РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СТЕПЕНЯМ МАЛОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

А. М. Родионов (Москва)

§ 1. В работе [1] к уравнению с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad x(t) = \varphi(t) \quad \text{на } E_0 \tag{1.1}$$

применяется метод возмущений, чтобы найти асимптотическое разложение $x(t, \tau)$ решения (1.1) по степеням малого запаздывания τ

$$x(t, \tau) = x_0(t) + \tau x_1(t) + \frac{\tau^2}{2} x_2(t) + \ldots \tag{1.2}$$

Для уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau), \qquad x(t) = \varphi(t) \quad \text{на } E_0 \tag{1.3}$$

решение которого легко находится методом шагов, разложение (1.2) совпадает с разложением решения $x(t, \tau)$ уравнения (1.3) по формуле Тейлора. В связи с этим возникает вопрос о возможности дифференцирования решений уравнения (1.1) по τ. В заметке доказывается следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(t, x(t), x(t-\tau))$ по каждому из своих аргументов, а функция $\varphi(t)$ по t имеют по N непрерывных частных производных, то для любого фиксированного $t^* > 0$ и сколь угодно большого номера N найдется число $\tau^*(t^*, N) = t^*/N$, такое что функция $x(t^*, \tau)$ будет иметь N непрерывных производных по τ в промежутке $0 \leqslant \tau < \tau^*$

$$\partial x(t^*, \tau)/\partial\tau, \ldots, \partial^N x(t^*, \tau)/\partial\tau^N$$

Отсюда вытекает возможность при достаточно малых τ разложить функцию $x(t, \tau)$ по формуле Тейлора

$$x(t, \tau) = x(t, 0) + \tau x'_\tau(t, 0) + \frac{\tau^2}{2} x''_\tau(t, 0) + \ldots$$

Доказательство. Пусть для уравнения (1.1) имеем обычную начальную задачу

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{при } -\infty < t \leqslant 0 \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) и (1.4) определяют при $0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$ решение $x(t, \tau)$, являющееся функцией t и τ. Пусть τ переменный параметр $0 \leqslant \tau < \tau_1$. Пусть запаздывание τ получило определенное значение из вышеуказанного промежутка. Подставив $x(t, \tau)$ в (1.1), получим тождество

$$\frac{dx(t, \tau)}{dt} = f(t, x(t, \tau), x(t-\tau, \tau)) \tag{1.5}$$

Дадим τ достаточно малое приращение $\Delta\tau$ и снова составим тождество

$$\frac{dX(t, \tau+\Delta\tau)}{dt} = f(t, X(t, \tau+\Delta\tau), \qquad X(t-(\tau+\Delta\tau), \tau+\Delta\tau) \tag{1.6}$$

Вычтем тождество (1.5) из (1.6) почленно и применим теорему о конечном приращении

$$\frac{d(X-x)}{dt} = f(t, X, X_\tau) - f(t, x, x_\tau) = f(t, X, X_\tau) -$$

$$- f(t, x, X_\tau) + f(t, x, X_\tau) - f(t, x, x_\tau) =$$

$$= \frac{\partial f(t, x+\theta_1(X-x), X_\tau)}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f(t, x, x_\tau+\theta_2(X_\tau - x_\tau))}{\partial x_\tau}(X_\tau - x_\tau) \tag{1.7}$$

$$(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$$

Преобразуем разность $X_\tau - x_\tau$ по формуле конечных приращений

$$X_\tau - x_\tau = x(t-(\tau+\Delta\tau), \tau+\Delta\tau) - x(t-\tau, \tau) =$$

$$= x(t-(\tau+\Delta\tau), \tau+\Delta\tau) - x(t-\tau, \tau+\Delta\tau) + x(t-\tau, \tau+\Delta\tau) - x(t-\tau, \tau) =$$

$$= -\frac{dx(t-\tau-\theta_3\Delta\tau, \tau+\Delta\tau)}{dt}\Delta\tau + x(t-\tau, \tau+\Delta\tau) - x(t-\tau, \tau)$$

$$(0 < \theta_3 < 1)$$

Разделим обе части равенства (1.7) на $\Delta\tau$

$$\frac{d}{dt}\frac{X-x}{\Delta\tau}=\frac{\partial f(t,x+\theta_1(X-x),X_\tau)}{\partial x}\left(\frac{X-x}{\Delta\tau}\right)+$$
$$+\frac{\partial f(t,x,x_\tau+\theta_2(X_\tau-x_\tau))}{\partial x_\tau}\left\{\left(\frac{X-x}{\Delta\tau}\right)_\tau-\frac{dx(t-\tau-\theta_3\Delta\tau,\tau+\Delta\tau)}{dt}\right\} \quad (1.8)$$

В некоторой окрестности нуля $0\leqslant t\leqslant h<\tau$ производные $\partial f(\ldots)/\partial x$, $\partial f(\ldots)/\partial x$ и $dx(\ldots)/dt$ будут непрерывными функциями по совокупности переменных t и $\Delta\tau$. Действительно, если $X-x\neq 0$, $X_\tau-x_\tau\neq 0$, $\Delta\tau\neq 0$, тогда непрерывность указанных производных следует из равенств:

$$\frac{\partial f(\ldots)}{\partial x}=\frac{f(t,X,X_\tau)-f(t,x,X_\tau)}{X-x}\qquad \frac{\partial f(\ldots)}{\partial x_\tau}=\frac{f(t,x,X_\tau)-f(t,x,x_\tau)}{X_\tau-x_\tau}$$
$$\frac{dx(\ldots)}{dt}=\frac{x(t-\tau,\tau+\Delta\tau)-x(t-(\tau+\Delta\tau),\tau+\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

Здесь числитель и знаменатель непрерывны [2], и знаменатель не равен нулю. Если же при $t\to\bar t$, $\Delta\tau\to\overline{\Delta\tau}$ либо $X-x\to 0$, либо $X_\tau-x_\tau\to 0$, либо $\Delta\tau\to 0$, то в силу непрерывности указанных производных по отношению к совокупности аргументов они стремятся соответственно к значениям

$$\frac{\partial f(t,x(t),x(t-\tau))}{\partial x},\qquad \frac{\partial f(t,x(t),x(t-\tau))}{\partial x_\tau},\qquad \frac{dx(t-\tau,\tau)}{dt}.$$

Уравнение (1.8) рассматриваем как линейное неоднородное уравнение с запаздыванием τ и неизвестной функцией $X-x/\Delta\tau$.

Коэффициенты по доказанному будут непрерывными функциями t и $\Delta\tau$ (при достаточно малом $|\Delta\tau|$). Начальная функция для искомого решения, очевидно, $\varphi(t)\equiv 0$ на E_0.

Следовательно, применяя к уравнению (1.8) теорему о непрерывной зависимости решения от правой части [2], докажем, что решение уравнения (1.8) также непрерывно зависит от $\Delta\tau$; в частности, существует предельное значение

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{X-x}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{x(t,\tau+\Delta\tau)-x(t,\tau)}{\Delta\tau}=\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial\tau}$$

Таким образом, при $0\leqslant t\leqslant h$ существует непрерывная производная $\partial x(t,\tau)/\partial\tau$. удовлетворяющая линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{\partial f(t,x(t),x(t-\tau))}{\partial x}z(t)+\frac{\partial f(t,x(t),x(t-\tau))}{\partial x_\tau}z(t-\tau)-$$
$$-\frac{\partial f(t,x(t),x(t-\tau))}{\partial x_\tau}\frac{dx(t-\tau,\tau)}{dt} \quad (1.9)$$

Как известно [3], производная $dx(t)/dt$ решения, вообще говоря, разрывна в точке $t=0$. Поэтому $z(t)=\partial x(t,\tau)/\partial\tau$, вообще говоря, не определена в точке $t=\tau$ На плоскости $t\tau$ уравнение $t=\tau$ определит «линию разрыва» производной $\partial x(t,\tau)/\partial\tau$. При $t>\tau$ производная решения $dx(t-\tau,\tau)/dt$, а вместе с ней и $\partial x(t,\tau)/\partial\tau$ непрерывны.

Уравнение (1.9) назовем уравнением в вариациях. Уравнение в вариациях для второй производной $\partial^2x(t,\tau)/\partial\tau^2$ будет содержать $d^2x(t-\tau,\tau)/dt^2$, т. е. $\partial^2x(t,\tau)/\partial\tau^2$ будет, вообще говоря, неопределена [3] в точке $t=2\tau$. На плоскости $t\tau$ уравнение $t=2\tau$ определит линию разрыва второй производной решения по $\tau-\partial^2x(t,\tau)/\partial\tau^2$.

Аналогично, составляя уравнения в вариациях для 3-й, ..., n-й производной, придем к выводу, что на плоскости $t\tau$ линия $t=n\tau$ $(n=1,2,\ldots)$ определяет линию, вдоль которой не определена производная $\partial^n x(t,\tau)/\partial\tau^n$. Изобразим линии $=n\tau$ $(n=1,2\ldots)$ на плоскости $t\tau$.

Из фигуры сразу вытекает теорема о дифференцируемости по τ решения уравнения (1.1) при фиксированном значении t^*.

§ 2. Метод разложения решений по малому запаздыванию можно использовать для вычисления периодических решений систем уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{2.1}$$

где $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ — вектор-функция, а функция f по t имеет период 2π.

Допустим, что при $0 \leqslant \tau < \varepsilon$ система (2.1) имеет единственное периодическое решение $x(t)$ периода 2π, которое, как известно, определяется начальной функцией, являющейся периодическим продолжением $x(t)$ на начальное множество. Ясно [3], что периодическое решение $x(t)$ будет бесконечно дифференцируемо при условии, что функция $f(t, x(t), x(t-\tau))$ обладает этим свойством. Следовательно, по методу работы [1] решение $x(t)$ может быть аппроксимировано с желаемой степенью точности

$$x(t) = x_0(t) + \tau x_1(t) + \ldots + \frac{\tau^n}{n!} x_n(t) + O(\tau^{n+1}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Здесь $x_0(t)$ является решением системы

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f(t, x_0(t), x_0(t)) \tag{2.2}$$

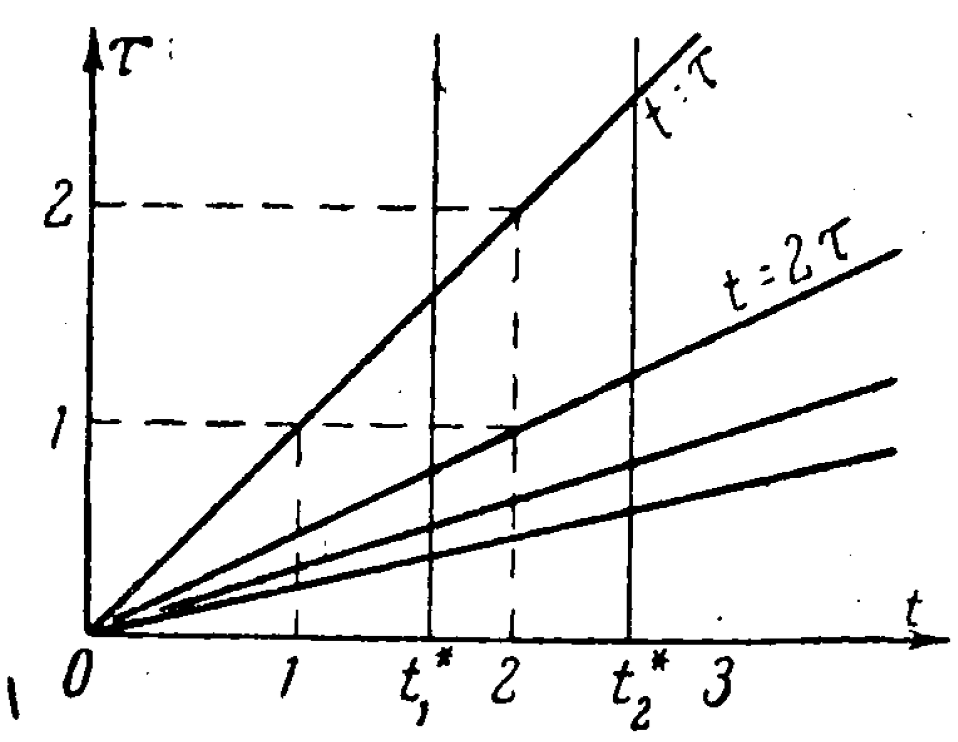
а $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются из систем

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \left[\frac{\partial f(t, x_0(t), x_0(t))}{\partial x} + \frac{\partial f(t, x_0(t), x_0(t))}{\partial x_\tau}\right] x_n(t) + f_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

где $f_n(t)$ зависит от $x_0(t)$, $x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$, т. е. будет известной функцией времени. В рассматриваемом случае система (2.2) имеет единственное периодическое решение $x_0(t)$ периода 2π. Тогда (2.3) будет линейной неоднородной системой с периодическими коэффициентами периода 2π и с известной периодической функцией $f_n(t)$. Предположим, что однородная система, соответствующая (2.3) имеет лишь тривиальное периодическое решение. Тогда (2.2) и (2.3) определяют единственное периодическое решение

$$x_0(t) + \tau x_1(t) + \ldots + \frac{\tau^n}{n!} x_n(t)$$

которое с точностью до членов порядка τ^{n+1} аппроксимирует периодическое решение $x(t)$ исходной системы (2.1).



В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b(t)x(t-\tau) = f(t) \qquad (a > 0) \tag{2.4}$$

где τ — малое запаздывание, $b(t)$ и $f(t)$ — периодические функции периода 2π. Предположим, что $|b(t)| < a$. Тогда для уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b(t)x(t-\tau) = 0 \tag{2.5}$$

можно построить функционал, удовлетворяющий теореме Н. Н. Красовского о равномерной асимптотической устойчивости. Следовательно, существует единственное периодическое решение уравнения (2.5), именно $x(t) \equiv 0$. Согласно [4] уравнение (2.4) имеет единственное периодическое решение $x(t)$, которое с желаемой степенью точности может быть вычислено методом, указанным выше. Заметим, что для уравнения (2.4) полученный результат пересекается с результатами Н. Н. Красовского [5].

Поступила 6 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Родионов А. М. Применение метода возмущений к уравнениям с запаздыванием в случае малого запаздывания. Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд-во ун-та Дружбы народов, 1962, т. 1.
2. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Усп. матем. н., 1949, т. IV, № 5.
3. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. Гостехиздат, 1955.
4. Halanay A. Solutions periodiques des systemes lineaires a argument retarde. Comptes Rendus, 1959, 249, p. 2708.
5. Красовский. Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. ДАН СССР, 1957, т. 114, № 2.