

Решение системы уравнений (12) определяет ступенчатую функцию, аппроксимирующую искомую функцию  $z_k(t)$  на интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Обозначая

$$\psi_\lambda(z_{k\xi}) = Z_{k\xi} \quad (13)$$

и вводя обратную функцию

$$z_{k\xi} = \zeta_\lambda(Z_{k\xi}) \quad (14)$$

можно преобразовать систему уравнений (12) к виду

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} e_{\mu\xi} Z_{k\xi} - \sum_{\xi=1}^{\mu} l_{\mu\xi} Z_k + \zeta_\lambda(Z_{k\mu}) = \Gamma_k(\alpha_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, \nu) \quad (15)$$

который представляется более простым по сравнению с системой (12), так как в каждом из уравнений системы (15) содержится лишь по одному нелинейному слагаемому.

Поступила 21 VI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.

### ОШИБКИ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОШИБКИ В СКОРОСТИ

И. Б. Челпанов

(Ленинград)

Рассматривается поведение навигационного гироскопического прибора (гироскопа, гировертикали), находящегося на основании, которое движется по поверхности Земли по произвольному закону. Если прибор является автономным, т. е. на него не поступают данные о движении основания от посторонних приборов, то он может быть сделан невозмущаемым (инвариантным по отношению к движению основания) в результате вполне определенного выбора структуры прибора и значений его параметров.

Известно, однако, что ошибка автономного невозмущаемого навигационного прибора, обусловленная ненулевыми начальными условиями, не затухает. Если же требование автономности не накладывать, т. е. предполагать, что скорость движения основания может быть определена в каждый момент времени по показаниям других навигационных приборов (точнее, если считать точно известными проекции вектора скорости на географические оси), то условие невозмущаемости не определяет, по-видимому, однозначно динамические характеристики навигационного прибора, и он может быть инвариантным по отношению к движению основания при любом периоде свободных колебаний и при любом затухании. Рассмотрению способов построения схем невозмущаемых гироскопических приборов, в которых автономные условия невозмущаемости не выполняются, посвящены работы Глитчера [1], А. Ю. Ишлинского, Я. Н. Ройтенберга и его учеников, В. А. Боднера и В. П. Селезнева [2] и др.

В пользу принципиальной возможности построения такого прибора можно привести следующие доводы. Пусть гироскопический прибор имеет произвольный период и произвольный коэффициент демпфирования, причем оба эти параметра точно известны. Тогда, зная в каждый момент проекции вектора скорости основания, можно точно рассчитать баллистическую ошибку прибора. Этот расчет может производить независимое счетно-решающее устройство. Если считать, что необходимые операции производятся идеально точно, то в результате находится поправка на показание прибора, после введения которой получается точное значение навигационного параметра независимо от периода и коэффициента демпфирования.

В действительности же создание идеального невозмущаемого прибора с произвольными параметрами невозможно по нескольким причинам:

1. Параметры прибора известны неточно.
2. Измерение скорости производится с некоторыми ошибками.
3. Существуют ошибки преобразования скорости в счетно-решающем устройстве.

Поэтому неизбежно возникает вынужденная составляющая ошибки, зависящая от параметров прибора. При выборе параметров вследствие этого приходится идти на компромисс. С одной стороны, желательно, чтобы период был возможно меньшим, а демпфирование — возможно большим, чтобы обеспечить достаточно быстрое затухание ошибки от ненулевых начальных условий. С другой стороны, период не должен слишком отличаться от периода Шулера, а демпфирование должно быть возможно меньшим, чтобы ошибка от нарушения условий невозмущаемости не была чрезмерной. Наивыгоднейшие значения параметров зависят от соотношения между возможными величинами начальных условий и ошибками в измерении и преобразовании скорости. Анализ ошибок прибора и определению наиболее выгодных значений параметров и посвящена настоящая работа.

Для определенности ниже рассматривается дифференциальное уравнение движения однороторного гироскопа с произвольным периодом и демпфированием.

Известно, что вид системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение гироскопа, существенно зависит от его движения вокруг оси «север-юг». Для двухроторного демпфированного гироскопа со стабилизацией вокруг этой оси система уравнений движения имеет шестой порядок. Для однороторного гироскопа, для которого стабилизация вокруг этой оси отсутствует, необходимо, вообще говоря, учитывать инерцию колец подвеса, что также повышает порядок до шестого. При этом выполнение хорошо известных условий Шулера не обеспечивает невозмущаемости гироскопа.

Однако при решении поставленной задачи оценки влияния только ошибки измерителя скорости представляется возможным описывать свойства гироскопа предельно упрощенными уравнениями: системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Несмотря на то что такое описание является весьма приближенным и некоторые динамические особенности в этом случае теряются, все же такое упрощение (широко использованное в прошлом, например, Б. В. Булгаковым и Е. Л. Николаи) представляется допустимым и целесообразным, потому что при этом, с одной стороны, сохраняются основные динамические свойства (колебательность ошибки, возможность уменьшения ошибки теоретически до нуля при нулевых начальных условиях, характер изменения величин ошибок в зависимости от параметров и т. д.), а с другой, — оказывается возможным получить результаты в конечном виде. Заметим, что при решении сходной задачи о накоплении баллистических девиаций Б. В. Булгаков [3] использовал ту же идеализацию.

По отношению к более сложной и более близкой к реальным условиям постановке задачи такая идеализация даёт возможность выделить влияние только одного фактора — неидеальности измерителя скорости, т. е. оценить ошибки в случае, когда гироскоп работает при прочих идеальных условиях (качка полностью отсутствует, что равносильно идеальной стабилизации от постороннего прибора вокруг оси север-юг; инерцией кардановых колец можно пренебречь).

1. Выражения для ошибок гироскопического прибора с произвольным периодом и демпфированием при случайном законе изменения ошибки в скорости. Принимаем, что баллистические ошибки корректируются по данным постороннего измерителя скорости, который считается неидеальным. В этом случае вследствие линейности уравнения в правую часть войдет в качестве возмущения ошибка того измерителя скорости; уравнение движения гироскопа будет иметь вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\alpha - \alpha^*) + \varepsilon \frac{Ql}{H} \frac{d}{dt} (\alpha - \alpha^*) + \frac{Ql}{H} \Omega \cos \varphi (\alpha - \alpha^*) = \\ = \varepsilon \left( \frac{Ql}{H} \right)^2 \frac{1}{g} \frac{d\Delta V_N}{dt} + \frac{Ql}{H} \left( \frac{1}{R} - \Omega \cos \varphi \frac{Ql}{gH} \right) \Delta V_N \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\alpha^* = \frac{Ql}{gH} V_N \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha$  — угол отклонения оси ротора от плоскости меридиана;  $\alpha^*$  — скоростная девиация;  $V_N$  — северная составляющая скорости основания;  $\Delta V_N$  — ошибка в измерении и преобразовании  $V_N$ ;  $Ql$  — статический момент внутренней рамки;  $H$  — кинетический момент ротора;  $R$  — радиус Земли;  $\varepsilon$  — параметр демпфирования. При составлении уравнения принято, что  $V \ll R\Omega \cos \varphi$ , т. е. западной составляющей скорости можно пренебречь. При выполнении условий Шулера ( $\varepsilon = 0$ ,  $R\Omega Q l \cos \varphi = gH$ ) прибор становится невозмущаемым. Ошибка  $\Delta V_N$  в дальнейшем будет считаться случайной функцией времени с известными статистическими свойствами, а именно, принимается, что ошибка  $\Delta V_N$  стационарна, математическое ожидание ее равно нулю, а корреляционная функция известна

$$R_V(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Delta V_N(t + \Delta t) \Delta V_N(t) dt = \sigma^2 \rho'_V(\Delta t) \quad (\rho'_V(0) = 1) \quad (1.3)$$

При этом неявно предполагается, что  $\Delta V_N$  не зависит от  $\alpha$ , что в первом приближении справедливо, если скорость  $V_N$  достаточно мала. Начальные условия считаются случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и известными корреляционными моментами<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \langle [\Delta \dot{\alpha}(0)]^2 \rangle &= B_1^2, & \langle [\Delta \dot{\alpha}^*(0)]^2 \rangle &= B_2^2, \\ \langle [\Delta \dot{\alpha}(0) \Delta \dot{\alpha}^*(0)] \rangle &= B_{12}^2 & (\Delta \alpha &= \alpha - \alpha^*) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем новые переменные

$$x = \frac{R\Omega \cos \varphi}{\sigma} \Delta \alpha, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad v = \frac{\Delta V_N}{\sigma} \quad (1.5)$$

Тогда уравнение (1.1) записывается в виде

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left[ 2\xi \frac{dv}{d\tau} + (1 - \omega_0^2) v \right] \quad (1.6)$$

$$\left( 2\xi = \varepsilon \frac{Ql}{H} \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad \omega_0^2 = \frac{QlR\Omega \cos \varphi}{gH} \right)$$

Для начальных условий имеем

$$\langle [x(0)]^2 \rangle = C_1^2, \quad \langle [(dx/d\tau)_{\tau=0}]^2 \rangle = C_2^2, \quad \langle [x(0) (dx/d\tau)_{\tau=0}] \rangle = C_{12}^2 \quad (1.7)$$

где

$$C_1 = B_1 \frac{R\Omega \cos \varphi}{\sigma}, \quad C_2 = B_2 \frac{R^2 \Omega \cos \varphi}{\sigma g}, \quad C_{12} = B_{12} \frac{R^{3/2} \Omega \cos \varphi}{\sigma g^{1/2}}$$

Корреляционная функция для  $v$  равна

$$\rho_V(\tau) = \rho'_V(\sqrt{R/g} \Delta t) \quad (1.8)$$

К виду (1.6) при несколько иных обозначениях может быть приведено уравнение однороторного гиросмаятника (гировертикали). Решение уравнения (1.6) при начальных условиях

$$x = x_0, \quad dx/d\tau = \dot{x}_0 \quad \text{при } \tau = 0$$

и при произвольной функции  $v(\tau)$ , если  $\xi < \omega_0$  (система является колебательной),

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем математические ожидания и моменты обозначаются угловыми скобками.

ИМЕЕТ ВИД

$$x(\tau) = e^{-\xi\tau} \left( x_0 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau + \frac{\dot{x}_0 + \xi x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau \right) + \\ + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \int_0^\tau \left\{ 2\xi e^{-\xi t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} t \frac{d}{dt} v(\tau - t) + \right. \\ \left. + (1 - \omega_0^2) e^{-\xi t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} t v(\tau - t) \right\} dt \quad (1.9)$$

После элементарных преобразований получим

$$x(\tau) = e^{-\xi\tau} \left( x_0 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau + \frac{\dot{x}_0 + \xi x_0 + 2\xi\omega_0^2 v(0)}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau \right) + \\ + \omega_0^2 \int_0^\tau e^{-\xi t} \left[ 2\xi \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} t + \frac{1 - \omega_0^2 - 2\xi^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} t \right] v(\tau - t) dt \quad (1.10)$$

В дальнейшем будем считать для простоты  $v(0) = 0$ . Предполагая начальные условия статистически не зависимыми от  $v(\tau)$ , осреднением по множеству (см., например, [4]) получаем значение дисперсии ошибки в произвольный момент времени  $\tau$

$$\overline{[x(\tau)]^2} = I_1 + I_2 \quad (1.11)$$

где

$$I_1 = e^{-2\xi\tau} \left\{ \frac{C_1^2 + 2\xi C_{12}^2 + \xi^2 C_2^2}{\omega_0^2 - \xi^2} \sin^2 \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau + C_1^2 \cos^2 \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau + \right. \\ \left. + \frac{2(C_{12}^2 + \xi C_2^2)}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau \right\} \\ I_2 = \omega_0^4 \int_0^\tau e^{-\xi\tau_1} \left\{ 2\xi \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau_1 - \frac{1 - \omega_0^2 - 2\xi^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau_1 \right\} \times \\ \times \int_0^\tau e^{-\xi\tau_2} \left\{ 2\xi \cos \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau_2 - \frac{1 - \omega_0^2 - 2\xi^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \tau_2 \right\} \rho_V(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (1.12)$$

Если  $\xi = \omega_0$  (критическое демпфирование), то вместо (1.10) будем иметь

$$x(\tau) = x_0 e^{-\omega_0\tau} + (\dot{x}_0 + x_0 \omega_0) \tau e^{-\omega_0\tau} + \\ + \omega_0^2 \int_0^\tau \{-2\omega_0 - (3\omega_0^2 - 1)t\} e^{-\omega_0 t} v(\tau - t) dt \quad (1.13)$$

После аналогичных преобразований вместо (1.12) получим

$$I_1 = e^{-2\omega_0\tau} \{C_1^2 + 2(C_{12}^2 + \omega_0 C_1^2) \tau + (C_2^2 + 2\omega_0 C_{12}^2 + \omega_0^2 C_1^2) \tau^2\} \\ I_2 = \omega_0^4 \int_0^\tau [-2\omega_0 + (3\omega_0^2 - 1)\tau_1] e^{-\omega_0\tau_1} d\tau_1 \int_0^\tau [-2\omega_0 + \\ + (3\omega_0^2 - 1)\tau_2] e^{-\omega_0\tau_2} \rho_V(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \quad (1.14)$$

Точно таким же образом может быть получено выражение для дисперсии ошибки при демпфировании выше критического. Однако этот случай практического интереса не представляет. Полученные формулы позволяют решить аналитическую часть задачи: при известных параметрах для любого момента времени может быть рассчитана среднеквадратичная ошибка прибора.

2. Нахождение наивыгоднейших значений параметров гиросприбора. После того как определены дисперсии ошибок, может быть поставлена задача выбора параметров  $\omega_0$  и  $\xi$ , обеспечивающих минимум среднеквадратичной ошибки в любой заданный момент времени  $\tau = T$ . Условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial (I_1 + I_2)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial (I_1 + I_2)}{\partial \omega_0} = 0 \quad (2.1)$$

Из этих двух уравнений, вообще говоря, могут быть получены оптимальные значения  $\omega_0 = \omega_0'$  и  $\xi = \xi'$ . Однако решение практически осложняется тем обстоятельством, что  $I_1$  и  $I_2$  имеют различное аналитическое выражение при  $\xi < \omega_0$ , при  $\xi = \omega_0$  и при  $\xi > \omega_0$ . Поэтому в общем случае следует искать решение в таком порядке.

1. Решить уравнения (2.1), где вместо  $I_1$  и  $I_2$  подставлены выражения (1.12) для  $\xi < \omega_0$ . Если в результате получится  $0 < \xi' < \omega_0'$ , то найденное решение имеет смысл. В противном случае, по-видимому, предположение, что  $\xi' < \omega_0'$  неверно.

2. Решить уравнения (2.1), где вместо  $I_1$  и  $I_2$  подставлены их выражения для  $\xi > \omega_0$ . Если предположение, что  $\xi > \omega_0$  справедливо, то должно получиться  $0 < \omega_0' < \xi'$ . Если же это не будет выполнено, то остается третья возможность.

3. Решить второе уравнение (2.1), где вместо  $I_1$  и  $I_2$  подставлены выражения (1.14), и определить  $\xi' = \omega_0'$ .

Естественно ожидать, что в каждом конкретном случае будет существовать только одно решение. Если же это не так, т. е. получится больше, чем одно экстремальное значение ошибки, то следует их сравнить и выбрать наименьшее.

Полное решение задачи по такому плану приводит к весьма громоздким вычислениям, так как уравнения имеют достаточно сложную структуру. Чтобы получить результаты в конечном виде, в дальнейшем принимаются некоторые упрощения, которые оправдываются приведенными ниже соображениями. Если оказывается, что  $\xi_0' \ll 1$ , то можно ожидать, что  $\omega_0' \approx 1$ . Это следует из того, что чем больше  $\omega_0$  отличается от единицы, тем больше по абсолютной величине правая часть уравнения (1.6) и, следовательно, тем больше дисперсия вынужденной составляющей ошибки. В то же время скорость затухания ошибки от начальных условий в среднем не зависит от  $\omega_0$ , если  $\omega_0 \gg \xi$ . Значит,  $\omega_0 = 1$  в этом случае должно быть близким к наивыгоднейшему значению.

Предполагая  $\xi < 1$  при  $\omega_0 = 1$ , можно прийти к противоречию, т. е. из уравнений будет следовать  $\xi' > 1$ ; то отсюда будет вытекать, что  $\omega_0' > 1$ . При этом, по-видимому, критический случай  $\omega_0' = \xi$  будет близким к оптимальному, ибо при дальнейшем увеличении  $\xi$  (при демпфировании, большем критического) переходный процесс также замедляется, а дисперсия вынужденной составляющей возрастает. Поэтому рассмотрение случая  $\xi > \omega_0$ , по-видимому, интереса не представляет.

В дальнейшем рассматриваются два случая: случай малого демпфирования  $\omega_0' = 1$ ,  $\xi' < 1$  и случай критического демпфирования  $\omega_0' = \xi' > 1$ .

В зависимости от значений двух основных параметров: относительной величины начальных условий и времени  $T$  целесообразно или оставить период неизменным, равным периоду Шулера, или уменьшить его, сделав демпфирование равным критическому. Оба варианта последовательно разобраны в пп. 3 и 4. В дальнейшем для определенности принимается, что корреляционная функция ошибки  $v$  имеет вид

$$\rho_V(\Delta\tau) = e^{-b|\Delta\tau|} \quad (2.2)$$

Для простоты будем считать  $b \gg 1/T$ . Этим вводится предположение, что интервал корреляции ошибки значительно меньше рассматриваемых отрезков времени.

3. Случай малого демпфирования. Ограничиваясь слагаемыми порядка не выше первого относительно  $1/b$ , получим при  $\omega_0 = 1$

$$I_2 = \frac{2}{b} \left\{ \xi + e^{-2\xi T} \left[ \frac{\xi}{1-\xi^2} + \frac{\xi^3}{1-\xi^2} \cos 2\sqrt{1-\xi^2}T + \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin 2\sqrt{1-\xi^2}T \right] \right\} \quad (3.1)$$

Для определения  $\xi$  имеем первое уравнение (2.1). Результаты могут быть получены в конечном виде, если принять следующее.

1. Начальная фаза равновероятна, т. е.

$$C_{12} = 0, \quad C_1^2 = C_2^2 = 2D^2/b \quad (D = \text{const}) \quad (3.2)$$

2. Начальные условия достаточно велики, т. е.

$$D^2 \gg 1 \quad (3.3)$$

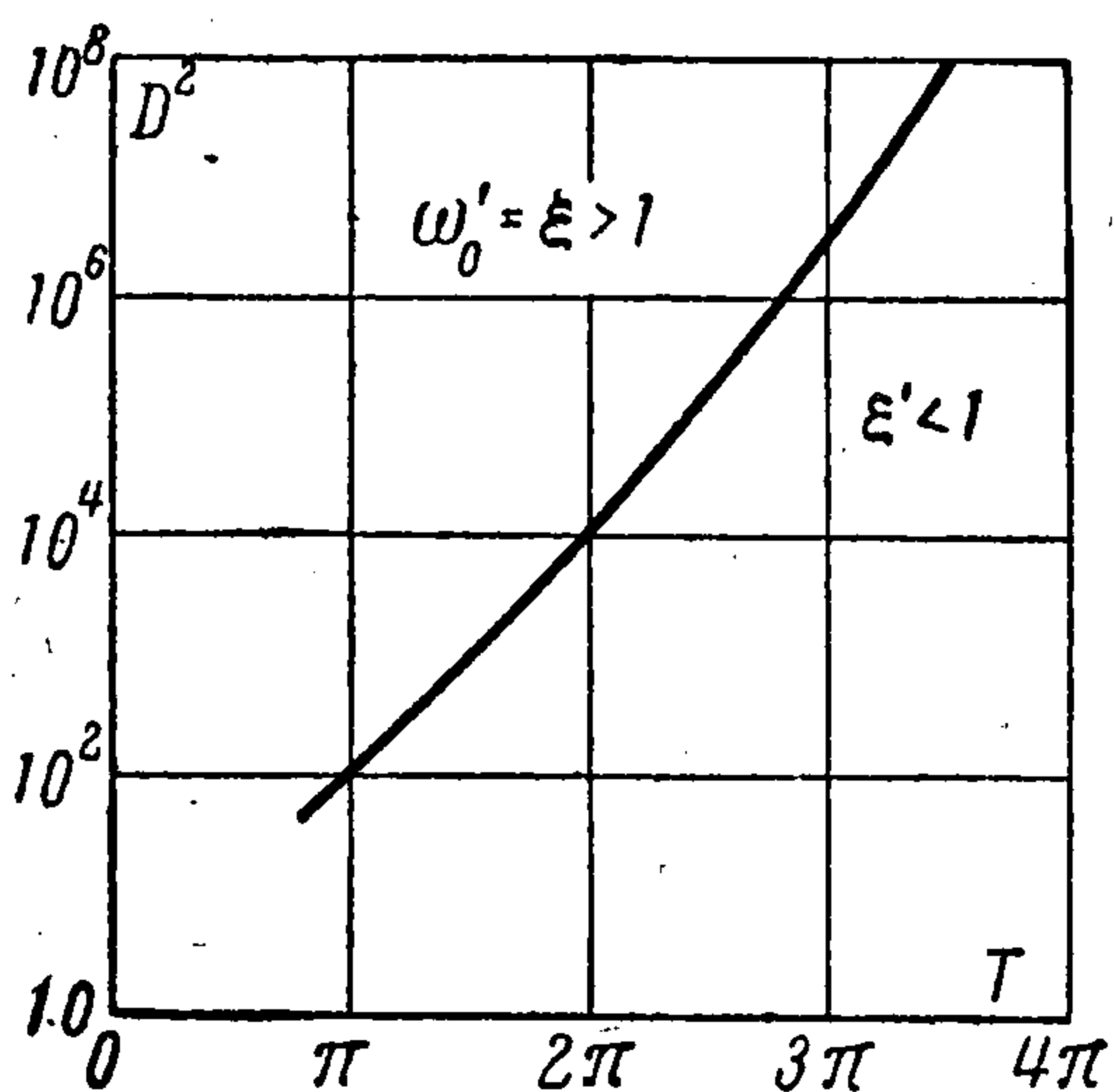
Тогда приближенно получаем

$$\langle [x(T)]^2 \rangle \approx 2b^{-1} (\xi + D^2 e^{-2\xi T}) \quad (3.4)$$

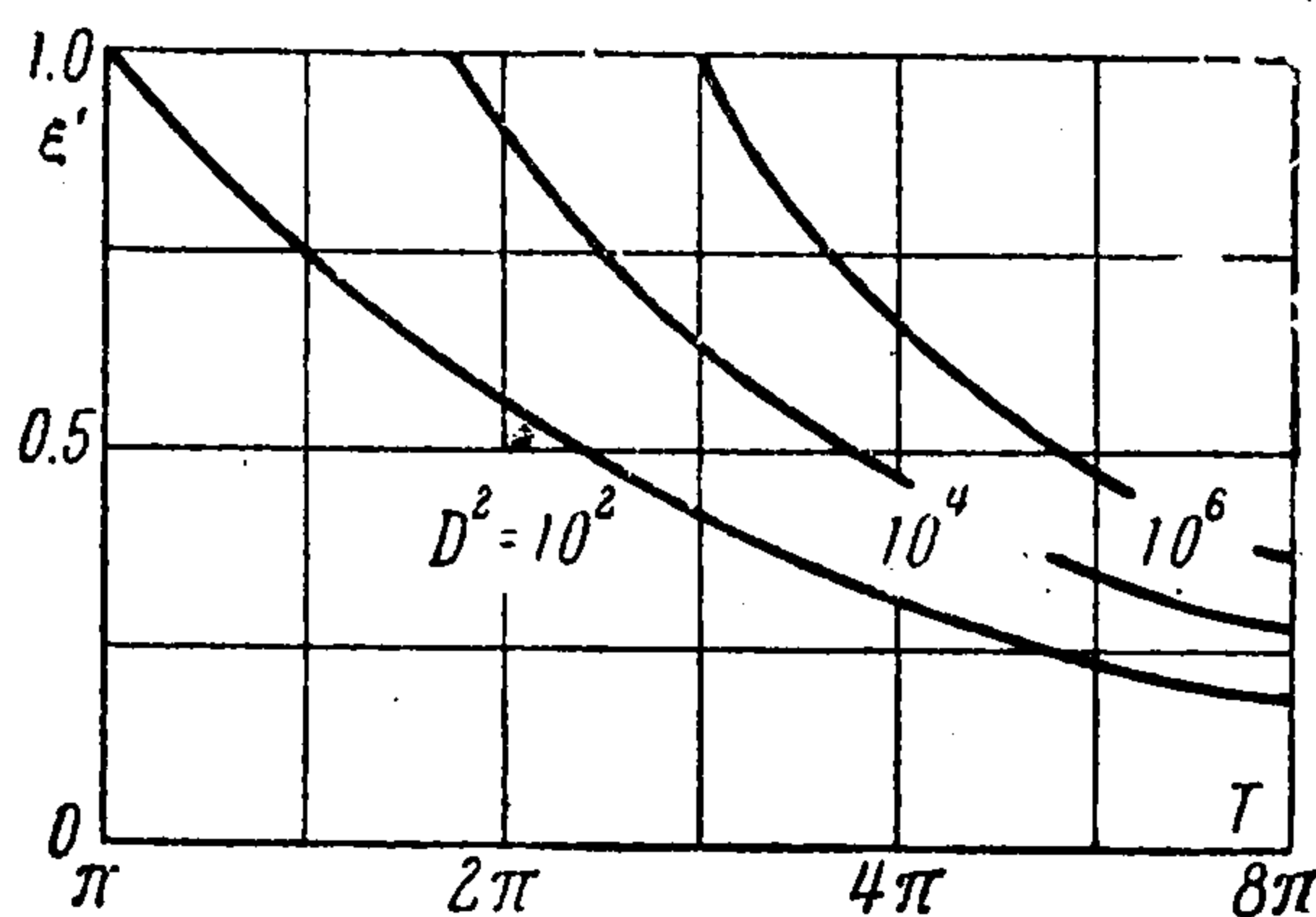
Из первого условия (2.1) минимума по  $\xi$  получаем

$$\xi' = (1/2T) \ln 2TD^2 \quad (3.5)$$

В зависимости от значений  $T$  и  $D^2$  по формуле (3.5) получится  $\xi' \leq 1$  или  $\xi' > 1$ .



Фиг. 1

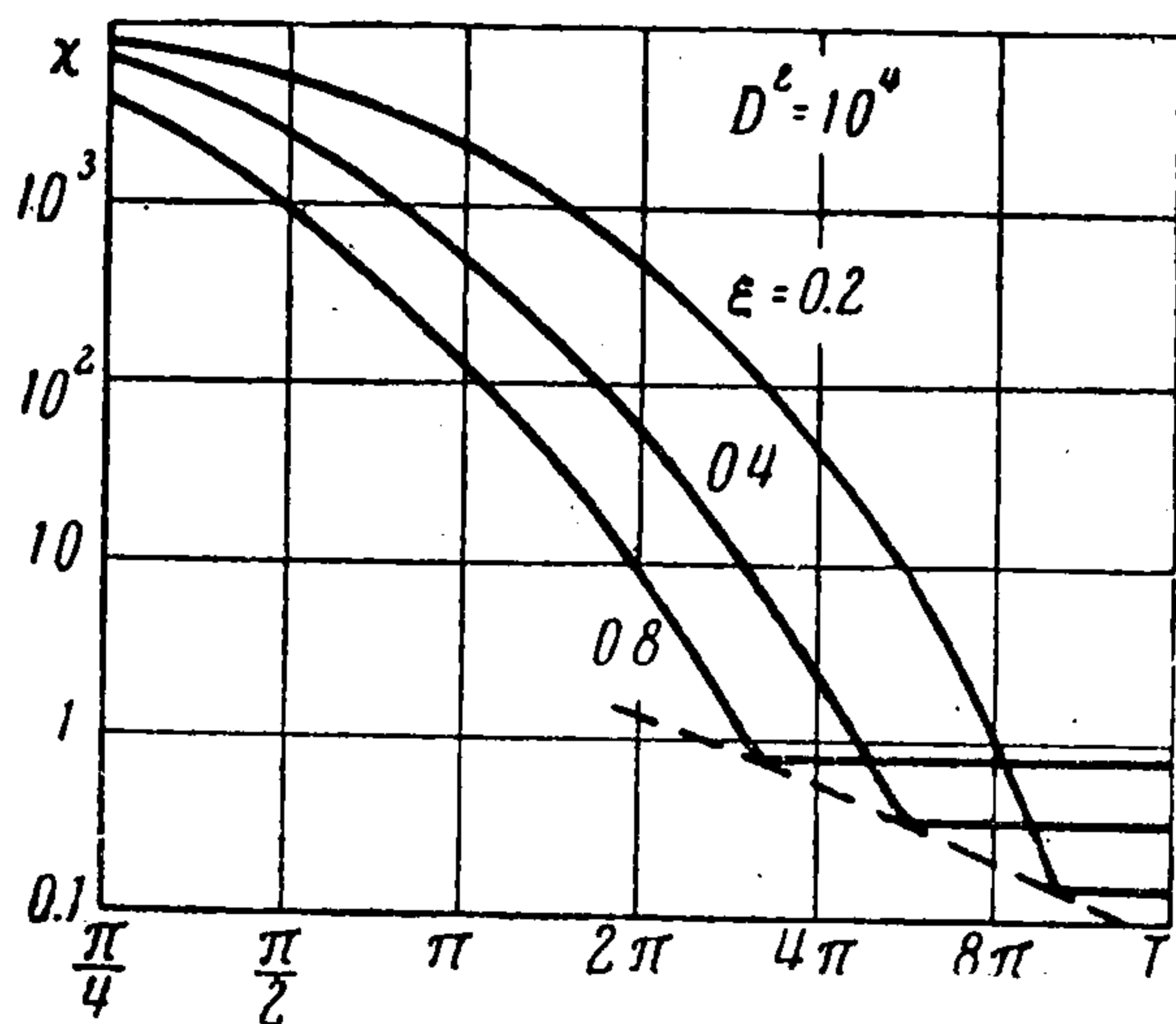


Фиг. 2

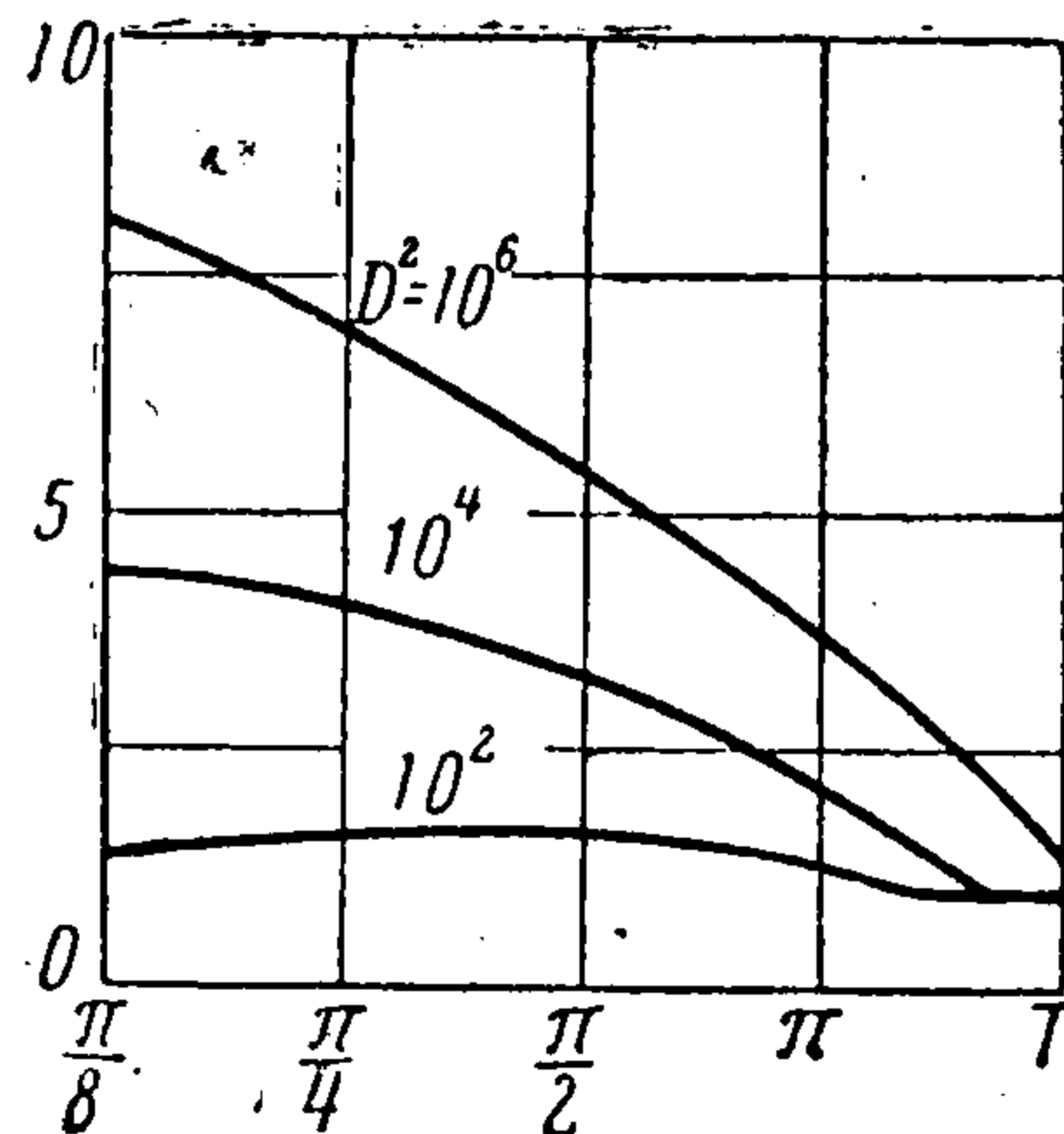
На плоскости параметров  $T$  и  $D^2$  области, в которых выполняются эти неравенства, разделены кривой

$$(1/2T) \ln 2TD^2 = 1$$

Для области, лежащей справа от этой кривой (фиг. 1), исходное предположение ( $\xi' < 1$ ) справедливо; при этих условиях целесообразно сохранить  $\omega'_0 = 1$ . Наоборот, слева от кривой, в соответствии со сказанным ранее, следует взять  $\omega'_0 = \xi' > 1$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Остановимся на случае малого демпфирования. Для любого фиксированного момента времени целесообразно выбирать, вообще говоря, свое значение  $\xi$ . На фиг. 2 представлены кривые  $\xi' = \xi'(T)$  при  $D^2 = 10^2, 10^4, 10^6$ . Значение  $\xi$ , — оптимальное для определенного фиксированного  $T$ , не будет оптимальным для любого другого

момента времени. На фиг. 3 представлены кривые

$$\chi = f(T) \quad \left( \chi = \frac{b}{2} \langle [x(T)]^2 \rangle \right) \quad \text{при } D^2 = 10^4 \quad (3.6)$$

Как и следовало ожидать, при больших значениях  $\xi$  ошибка спадает быстрее, но до большего установившегося значения. Огибающую этого семейства кривых (она показана на фиг. 3 пунктиром) можно найти, подставив (3.5) в (3.4). Тогда получим

$$\frac{b}{2} \langle [x(T)]^2 \rangle \min = \frac{1}{2T} (1 + \ln 2TD^2) \quad (3.7)$$

Эта кривая определяет предельные возможности системы с постоянным линейным демпфированием. Отметим, что основной качественный результат данного параграфа — демпфирование должно быть меньшим для больших интервалов времени — является следствием случайного закона изменения ошибки в скорости. Если расчет производить для наиболее неблагоприятного закона изменения, как делает Б. В. Булгаков [3], то практически всегда наиболее выгодным оказывается критическое демпфирование.

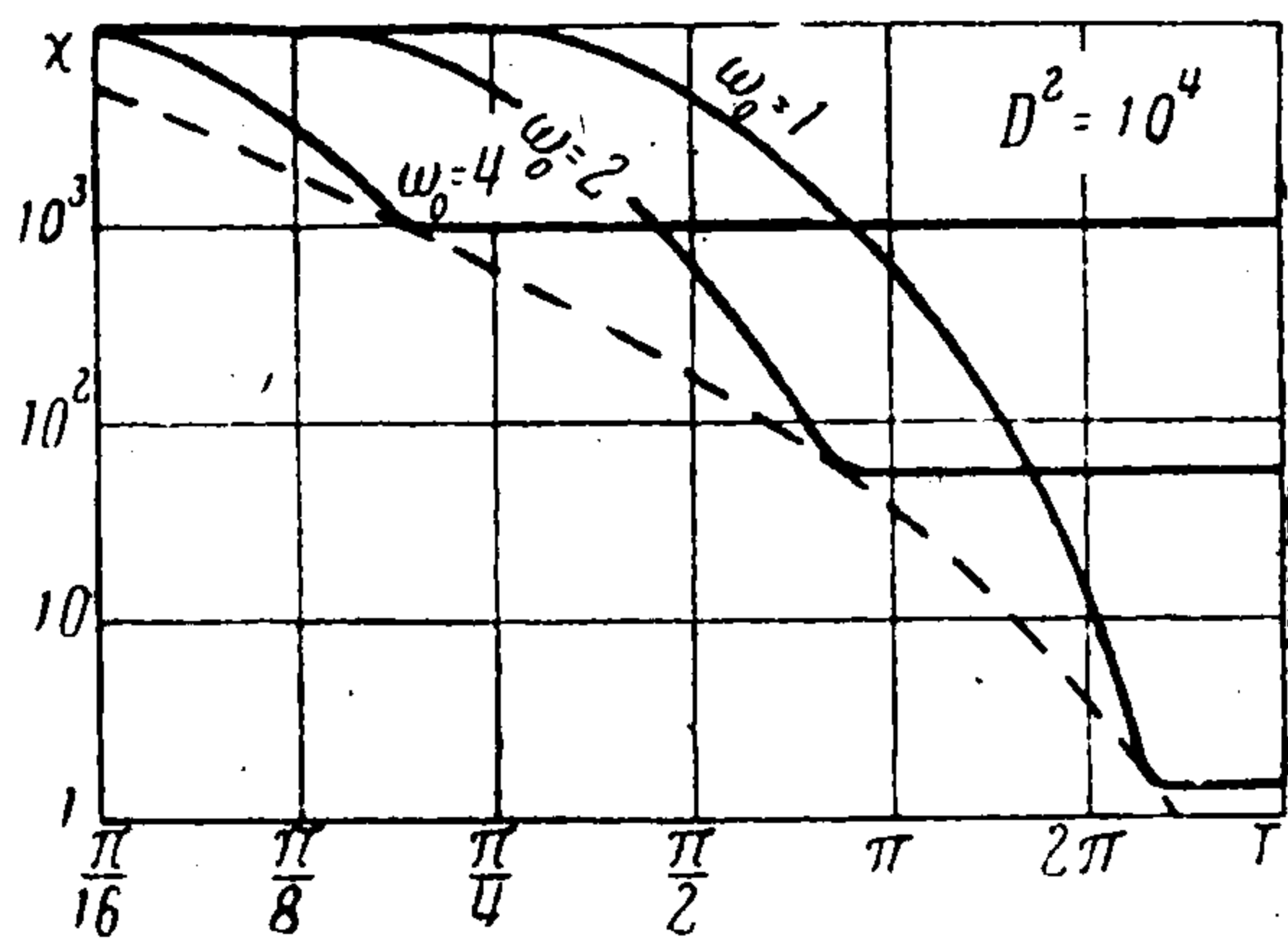
4. Случай критического демпфирования. При тех же предположениях (3.2) и (3.3) получаем следующее приближенное выражение для дисперсии ошибки в момент времени  $\tau = T$ :

$$\langle [x(T)]^2 \rangle = \frac{2}{b} \left[ \frac{5}{4} \omega_0^5 + D^2 [(1 + \omega_0 T)^2 + T^2] e^{-2\omega_0 T} \right] \quad (4.1)$$

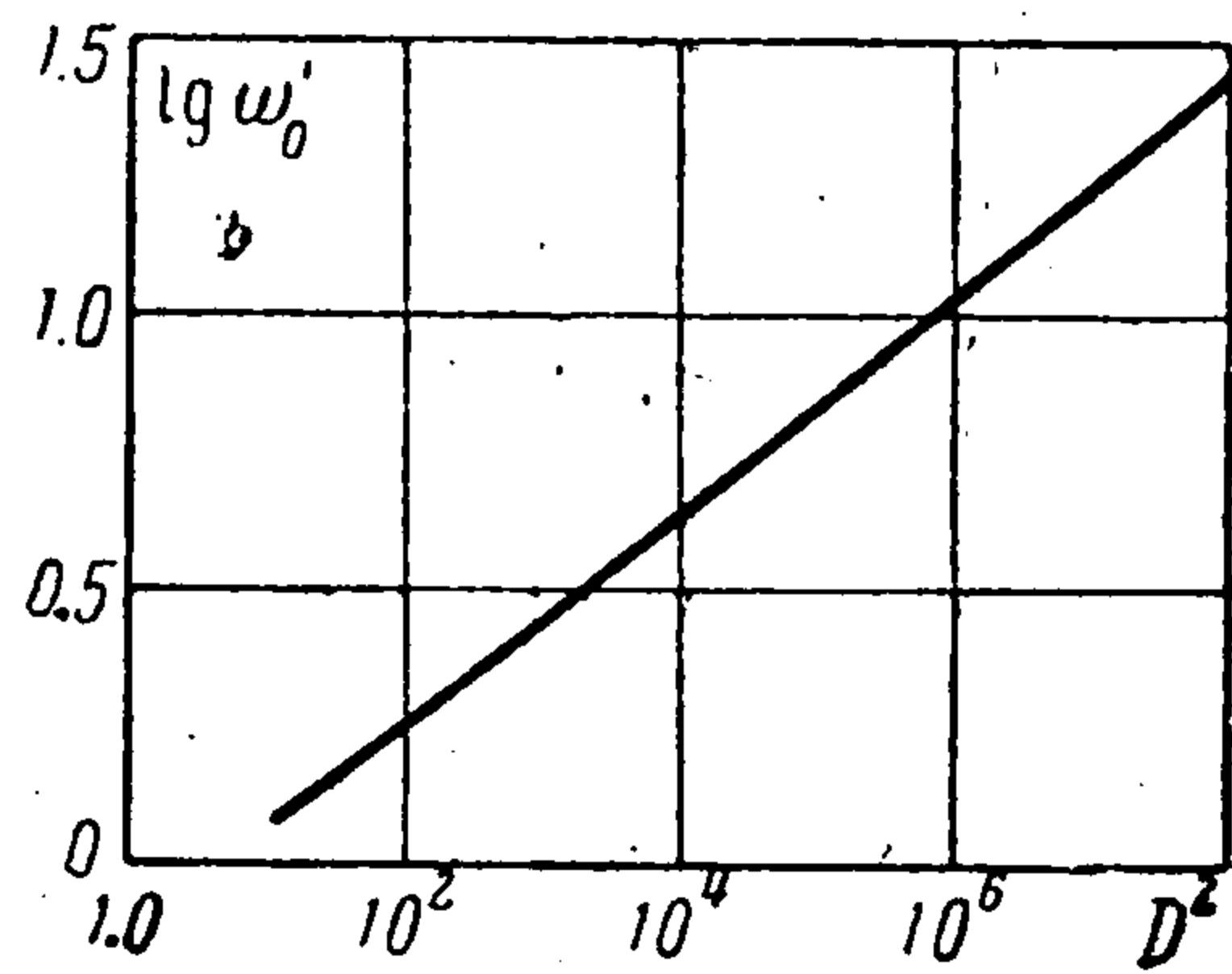
Условие минимума по  $\omega_0$  имеет вид

$$\frac{25\omega_0^4 e^{2\omega_0 T}}{2T^2 D^2 (\omega_0^2 T + \omega_0 + T)} = 1 \quad (4.2)$$

Результаты численного решения этого уравнения представлены на фиг. 4 в виде кривых  $\omega_0' = \omega_0'(T)$  при значениях  $D^2 = 10^2, 10^4, 10^6$ . Как и в предыдущем случае, каждое значение оказывается выгодным лишь при определенном  $T$ . Кривые (3.6)



Фиг. 5



Фиг. 6

построены на фиг. 5. Огибающая этого семейства кривых (на фиг. 5 показана пунктиром) получается подстановкой решений (4.2) в (4.1). Кривые на фиг. 3 и 5, кроме того, позволяют установить, насколько критична система по отношению к изменениям параметров  $\xi$  и  $\omega_0$ , т. е. для каких интервалов времени выбранные значения параметров дают результаты, достаточно близкие к оптимальным. Из рассмотрения фиг. 4 следует, что даже при очень широких пределах изменения возможных значений  $D^2$  и  $T$  частота  $\omega_0$  должна быть не слишком большой. Независимую от  $T$  оценку сверху для величины  $\omega_0$  нетрудно получить непосредственно из формулы (4.1). Из практических соображений следует, что величину  $\omega_0$  имеет смысл брать такой, чтобы, по крайней мере

$$\langle [x(\infty)]^2 \rangle / \langle [x(0)]^2 \rangle < 1/5$$

В противном случае среднеквадратичное значение начальной ошибки уменьшается меньше, чем в два раза. Отсюда получаем

$$5\omega_0^5 < D^2$$

На фиг. 6 представлена кривая  $\omega_0 = \sqrt[5]{D^2/5}$ , которая устанавливает верхний предел для  $\omega_0'$  в зависимости от  $D^2$ .

Результаты исследования, проведенного в пп. 3 и 4, удобно представить на плоскости параметров  $D^2$  и  $T$ . На фиг. 7 изображены кривые постоянного отношения

$$m^2 = \langle [x(0)]^2 \rangle / \langle [x(T)]^2 \rangle$$

т. е. отношения дисперсии начальной ошибки к дисперсии ошибки, обеспечиваемой оптимальной системой в момент времени  $T$ .

Кривые построены для двух значений  $m = 10$  и  $m = 100$  (уменьшение среднеквадратичной ошибки соответственно в 10 и 100 раз). Таким образом, этот график определяет соотношения между параметрами, при которых можно получить желаемое уменьшение среднеквадратичной ошибки.

Используемый в данной работе математический аппарат не дает возможности решить задачу равномерно оптимальной системы демпфирования, которая обеспечивала бы минимальную среднеквадратичную ошибку на большом интервале времени.

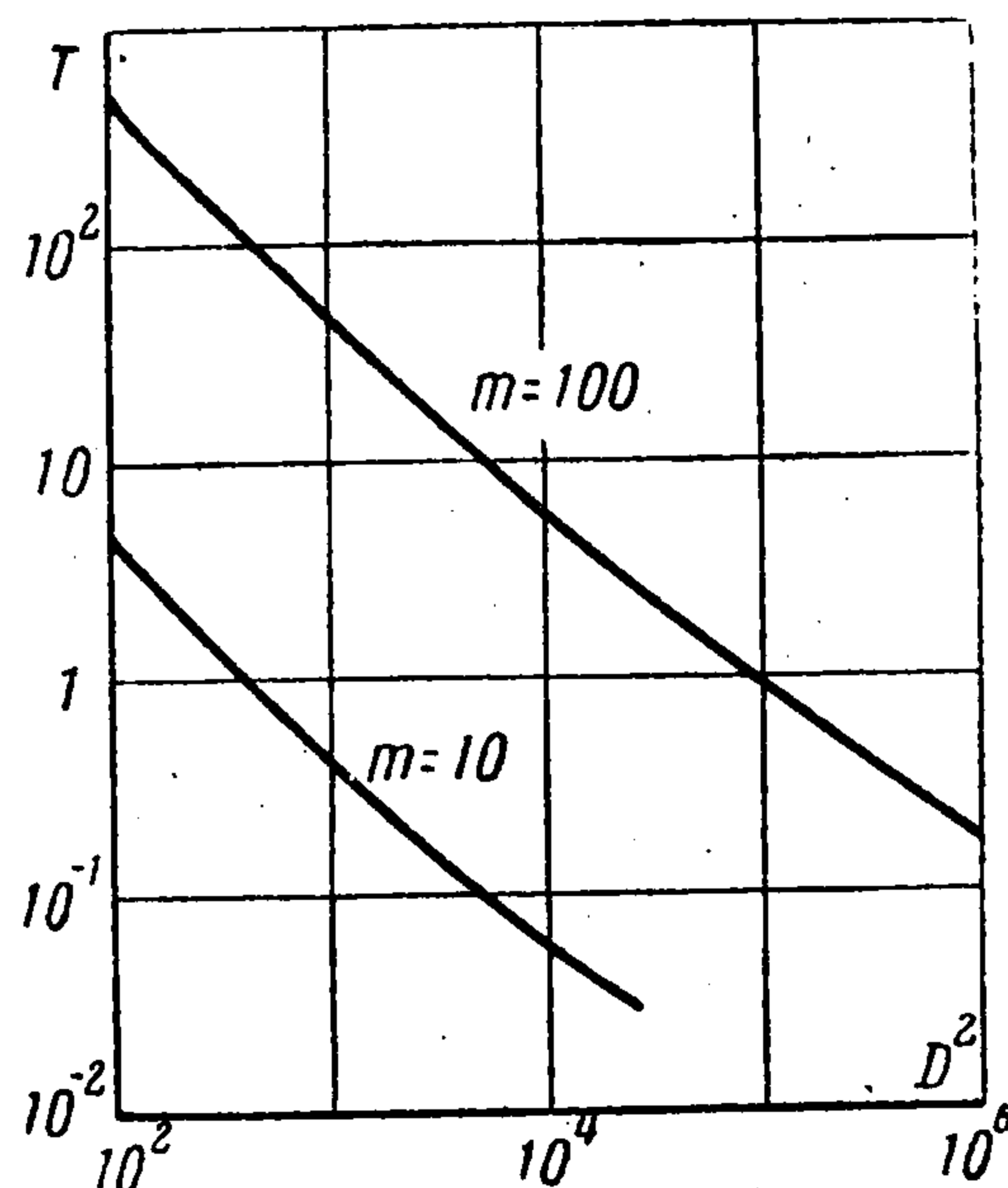
Можно предполагать, что такая система должна иметь переменные параметры. В качестве первого приближения для программы изменения  $\xi(\tau)$  можно взять, например, полученную зависимость  $\xi(\tau) = \xi'(\tau)$ . При этом можно ожидать, что ошибки системы в каждый момент времени будут меньше, чем ошибки, определяемые, например, по формуле (3.6). Строгое решение этой задачи представило бы значительный интерес.

Напоминаем, что результаты работы получены для максимально идеализированной задачи (уравнение (1.1)). Учет более сложных факторов (вращения вокруг оси север — юг, инерции карданова подвеса, западной составляющей скорости и т. д.) может несколько изменить количественные значения оптимальных параметров и увеличить ошибки гироскопа. Однако, как видно из графиков, исследуемые зависимости являются весьма «грубыми», т. е. нечувствительными к изменениям параметров. Поэтому можно ожидать, что рассчитанные здесь ошибки от несовершенства измерителя скорости будут практически добавляться к ошибкам от других факторов.

Поступила 8 II 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G l i t s c h e r K. Die Kompensation störender Horizontalbeschleunigungen an Pendeln und Kreiselpendeln auf Fahrzeugen. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus den Siemens-Werke, 1940, Bd XIX, 2 Heft.
2. Б о д н е р В. А. и С е л е з н е в В. П. К теории невозмущаемых систем с тремя каналами автокомпенсации ускорений от сил тяготения, корректируемых внешней информацией. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 3.
3. Б у л г а к о в Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.
4. Л э н н и н г Дж. и Б э т т и н Р. Случайные функции в задачах автоматического управления. Изд-во иностр. лит-ры, 1958.



Фиг. 7