int_0^t d\tau\int_0^h (wv_\eta-vw_\eta)\,\frac{\partial^m G}{\partial y^m}\,d\eta\qquad (m=0,1) \tag{24}$$

Равенства (20), (23) образуют систему нелинейных интегральных уравнений для определения функции w, w_{yyy}, а (21), (24) систему нелинейных интегральных уравнений для определения v, v_y.

Будем искать эти функции в виде рядов

$$\frac{\partial^n w}{\partial y^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\,\frac{\partial^n w_k}{\partial y^n}\,,\qquad \frac{\partial^0 w}{\partial y^0}=w\qquad (n=0,1,3) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^m v}{\partial y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\,\frac{\partial^m v_k}{\partial y^m}\,,\qquad \frac{\partial^0 v}{\partial y^0}=v\qquad (m=0,1) \tag{26}$$

Для определения членов ряда получим следующие рекуррентные формулы:

$$\frac{\partial^n w_0}{\partial y^n} = \frac{\partial^n F}{\partial y^n}, \qquad \frac{\partial^m v_0}{\partial y^m} = \frac{\partial^m A}{\partial y^m} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^n w_{k+1}}{\partial y^n} = \int_0^t d\tau \int_0^h \sum_{\alpha=0}^{k} \left(w_\alpha \frac{\partial^3 w_{k-\alpha}}{\partial \eta^3} + 4 v_\alpha \frac{\partial v_{k-\alpha}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^n G}{\partial y^n} d\eta \tag{28}$$

$$\frac{\partial^m v_{k+1}}{\partial y^m} = \int_0^t d\tau \int_0^h \sum_{\alpha=0}^{k} \left(w_\alpha \frac{\partial v_{k-\alpha}}{\partial \eta} - v_\alpha \frac{\partial w_{k-\alpha}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^m G}{\partial y^m} \partial \eta \tag{29}$$

Сходимость рядов легко доказывается способом, примененным Одквистом [5]. Нетрудно показать, что имеют место следующие неравенства: $(M, H = \text{const})$

$$\left|\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right|, \quad \left|\frac{\partial^m A}{\partial y^m}\right| < M, \qquad \int_0^t d\tau \int_0^h \left|\frac{\partial^n G}{\partial y^n}\right| d\eta \quad \int_0^t d\tau \int_0^h \left|\frac{\partial^m G}{\partial y^m}\right| d\eta < H\sqrt{t}$$

Для упрощения выкладок покажем сходимость ряда (25). Доказательство сходимости ряда (26) после этого нетрудно усмотреть.

В силу (25) и (28) мажоранта рядов (25) имеет вид [3]

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k C_k \quad \left(C_0 = M, \; C_{k+1} = 5MH\sqrt{t} \sum_{\alpha=0}^{k} C_\alpha C_{k-\alpha}\right)$$

Легко проверить, что справедливо равенство $C = C_0 + 5MH\sqrt{t}\delta C^2$. При соблюдении неравенства $20M^2H\delta\sqrt{t} < 1$, имеем

$$C = \frac{1}{10MH\delta\sqrt{t}} \left(1 - \sqrt{1 - 20M^2H\delta\sqrt{t}}\right)$$

В этом случае ряды (25) сходятся абсолютно и равномерно для конечных t. Для ряда (26) абсолютная и равномерная сходимость имеет место при

$$C^\circ = \frac{1}{4MH\delta\sqrt{t}} \left(1 - \sqrt{1 - 8M^2H\delta\sqrt{t}}\right)$$

и так как приведенные решения получаются из (20) и (21) при $\delta = 1$, то ряды (25) и (26) будут давать решение, если $20M^2H\sqrt{t} < 1$

Для нахождения давления нужно найти функции $\pi_1(t)$ и $\pi_2(y, t)$, которые определятся после решения задачи (1) — (6) из уравнений

$$\pi_1(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v^2 - u^2 - w\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \pi_2(t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - w\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

Эти уравнения справедливы и для дисков с конечным радиусом, если радиус R велик по сравнению с расстоянием R_0 между дисками. Для дисков с конечным радиусом $R \gg R_0$ можно найти моменты сопротивления [1]

$$M_0(t) = \frac{\pi\rho R^4}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\tau_0^3}}\frac{\partial v(0, t)}{\partial y}, \quad M_1(t) = \frac{\pi\rho R^4}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\tau_0^3}}\frac{\partial v(h, t)}{\partial y}$$

Поступила 3 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. Нестационарное течение с теплопередачей в вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками при наличии вдува. ДАН СССР, 1958, т. 119, № 2.
2. Долидзе Д. Е. О нестационарном течении вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. ДАН СССР, 1957, т. 117, № 3.
3. Джорбенадзе Н. П. О нестационарном течении вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. Сообщения АН ГрузССР, Тбилиси, 1960.
4. Долидзе Д. Е. Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1960.
5. Odqvist S. F. K. G. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Mathem. Zeitschr., 1930, 32, 329—375.