О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ГРУНТОВ

С. С. Григорян

(Москва)

При распространении в мягких грунтах сильных волн, возникших от падения на плоскую поверхность грунта ударной волны, распространяющейся по воздуху, или от взрыва заряда взрывчатого вещества вблизи такой поверхности, в определенных зонах движение грунта оказывается локализованным в узких вытянутых областях, ограниченных поверхностью грунта и фронтом возмущений. Это обстоятельство позволяет развить сравнительно простой приближенный метод решения задачи о движении грунта в этих областях. Идея этого метода заимствована из аэродинамики больших скоростей, где показано, что при полете тонкого тела с большой сверхзвуковой скоростью в воздухе движение последнего происходит в основном вдоль плоскостей, перпендикулярных к направлению полета, а область, охваченная возмущенным движением воздуха, представляет собой тонкий слой, окружающий летящее тело [1, 2]. Анализ различных членов уравнений газовой динамики показывает, что если при этих условиях отбросить члены порядка ε^2 (ε — малая величина, характеризующая наклон образующей тела к направлению полета), то система уравнений распадается на две части. Первая будет описывать движение воздуха в плоскости, перпендикулярной к направлению полета, и в точности совпадает при естественной замене осевой координаты на время с уравнениями плоского неустановившегося движения воздуха. Вторая (одно уравнение) описывает возмущение движения в направлении полета и может быть решена при помощи интеграла Бернулли.

Вполне аналогичная ситуация имеет место для отмеченных выше движений грунта. Здесь также оказывается, что движение в основном происходит в направлении, перпендикулярном к поверхности грунта, и полная система уравнений динамики грунта приближенно распадается на две группы. Первая совпадает с точными уравнениями одномерного движения грунта с плоскими волнами и описывает движения в указанном направлении; она может решаться независимо от второй. Вторая описывает движения в двух остальных координатных направлениях и представляет собой систему линейных уравнений, коэффициенты которой зависят от решения первой группы уравнений. Ошибка такого приближенного рассмотрения здесь также имеет порядок ε^2, где ε — характерное значение угла наклона нормали фронта возмущений в грунте к нормали границы грунта.

Отметим, что возможность перенесения соображений из аэродинамики больших скоростей в задачи о распространении возмущений была для случая идеальной жидкости указана А. Г. Багдоевым [3].

Рассмотрим пространственное неустановившееся движение грунта, отличающееся тем, что оно в основном происходит в одном направлении, точнее, будем предполагать, что компоненты вектора скорости имеют порядки

$$u \sim v \sim \varepsilon V_0, \quad w \sim V_0 \tag{1}$$

а производные различных искомых функций оцениваются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sim \varepsilon \frac{1}{l}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{l}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{t_0} \tag{2}$$

где V_0, l, t_0 — характерные значения скорости, длины и времени соответственно, а ε — малый параметр.

При помощи соотношений (1), (2) можно оценить порядки величин различных членов уравнений, описывающих движение грунта (в качестве таких уравнений возьмем уравнения из [4]), и, отбросив малые величины, получить искомую упрощенную систему.

Отметим, что оператор полной производной $d/dt \equiv \partial/\partial t + v_i\, \partial/\partial x_i$ оценивается в силу (1), (2) соотношением

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{V_0}{l}\right) \tag{3}$$

Таким образом, для уравнения неразрывности получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \rho_0 \frac{V_0}{l}\right) = 0 \tag{4}$$

что при отбрасывании малых величин порядка ε^2 совпадает с уравнением неразрывности для одномерного движения в направлении оси z.

Далее, обратившись к соотношениям

$$G\left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij}\right) = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik}\Omega_{jk} - S_{jk}\Omega_{ik} + \lambda S_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{2GW - F'(p)\, dp \,/\, dt}{2F(p)} e\,[j_2 - F(p)]\, e\left[2GW - F'(p)\frac{dp}{dt}\right]$$

$$j_2 \equiv \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \qquad W \equiv \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij}, \qquad S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$$

из работы [4], связывающим компоненты тензора напряжений σ_{ij} с компонентами тензора скоростей деформаций e_{ij}, получаем при помощи (1), (2) следующие оценки для напряжений:

$$S_{xx} \sim S_{yy} \sim S_{zz} \sim p \sim \sigma_0, \qquad S_{xy} \sim \varepsilon^2\sigma_0, \qquad S_{xz} \sim S_{yz} \sim \varepsilon\sigma_0 \tag{6}$$

где σ_0 — характерное значение напряжения.

Эти оценки вместе с предыдущими позволяют написать полную систему приближенных уравнений с указанием порядка отбрасываемых членов. Уравнения движения при отсутствии массовых сил запишутся в виде

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial z} + O\left(\varepsilon^3 \frac{V_0^2}{l}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} + O\left(\varepsilon^3 \frac{\sigma_0}{l}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial v}{\partial z} + O\left(\varepsilon^3 \frac{V_0^2}{l}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} + O\left(\varepsilon^3 \frac{\sigma_0}{l}\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{V_0^2}{l}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{\sigma_0}{l}\right) \tag{7}$$

Соотношения (5) перейдут в

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial S_{xy}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{xy}}{\partial z} - (S_{xx} - S_{yy})\,\Omega_{yx} - S_{xz}\,\Omega_{yz} - {}$$
$$- S_{yz}\,\Omega_{xz} + \lambda S_{xy} + O\left(\varepsilon^4\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right)$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial S_{xz}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{xz}}{\partial z} - (S_{xx} - S_{zz})\,\Omega_{zx} + \lambda S_{xz} + O\left(\varepsilon^3\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right)$$

$$G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial S_{yz}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{yz}}{\partial z} - (S_{yy} - S_{zz})\,\Omega_{zy} + \lambda S_{yz} + O\left(\varepsilon^3\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right)$$

$$2G\left[-\frac{1}{3}\frac{\partial w}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{V_0}{l}\right)\right] = \frac{\partial S_{xx}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{xx}}{\partial z} + \lambda S_{xx} + O\left(\varepsilon^2\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right)$$

$$2G\left[-\frac{1}{3}\frac{\partial w}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{V_0}{l}\right)\right] = \frac{\partial S_{yy}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{yy}}{\partial z} + \lambda S_{yy} + O\left(\varepsilon^2\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right)$$

$$2G\left[\frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2 \frac{V_0}{l}\right)\right] = \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} + w\frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \lambda S_{zz} + O\left(\varepsilon^2\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right) \tag{8}$$

где выражения для W и $dp \,/\, dt$ в формуле для λ следует заменить на

$$W = S_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right), \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + w\frac{\partial p}{\partial z} + O\left(\varepsilon^2\sigma_0 \frac{V_0}{l}\right) \tag{9}$$

Добавим к уравнениям (7) и (8) соотношения

$$p = f(\rho, \rho_*), \qquad \frac{d\rho_*}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e(\rho - \rho_*) e\left(\frac{d\rho}{dt}\right) \tag{10}$$

Здесь символ d/dt понимается согласно (3). Уравнения (7), (8) и (10) образуют полную систему. Видно, что эта система приближенных соотношений распадается на систему нелинейных уравнений одномерного движения вдоль оси z (уравнение (4), последнее уравнение из (7), последние три из (8) и уравнения (10)) и систему уравнений (остальные, кроме перечисленных), описывающую движения, параллельные плоскости xy. Эта вторая группа уравнений, в свою очередь, распадается на линейную систему, определяющую u, v, S_{xz}, S_{yz}, и одно отдельное уравнение, определяющее S_{xy}, которое также линейно.

Выясним теперь, при каких условиях возможно решение задачи при помощи полученных уравнений. Как это следует из оценок (2), это возможно при условии, что отношение характерного размера l_z области грунта, охваченной движением, в направлении оси z к характерному размеру l_{xy} в направлениях, перпендикулярных к оси z, должно быть мало

$$l_z \sim \varepsilon l_{xy} \tag{11}$$

Если движение грунта порождается действием воздушной ударной волны, распространяющейся вдоль поверхности грунта со скоростью, имеющей порядок D, то $l_{xy} \sim Dt_0$. Характерный размер области в направлении z будет порядка $l_z \sim at_0$, где a — характерное значение скорости волны (ударной или акустической) в грунте. Поэтому условие (11) сводится к

$$a \sim \varepsilon D \ll D \tag{12}$$

Далее рассмотрение условий совместности на фронте ударной волны, идущей в грунте, наклон которой имеет в силу (12) порядок ε, приводит к выводу, что оценки (1) будут справедливы на этом фронте. Приняв естественное допущение, что этого достаточно для их справедливости и всюду в области движения, приходим к выводу, что соотношение (12) и решает вопрос об условиях применимости предлагаемого приближенного метода.

Фактическое применение этого метода должно состоять в следующем.

Зная распределение давления за воздушной ударной волной

$$-\sigma_z(x, y, 0, t) = p_0 f(x / l_{xy}, y / l_{xy}, t / t_0) \tag{13}$$

будем иметь для каждого столба грунта, направленного вдоль оси z, с координата и x, y закон изменения во времени давления, приложенного к торцу столба. Этого достаточно, чтобы решить одномерную задачу о движении такого столба. Решение это в силу (13) будет зависеть от x и y, как от параметров. Конечно, при вычислении такого решения нужно решить конечное число одномерных задач для конечного набора значений x и y, а для промежуточных значений пользоваться интерполяцией. Таким образом, будут найдены функции w, p, ρ, ρ_*, S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}. Далее нужно решить соответствующую линейную задачу и определить в результате величины u, v, S_{xz}, S_{yz}, S_{xy}. Тем самым задача о пространственном неустановившемся движении грунта будет приближенно решена. Величина ошибки будет иметь порядок $\varepsilon^2 \sim (a/D)^2$. Таким образом, даже при $\varepsilon \sim 0.3$ ошибка будет составлять 10%, чего для многих случаев вполне достаточно.

Поступила 29 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D. On hypersonic similitude Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, № 1.
2. Черный Г. Г. Движения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
3. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, АН АрмССР, 1961.
4. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.