К ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Л. С. Гноенский
(Москва)

1. Предполагается, что поведение преследующего объекта M описывается уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\,x_k + c_j(t)\,u(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.1}$$

поведение преследуемого объекта N уравнениями

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{r} b_{jk}(t)\,y_k + g_j(t)\,v(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.2}$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + c(t)\,u(t), \qquad \frac{dy}{dt} = B(t)\,y + g(t)\,v(t) \tag{1.3}$$

Векторы $x(x_1, \ldots, x_r)$ и $y(y_1, \ldots, y_r)$ удовлетворяют начальным условиям

$$x_1(0) = x_{10}, \ldots, x_r(0) = x_{r0}, \qquad y_1(0) = y_{10}, \ldots, y_r(0) = y_{r0}, \tag{1.4}$$

а управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$ — условиям

$$|u(t)| \leqslant m, \quad |v(t)| \leqslant n \tag{1.5}$$

Коэффициенты $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$, $c_j(t)$, $g_j(t)$ предполагаются r раз дифференцируемыми функциями. Предположим также, что при выборе управляющей функции $u(t)$ функция $v(t)$ уже известна.

В работах [1,2] сформулирована следующая задача. Если при $t = t_1$ выполняются равенства

$$x_1(t_1) = y_1(t_1), \ldots, x_r(t_1) = y_r(t_1)$$

то t_1 называется моментом встречи. Пусть заданы управления $v(t)$ и $u(t)$. Наименьшее положительное значение t, для которого осуществляется встреча, обозначим через T_{uv}. Положим

$$T_v = \min\nolimits_u T_{uv} \qquad T^0 = \max\nolimits_v T_v = \max\nolimits_v \min\nolimits_u T_{uv}$$

Требуется найти такую пару управлений $u^0(t)$, $v^0(t)$ — (эти управления называются оптимальными) — для которой $T_{u^0v^0} = T^0$. Величина T^0 может служить критерием при выборе параметров, определяющих движение объекта M. В работах [1,2] приводятся необходимые условия, которым должны удовлетворять $u^0(t)$, $v^0(t)$. Однако эффективный способ отыскания оптимальных управлений пока не указан. Поэтому представляют интерес оценки времени, за которое может быть обеспечена встреча при любом поведении объекта N. В предлагаемой заметке для несколько иного, чем в работе [1] определения встречи излагается способ нахождения одной такой оценки. Пусть заданы некоторые числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Моментом встречи t_1 будем называть такое $t_1 > 0$, для которого выполняются условия

$$|x_1(t_1) - y_1(t_1)| \leqslant \varepsilon_1, \qquad |x_2(t_1) - y_2(t_1)| \leqslant \varepsilon_2 \tag{1.6}$$

Принадлежащее $[0, \infty)$ множество L точек T определим следующим образом. Если $T \in L$, то для любой управляющей функции $v(t)$ найдется хотя бы одна функция $u(t)$, такая, что на $v(t)$ и $u(t)$ будет реализована встреча в момент T.

Ниже излагается метод определения принадлежности точки T множеству L.

Для любого момента T из L и любого управления $v(t)$ указан способ определения управления $u(t)$, реализующего встречу в момент T.

Отметим, что больший интерес представляет случай, когда поведение преследуемого объекта заранее неизвестно. Однако можно указать задачи, когда имеет место и изложенная выше постановка.

Решения уравнений (1.1), (1.2), как известно, могут быть представлены в виде

$$x_j(T) = x_j^0(T) + \int_0^T K_j(\tau) u(\tau) d\tau, \qquad y_j(T) = y_j^0(T) + \int_0^T G_j(\tau) v(\tau) d\tau \tag{1.7}$$

$$x_j^0(T) = \sum_{i=1}^r \varphi_{ij}(T) x_{i0}, \qquad K_j(\tau) = \sum_{i=1}^r \varphi_{ij}(T)(\psi_i(\tau), c(\tau)) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Здесь векторы $\varphi_i(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{ir})$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = A(t)\varphi \tag{1.8}$$

с начальными условиями $\varphi_{ij}(0) = \delta_{ij}$, векторы $\psi_i(\psi_{i1}, \ldots, \psi_{ir})$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*(t)\psi \tag{1.9}$$

с начальными условиями $\psi_{ij}(0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Аналогичные формулы имеют место для $y_j^\circ(T)$, $G_j(\tau)$.

Условия встречи (1.6) в момент времени T имеют вид

$$\left| \Delta_j(T) + \int_0^T G_j(\tau) v(\tau) d\tau - \int_0^T K_j(\tau) u(\tau) d\tau \right| \leqslant \varepsilon_j$$

$$\Delta_j(T) = y_j^0(T) - x_j^0(T) \qquad (j = 1, 2) \tag{1.10}$$

Множества управляющих функций $u(t)$, соответственно $v(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^T K_1(\tau) u(\tau) d\tau = a, \qquad \int_0^T G_1(\tau) v(\tau) d\tau = b$$

обозначим через $U(a)$, $V(b)$. Для любых a из $[-A_T, A_T]$, b из $[-B_T, B_T]$ найдутся управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$, принадлежащие этим множествам;

$$A_T = m\int_0^T |K_1(\tau)| d\tau, \qquad B_T = n\int_0^T |G_1(\tau)| d\tau \tag{1.11}$$

Положим

$$\alpha^+(a) = \sup_u \int_0^T K_2(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \alpha^-(a) = \inf_u \int_0^T K_2(\tau) u(\tau) d\tau, \quad u \in U(a)$$

$$\beta^+(b) = \sup_v \int_0^T G_2(\tau) v(\tau) d\tau, \quad \beta^-(b) = \inf_v \int_0^T G_2(\tau) v(\tau) d\tau, \quad v \in V(b)$$

Если $T \in L$, то выполняются условия

$$\Delta_1 + B_T - A_T \leqslant \varepsilon_1, \qquad \Delta_1 - B_T + A_T \geqslant -\varepsilon_1 \tag{1.12}$$

Действительно, пусть, например, нарушается первое из этих условий, тогда для управляющей функции

$$v(\tau) = n \operatorname{sign} G_1(\tau) \qquad (\tau \in [0, T])$$

нельзя отыскать функцию $u(\tau)$, реализующую встречу в момент T. Предположим, что для данного T условия (1.12) выполнены. Пусть $b \in [-B_T, B_T]$. Положим

$$\gamma^+(b, \varepsilon_1) = \Delta_2 + \beta^+(b) - \sup_a \alpha^+(a)$$

$$\gamma^-(b, \varepsilon_1) = \Delta_2 + \beta^-(b) - \inf_a \alpha^-(a)$$

$$a \in [\Delta_1 + b - \varepsilon_1, \Delta_1 + b + \varepsilon_1] \cap [-A_T, A_T]$$

Для того чтобы $T \in L$ необходимо, чтобы для любого b из $[-B_T, B_T]$ удовлетворялись неравенства

$$\gamma^+(b, \varepsilon_1) - \varepsilon_2 \leqslant 0, \quad \gamma^-(b, \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \geqslant 0 \tag{1.13}$$

Пусть нарушается одно из этих условий, например первое, и для некоторого b_1

$$\Delta_2 + \beta^+(b_1) - \sup_a \alpha^+(a) > \varepsilon_2, \qquad a \in [\Delta_1 + b_1 - \varepsilon_1, \Delta_1 + b_1 + \varepsilon_1]$$

Тогда для функции $v(\tau)$, на которой достигается $\beta^+(b_1)$ (ниже будет указан способ построения такой функции), нельзя найти управление $u(\tau)$, удовлетворяющее сразу двум условиям (1.12), (1.13). Возможность эффективной проверки этих условий будет рассмотрена в п. 2.

Пусть заданы $a \in [-A_T, A_T]$, $b \in [-B_T, B_T]$. Через $u^+(\tau, a)$, $u^-(\tau, a)$, $v^+(\tau, b)$, $v^-(\tau, b)$ обозначим функции от τ, на которых реализуются соответственно $\alpha^+(a)$, $\alpha^-(a)$, $\beta^+(b)$, $\beta^-(b)$. Положим

$$K(\tau) = \frac{K_2(\tau)}{K_1(\tau)}, \qquad G(\tau) = \frac{G_2(\tau)}{G_1(\tau)}$$

$$K^+ = \sup_\tau K(\tau), \qquad K^- = \inf_\tau K(\tau), \qquad G^+ = \sup_\tau G(\tau), \qquad G^- = \inf_\tau G(\tau) \qquad (\tau \in [0, T])$$

$$I(x, y) = m \int\limits_{\sigma(x, y)} |K_1(\tau)|\, d\tau, \qquad E(x, y) = n \int\limits_{\delta(x, y)} |G_1(\tau)|\, d\tau$$

Здесь $\sigma(x, y)$, $\delta(x, y)$ — принадлежащие $[0, T]$ множества такие, что если $\tau \in \sigma(x, y)$, то $y > K(\tau) > x$, соответственно, если $\tau \in \delta(x, y)$, то $y > G(\tau) > x$.

В дальнейшем потребуются следующие свойства функций $K(\tau)$, $G(\tau)$. Каждое из уравнений

$$K(\tau) = d, \quad G(\tau) = d$$

где d — произвольное число — может иметь на $[0, T]$ лишь конечное число корней.

Достаточным условием для этого является условие независимости векторов $c_1^0(\tau), \ldots, c_r^0(\tau)$, соответственно $g_1^0(\tau), \ldots, g_r^0(\tau)$ (см. например, [2]), где

$$c_1^0(\tau) = c(\tau), \qquad c_j^0(\tau) = -A(\tau)\, c_{j-1}^0 + \frac{dc_{j-1}^0(\tau)}{d\tau} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

$$g_1^0(\tau) = g(\tau), \qquad g_j^0(\tau) = -B(\tau)\, g_{j-1}^0(\tau) + \frac{dg_{j-1}^0(\tau)}{d\tau} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Доказательство этого факта производится аналогично доказательству теоремы 15 гл. 3 работы [2].

Покажем еще, что $K(\tau)$ не может иметь на $(0, T)$ точек разрыва первого рода. Если в точке τ_1 функция $K(\tau)$ имеет разрыв первого рода, то это означает, что $K_1(\tau_1) = 0$, $K_2(\tau_1) = 0$.

Из [1.7] следует:

$$K_2^{(l)}(\tau) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i2}(T)(\psi_i(\tau), c_{l+1}^0(\tau)) = \left(\sum_{i=1}^{r} \varphi_{i2}(T)\psi_i(\tau), c_{l+1}^0(\tau)\right) \quad (l = 1, \ldots r-1)$$

Заметим теперь, что в точке τ_1 хотя бы одна из первых $r-1$ производных функций $K_2(\tau)$ должна быть отлична от нуля. Действительно, в противном случае, равен нулю вектор

$$E = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i2}(T)\, \psi_i(\tau_1)$$

так как система уравнений

$$(E, c_l^0(\tau_1)) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

вследствие линейной независимости векторов $c_1^0(\tau_1), \ldots, c_r^0(\tau_1)$ может иметь только тривиальное решение. Но если вектор E — нулевой, то так как векторы $\psi_i(\tau_1)$ образуют фундаментальную систему, должны быть равны нулю все числа $\varphi_{12}(T), \ldots, \varphi_{r2}(T)$, а это невозможно, так как обратился бы в нуль в точке T определитель Вронского системы (1.8).

Аналогичными свойствами обладает и функция $K_1(\tau)$. Пусть в точке τ_1

$$K_1(\tau_1) = K_1'(\tau_1) = \ldots = K_1^{(s-1)}(\tau_1) = K_2(\tau_1) = K_2'(\tau_1) = \ldots K_2^{(s-1)}(\tau_1) = 0$$

и хотя бы одно из значений $K_1^{(s)}(\tau_1)$, $K_2^{(s)}(\tau_1)$ отлично от нуля.

По правилу Лопиталя

$$\lim_{\tau\to\tau_1} \frac{K_2(\tau)}{K_1(\tau)} = \lim_{\tau\to\tau_1} \frac{K_2^{(s)}(\tau)}{K_1^{(s)}(\tau)}$$

Так как $s \leqslant r-1$, то $K_2^{(s)}(\tau)$ — непрерывная функция и если $K_1^{(s)}(\tau_1) \neq 0$, то

$$\lim_{\tau\to\tau_1+0} \frac{K_2^{(s)}(\tau)}{K_1^{(s)}(\tau)} = \lim_{\tau\to\tau_1-0} \frac{K_2^{(s)}(\tau)}{K_1^{(s)}(\tau)}$$

В работе [3] было показано, что

$$u^+(\tau, a) = m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(y_0(a), K^+)$$

$$u^+(\tau, a) = -m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(K^-, y_0(a))$$

где $y_0(a)$ — корень уравнения

$$I(K^-, y) = \frac{A_T - a}{2}, \qquad y \in [K^-, K^+] \tag{1.14}$$

$$u^-(\tau, a) = -m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(y_1(a), K^+)$$

$$u^-(\tau, a) = m \operatorname{sign} K_1(\tau) \quad \text{при } \tau \in \sigma(K^-, y_1(a))$$

где $y_1(a)$ — корень уравнения

$$I(y, K^+) = \frac{A_T - a}{2}, \qquad y \in [K^-, K^+] \tag{1.15}$$

Подставив в приведенные выше формулы вместо u, m, K, σ, y, A, a, I соответственно v, n, G, δ, x, B, b, E, получим выражения для $v^+(\tau, b)$, $v^-(\tau, b)$. Из указанных выше свойств функции $K(\tau)$ следует, что левые части (1.14). (1.15) есть монотонно изменяющиеся в строгом смысле непрерывные функции y. Так как

$$a \in [-A_T, A_T], \qquad I(K^-, K^-) = 0, \qquad I(K^-, K^+) = A_T$$

то уравнения (1.14), (1.15) имеют единственные решения. Рассмотрим теперь момент времени T, для которого выполняются условия (1.12), (1.13). Пусть на $[0, T]$ задана управляющая функция $v(\tau)$. Построим управляющую функцию $u(\tau)$, реализующую встречу в момент T. Тем самым будет доказано также, что условия (1.12), (1.13) являются необходимыми и достаточными условиями принадлежности T множеству L. Положим

$$n_1(v) = \Delta_1 + \int_0^T G_1(\tau) v(\tau) d\tau, \qquad n_2(v) = \Delta_2 + \int_0^T G_2(\tau) v(\tau) d\tau$$

Из определения (1.11) для B_T следует, что

$$\left| \int_0^T G_1(\tau) v(\tau) d\tau \right| \leqslant B_T$$

В силу (1.12) $\alpha^+(a)$, $\alpha^-(a)$, рассматриваемые как функции от a определены на $[n_1(v) - \varepsilon_1, n_1(v) + \varepsilon_1] \cap [-A_T, A_T]$.

Из указанных выше свойств функции $K(\tau)$ следует, что $\alpha^+(a)$ и $\alpha^-(a)$ — непрерывные на $[-A_T, A_T]$ функции. Через a^+ и a^- обозначим точки, на которых достигается соответственно

$$\sup_a \alpha^+(a), \ \inf_a \alpha^-(a) \ \text{при } a \in [n_1(v) - \varepsilon_1, n_1(v) + \varepsilon_1] \cap [-A_T, A_T]$$

Покажем, что

$$u(\tau) \equiv u^+(\tau, a^+) \quad \text{при } n_2(v) \geqslant \alpha^+(a^+)$$

Действительно $u^+(\tau, a^+) \in U(a^+)$ и, следовательно, первое из условий (1.6) выполнено. Второе условие (1.6) выполняется, так как в силу (1.13)

$$\Delta_2 + \beta^+(n_1(v)) - \alpha^+(a^+) \leqslant \varepsilon_2$$

и вместе с тем

$$\Delta_2 + \beta^+(n_1(v)) \geqslant n_2(v) \geqslant \alpha^+(a^+)$$

Аналогично можно показать, что

$$u(\tau) \equiv u^-(\tau, a^-) \qquad \text{при } n_2(v) \leqslant \alpha^-(a^-)$$

Пусть теперь

$$\alpha^-(a^-) < n_2(v) < \alpha^+(a^+) \tag{1.16}$$

Имеются две возможности:

1) Хотя бы одно из уравнений относительно a

$$\alpha^+(a) = n_2(v), \qquad \alpha^-(a) = n_2(v) \tag{1.17}$$

имеет корень на интервале $[n_1(v) - \varepsilon_1,\ n_1(v) + \varepsilon_1]$

Пусть первое из этих уравнений имеет корень в точке a_0, тогда

$$u(\tau) \equiv u^+(\tau, a_0)$$

Если второе уравнение имеет корень в точке a_1, то

$$u(\tau) \equiv u^-(\tau, a_1)$$

2) Ни одно из уравнений (1.17) не имеет корней на $[n_1(v) - \varepsilon_1,\ n_1(v) + \varepsilon_1]$. В этом случае в силу условия (1.16) и равенств

$$\alpha^-(A_T) = \alpha^+(A_T), \qquad \alpha^-(-A_T) = \alpha^+(-A_T)$$

имеет место соотношение

$$\alpha^-(n_1(v)) < n_2(v) < \alpha^+(n_1(v)) \tag{1.18}$$

Введем зависящую от параметра λ функцию

$$u_\lambda(\tau) = \lambda u^+(\tau, n_1(v)) + (1-\lambda)\, u^-(\tau, n_1(v)) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{1.19}$$

Эта функция при любом λ из (1.19) принадлежит множеству $U(n_1(v))$. Действительно

$$|u_\lambda(\tau)| \leqslant \lambda\, |u^+(\tau, n_1(v))| + (1-\lambda)\, |u^-(\tau, n_1(v))| = m$$

$$\int_0^T K_1(\tau)\, u_\lambda(\tau)\, d\tau = \lambda \int_0^T K_1(\tau)\, u^+(\tau, n_1(v))\, d\tau + (1-\lambda) \int_0^T K_1(\tau)\, u^-(\tau, n_1(v))\, d\tau = n_1(v)$$

Линейное относительно λ уравнение

$$\lambda\alpha^+(n_1(v)) + (1-\lambda)\,\alpha^-(n_1(v)) = n_2(v) \tag{1.20}$$

имеет в силу (1.18) принадлежащий (0,1) корень

$$\lambda_0 = \frac{n_2(v) - \alpha^-(n_1(v))}{\alpha^+(n_1(v)) - \alpha^-(n_1(v))}$$

Таким образом

$$u(\tau) \equiv u_{\lambda_0}(\tau)$$

2. Здесь рассматривается вычислительная сторона поставленной задачи. Определение $K_j(\tau)$, $G_j(\tau)$, $x_j^0(T)$, $y_j^0(T)$ сводится, как это следует из (1.7), к вычислению нормальных фундаментальных систем решений уравнений (1.8), (1.9). Методы нахождения этих решений при помощи цифровых быстродействующих машин или моделей непрерывного действия хорошо известны. Проверка условия (1.12) не вызывает затруднений, так как A_T и B_T вычисляются по простым формулам (1.11). Остановимся на проверке условий (1.13). Функция $\alpha^+(a)$ на интервале $[-A_T, A_T]$ имеет не более одного экстремума.

Действительно, из определения $y_0(a)$ и ограничений, наложенных на функцию $K(\tau)$, следует, что $y_0(a)$ монотонно убывает в строгом смысле от значения K^+ до значения K^-, когда a изменяется от $-A_T$ до A_T. Покажем, что

$$\frac{d\alpha^+(a)}{da} = y_0(a) \tag{2.1}$$

Из определения $u^+(a)$ следует, что

$$\frac{\alpha^+(a+\Delta a) - \alpha^+(a)}{\Delta a} = \frac{2m}{\Delta a} \int_{\omega(\Delta a)} K(\tau)\, K_1(\tau)\, \operatorname{sign} K_1(\tau)\, d\tau$$

где,

$$\omega(\Delta a) = \sigma(y_0(a+\Delta a),\ y_0(a))$$

Применяя обобщенную теорему о среднем, и учитывая (1.14), что

$$m\int\limits_{\omega(\Delta a)} K_1(\tau)\,\mathrm{sign}\,K_1(\tau)\,d\tau = \frac{\Delta a}{2},\quad y_0(a+\Delta a) < K(\tau) < y_0(a)\quad \text{при } \tau \in \omega(\Delta a)$$

получаем, переходя к пределу (2.1). Соответственно

$$\frac{d\beta^+(b)}{db} = x_0(b),\qquad \frac{d\alpha^-(a)}{da} = y_1(a),\qquad \frac{d\beta^-(b)}{db} = x_1(b) \tag{2.2}$$

Здесь $x_0(b)$ монотонно убывает в строгом смысле, а $y_1(a)$ и $x_1(b)$ монотонно возрастают в строгом смысле. Для проверки (1.13) нужно вычислять

$$\zeta^+(b) = \sup_a \alpha^+(a),\qquad a \in [\Delta_1 + b - \varepsilon_1,\ \Delta_1 + b + \varepsilon_1],\qquad b \in [-B_T,\ B_T]$$

Если функция $y_0(a)$ на интервале $(\Delta_1 - B_T,\ \Delta_1 + B_T) \cap [-A_T,\ A_T)$ не обращается в нуль и положительна, то для заданного b

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(\Delta_1 + b + \varepsilon_1)\quad \text{при } \Delta_1 + b + \varepsilon_1 \leqslant A_T$$

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(A_T)\quad \text{при } \Delta_1 + b + \varepsilon_1 > A_T$$

Если функция $y_0(a)$ отрицательна, то

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(\Delta_1 + b - \varepsilon_1) \text{ при } \Delta_1 + b - \varepsilon_1 \geqslant -A_T,\ \zeta^+(b) = \alpha^+(-A_T) \text{ при } \Delta_1 + b - \varepsilon_1 < -A_T$$

Если $y_0(a)$ в точке $a^* \in [\Delta_1 - B_T,\ \Delta_1 + B_T] \cap [-A_T,\ A_T]$ обращается в нуль, то

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(\Delta_1 + b + \varepsilon_1)\qquad \text{при } b \in [-B_T,\ a^* - \Delta_1 - \varepsilon_1]$$

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(a^*)\qquad \text{при } b \in [a^* - \Delta_1 - \varepsilon_1,\ a^* - \Delta_1 + \varepsilon_1]$$

$$\zeta^+(b) = \alpha^+(\Delta_1 + b - \varepsilon_1)\qquad \text{при } b \in [a^* - \Delta_1 + \varepsilon_1,\ B_T]$$

Аналогичные соотношения легко выписать и для

$$\zeta^-(b) = \inf_a \alpha^-(a),\qquad a \in [\Delta_1 + b - \varepsilon_1,\ \Delta_1 + b + \varepsilon_1],\qquad b \in [-B_T,\ B_T]$$

Таким образом функции

$$\beta^+(b),\ \zeta^+(b),\ \beta^-(b),\ \zeta^-(b)$$

имеют очень простой вид. Поэтому графики этих функций могут быть построены с заданной степенью точности, если вычислить значения функций и их производных в сравнительно небольшом количестве точек.

Остановимся на способе вычисления этих функций в фиксированных точках. (Тем самым будет показана возможность эффективной проверки условий (1.13)). Вычисление $\alpha^+(a)$ сводится к нахождению функции $u^+(a)$. Отыскивать корень $y_0(a)$ уравнения (1.14) удобнее всего каким-либо методом последовательных приближений, например методом ложного положения. Так как левая часть в (1.14) есть монотонно возрастающая в строгом смысле функция y, то для определения $y_0(a)$ с заданной степенью точности понадобится вычислить значения $I(K^-,\ y)$ в небольшом количестве точек. Для вычисления $I(K^-,\ y)$ при заданном y нужно найти множество $\sigma(K^-,\ y)$. Граничные точки этого множества есть корни уравнения относительно τ

$$K(\tau) = y$$

Как отмечалось выше, это уравнение может иметь на $[0, T]$ лишь конечное число корней и, следовательно, $\sigma(K^-,\ y)$ состоит из конечного числа интервалов и изолированных точек.

Поступила 5 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Келенджеридзе Д. Л. К теории оптимального преследования. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 3.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
3. Гноенский Л. С. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.