О ПРИВЕДЕНИИ К ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМ УРАВНЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Я. Н. Ройтенберг (Москва)

В работе [1] рассмотрена относящаяся к вопросам теории динамического программирования, связанным с реализацией выбранной стратегии управления движением, задача о выборе управляющих сил, при помощи которых обеспечивалась бы реализация задаваемого в фазовом пространстве (или подпространстве) закона движения нелинейной управляемой системы.

Определение управляющих сил в рассматриваемой задаче требует предварительно решения полученных в работе [1] систем нелинейных интегральных уравнений следующего вида:

$$z_j(t) = \Gamma_j(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{ji}(t) \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

Для решения интегральных уравнений (1), вообще говоря, необходимо применить численные методы.

Укажем, в связи с этим, переход от нелинейных интегральных уравнений (1) к системам конечных трансцендентных уравнений, которые можно получить, аппроксимируя искомые функции $z_j(t)$ ступенчатыми функциями. Решения этих трансцендентных уравнений можно принять в качестве нулевых приближений для построения процесса итераций при решении рассматриваемых интегральных уравнений.

Разобьем промежуток времени (t_0, t_1) на ν равных или неравных интервалов $(\alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu)$ $(\mu = 1, \ldots, \nu)$, где $\alpha_0 = t_0$, $\alpha_\nu = t_1$, и, полагая функции z_j ступенчатыми, обозначим через $z_{j\mu}$ значения, принимаемые этими функциями на интервалах $(a_{\mu-1}, \alpha_\mu)$

$$z_j(t) \equiv z_j(\alpha_{\mu-1}) = z_{j\mu} \qquad (\alpha_{\mu-1} \leqslant t < \alpha_\mu) \tag{2}$$

Полагая $t = \alpha_\mu - 0$ $(\mu = 1, \ldots, \nu)$ получим из интегральных уравнений (1)

$$z_{j\mu} = \Gamma_j(\alpha_\mu) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{ji}(\alpha_\mu) \Bigg[\int_{t_0}^{\alpha_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_{11}, \ldots, z_{r1}, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_{12}, \ldots, z_{r2}, \tau)\, d\tau + \ldots + \int_{\alpha_{\nu-1}}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_{1\nu}, \ldots, z_{r\nu}, \tau)\, d\tau \Bigg] +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \Bigg[\int_{t_0}^{\alpha_1} W_{jl}(\alpha_\mu, \tau)\, \psi_l(z_{11}, \ldots, z_{r1}, \tau)\, d\tau + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W_{jl}(\alpha_\mu, \tau)\, \psi_l(z_{12}, \ldots, z_{r2}, \tau)\, d\tau + \ldots$$
$$\ldots + \int_{\alpha_{\mu-1}}^{\alpha_\mu} W_{jl}(\alpha_\mu, \tau)\, \psi_l(z_{1\mu}, \ldots, z_{r\mu}, \tau)\, d\tau \Bigg] \quad (j = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, \nu) \tag{3}$$

Обозначая

$$E_{j\mu\xi}(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{ji}(\alpha_\mu) \int_{\alpha_{\xi-1}}^{\alpha_\xi} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}, \tau)\, d\tau \tag{4}$$

$$L_{j\mu\xi}(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}) = \sum_{l=1}^{n} \int_{\alpha_{\xi-1}}^{\alpha_\xi} W_{jl}(\alpha_\mu, \tau)\, \psi_l(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}, \tau)\, d\tau \tag{5}$$

$$(j = 1, \ldots, r;\ \mu, \xi = 1, \ldots, \nu)$$

можно привести уравнения (3) к следующему виду:

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} E_{j\mu\xi}(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}) - \sum_{\xi=1}^{\mu} L_{j\mu\xi}(z_{1\xi}, \ldots, z_{r\xi}) + z_{j\mu} = \Gamma_j(\alpha_\mu)$$

$$(j = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, \nu) \tag{6}$$

Таким образом, получена система из νr трансцендентных уравнений относительно νr неизвестных величин $z_{j\mu}$ $(j = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, \nu)$. Решения системы уравнений (6) и определяют собой ступенчатые функции, аппроксимирующие искомые функции $z_j(t)$ $(j = 1, \ldots, r)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В частном случае, когда в исходную систему дифференциальных уравнений работы [1] входит лишь одна нелинейная функция ψ_λ, зависящая от одного аргумента z_k

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(z_k(t)) \tag{7}$$

будем иметь в соответствии с (1) нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $z_k(t)$

$$z_k(t) = \Gamma_k(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{ki}(t) \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{i\lambda}(t_1, \tau)\, \psi_\lambda(z_k(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} W_{k\lambda}(t, \tau)\, \psi_\lambda(z_k(\tau))\, d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{8}$$

Соотношения (3) в рассматриваемом здесь случае принимают вид

$$z_{k\mu} = \Gamma_k(\alpha_\mu) - \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{ki}(\alpha_\mu) \Big[\psi_\lambda(z_{k1}) \int_{t_0}^{\alpha_1} \Xi_{i\lambda}(t_1, \tau)\, d\tau + \psi_\lambda(z_{k2}) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Xi_{i\lambda}(t_1, \tau)\, d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \psi_\lambda(z_{k\nu}) \int_{\alpha_{\nu-1}}^{t_1} \Xi_{i\lambda}(t_1, \tau)\, d\tau\Big] + \psi_\lambda(z_{k1}) \int_{t_0}^{\alpha_1} W_{k\lambda}(\alpha_\mu, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \psi_\lambda(z_{k2}) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W_{k\lambda}(\alpha_\mu, \tau)\, d\tau + \ldots + \psi_\lambda(z_{k\mu}) \int_{\alpha_{\mu-1}}^{\alpha_\mu} W_{k\lambda}(\alpha_\mu, \tau)\, d\tau \quad (\mu = 1, \ldots, \nu) \tag{9}$$

Введем обозначения

$$e_{\mu\xi} = \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{ki}(\alpha_\mu) \int_{\alpha_{\xi-1}}^{\alpha_\xi} \Xi_{i\lambda}(t_1, \tau)\, d\tau \tag{10}$$

$$(\mu, \xi = 1, \ldots, \nu)$$

$$l_{\mu\xi} = \int_{\alpha_{\xi-1}}^{\alpha_\xi} W_{k\lambda}(\alpha_\mu, \tau)\, d\tau \tag{11}$$

Тогда систему (9) можно привести к системе из ν трансцендентных уравнений с постоянными коэффициентами относительно ν неизвестных величин $z_{k1}, \ldots, z_{k\nu}$:

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} e_{\mu\xi}\psi_\lambda(z_{k\xi}) - \sum_{\xi=1}^{\mu} l_{\mu\xi}\psi_\lambda(z_{k\xi}) + z_{k\mu} = \Gamma_k(\alpha_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, \nu) \tag{12}$$

Решение системы уравнений (12) определяет ступенчатую функцию, аппроксимирующую искомую функцию $z_k(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Обозначая

$$\psi_\lambda(z_{k\xi}) = Z_{k\xi} \tag{13}$$

и вводя обратную функцию

$$z_{k\xi} = \zeta_\lambda(Z_{k\xi}) \tag{14}$$

можно преобразовать систему уравнений (12) к виду

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} e_{\mu\xi} Z_{k\xi} - \sum_{\xi=1}^{\mu} l_{\mu\xi} Z_k + \zeta_\lambda(Z_{k\mu}) = \Gamma_k(\alpha_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, \nu) \tag{15}$$

который представляется более простым по сравнению с системой (12), так как в каждом из уравнений системы (15) содержится лишь по одному нелинейному слагаемому.

Поступила 21 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.

ОШИБКИ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОШИБКИ В СКОРОСТИ

И. Б. Челпанов

(Ленинград)

Рассматривается поведение навигационного гироскопического прибора (гирокомпаса, гировертикали), находящегося на основании, которое движется по поверхности Земли по произвольному закону. Если прибор является автономным, т. е. на него не поступают данные о движении основания от посторонних приборов, то он может быть сделан невозмущаемым (инвариантным по отношению к движению основания) в результате вполне определенного выбора структуры прибора и значений его параметров.

Известно, однако, что ошибка автономного невозмущаемого навигационного прибора, обусловленная ненулевыми начальными условиями, не затухает. Если же требование автономности не накладывать, т. е. предполагать, что скорость движения основания может быть определена в каждый момент времени по показаниям других навигационных приборов (точнее, если считать точно известными проекции вектора скорости на географические оси), то условие невозмущаемости не определяет, по-видимому, однозначно динамические характеристики навигационного прибора, и он может быть инвариантным по отношению к движению основания при любом периоде свободных колебаний и при любом затухании. Рассмотрению способов построения схем невозмущаемых гироскопических приборов, в которых автономные условия невозмущаемости не выполняются, посвящены работы Глитчера [1], А. Ю. Ишлинского, Я. Н. Ройтенберга и его учеников, В. А. Боднера и В. П. Селезнева [2] и др.

В пользу принципиальной возможности построения такого прибора можно привести следующие доводы. Пусть гироскопический прибор имеет произвольный период и произвольный коэффициент демпфирования, причем оба эти параметра точно известны. Тогда, зная в каждый момент проекции вектора скорости основания, можно точно рассчитать баллистическую ошибку прибора. Этот расчет может производить независимое счетно-решающее устройство. Если считать, что необходимые операции производятся идеально точно, то в результате находится поправка на показание прибора, после введения которой получается точное значение навигационного параметра независимо от периода и коэффициента демпфирования.