б) Пусть $\lambda = 1/2$, $A = \operatorname{ctg} \alpha$, т. е. случай конического штампа, вдавливаемого заостренным концом. Из (2.11) находим

$$a^2 = \frac{(\nu - 1) Q \operatorname{tg} \alpha}{\pi \nu G}, \qquad \delta = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg} \alpha$$

а из (3.9)

$$p(r) = p^\circ \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{1}{2} p^\circ \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}} \qquad (0 < r \leqslant a) \tag{4.5}$$

Здесь использована зависимость [2]

$$F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

в) Пусть $\lambda = 3/2$. Из (2.11) имеем

$$a^4 = \frac{4(\nu - 1) Q}{9\pi \nu G A}, \qquad \delta = \frac{3\pi}{4} A a^3$$

Из (3.6) получим

$$p(r) = p^\circ \left[\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}\right] \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

Поступила 25 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГТТИ, 1955.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГТТИ, 1951.
3. MacRobert T. M. Functions of a complex variable. London, 1954.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., ГТТИ, 1949.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ТИПА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Многие контактные задачи теории упругости (например контактные задачи для упругой полосы и др.) приводятся к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x - \xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad (|x| \leqslant 1, \ \lambda \in (0, \infty)) \tag{0.1}$$

Параметр λ характеризует толщину полосы и т. д. (свойства ядра интегрального уравнения указаны ниже). Ниже рассматривается несколько способов решения этого уравнения, каждый из которых целесообразно использовать на некотором интервале изменения λ; в совокупности эти способы исчерпывают диапазон изменения параметра λ. Именно для больших и очень малых значений λ решение уравнения (0.1) получено в виде простых и достаточно точных формул, для промежуточных значений λ решение уравнения (0.1) сведено к решению легко составляемой системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве примеров рассмотрены задачи о действии штампа на упругую полосу, лежащую без трения на недеформируемом основании, а также на полосу, жестко соединенную с недеформируемым основанием. Заметим, что первая из этих задач рассматривалась в работах [1–7]. В отличие от этих работ комплекс способов, предлагаемых в настоящей статье, позволяет значительно проще находить практически точные решения указанных задач при любых значениях параметра λ. Указаны границы рационального использования каждого способа и приведены необходимые таблицы.

§ 1. **Общий вид решения интегрального уравнения, вырожденные решения.** Рассмотрим интегральное уравнение вида (0.1) и будем считать, что его ядро обладает следующими свойствами.

1°. При всех $k \in (-\infty, \infty)$

$$K(k) = -\ln|k| + F(k) \qquad (F(k) \in H_q^\alpha\ (-c, c),\ \alpha > 0,\ q \geqslant 1,\ c < \infty) \tag{1.1}$$

где $F(k)$ — четная функция, которая может быть представлена степенным рядом с радиусом сходимости $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$

$$F(k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i k^{2i} \qquad (|k| < \rho) \tag{1.2}$$

2°. При $|k| \to \infty$ ядро

$$K(k) \to \pi A \delta(k) \qquad (A = \text{const}) \tag{1.3}$$

где $\delta(k)$ — дельта-функция Дирака.

В дальнейшем также будем предполагать, что функция

$$f(x) \in H_p^\alpha(-1,1), \quad \alpha > 0, \quad p \geqslant 1$$

через $H_n^\alpha(-\beta, \beta)$ обозначено пространство функций, n-я производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α при $-\beta \leqslant x \leqslant \beta$.

Определим форму (общий вид) решения интегрального уравнения. Используя формулу (1.1), представим уравнение (0.1) в виде

$$-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi f(x) - \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi, \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.4}$$

Будем искать решение $\varphi(\xi)$ уравнения (1.4) в классе функций $L(-1,1)$ — пространство абсолютно суммируемых функций. В этом случае

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi \in H_r^\alpha(-1,1) \qquad (\alpha > 0,\ r = \operatorname{Inf}(p, q)) \tag{1.5}$$

Если функцию $\psi(x)$ считать временно известной, то уравнение (1.4) будет вида

$$-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi \psi(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.6}$$

Решение его в классе $L(-1,1)$ имеет вид [8]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[P - \int_{-1}^{1} \frac{\psi'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt\right] \tag{1.7}$$

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{\ln 2\lambda} \int_{-1}^{1} \frac{\psi(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1.8}$$

Подставив теперь $\psi(x)$ в виде (1.5) в формулы (1.7), (1.8), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi \int_{-1}^{1} F'\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right) \frac{\sqrt{1-t^2}\, dt}{t-x}\right] \tag{1.9}$$

$$P = \frac{1}{\ln 2\lambda} \left[\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi \int_{-1}^{1} F\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] \tag{1.10}$$

Таким образом, интегральное уравнение первого рода (0.1) сведено к интегральному уравнению второго рода (1.9) при условии (1.10).

Для дальнейшего понадобятся некоторые свойства интеграла

$$I(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt \tag{1.11}$$

в зависимости от свойств функции $\gamma(t)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$\gamma(t)\in H_m^{\alpha}(-1,1)\qquad(\alpha>0)$$

Тогда функция

$$I(x)\in C_m(-1,1)$$

На основании этой теоремы, а также формул (1.5), (1.7) и (1.8), легко заключить, что решение уравнения (0.1) в классе $L(-1,1)$, если оно существует, при любом значении $\lambda\in(0,\infty)$ имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{\Phi(x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad(\Phi(x)\in C_{r-1}(-1,1),\ r=\operatorname{Inf}(p,q)) \tag{1.12}$$

Если в (1.5) значение $\alpha>{}^1/_2$, то таким же образом можно показать, что решения уравнения (0.1), ограниченные при $x=1\ (x=-1)$ будут иметь вид

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\Phi_1(x),\qquad(\Phi_1(x)\in C_{r-1}(-1,1)) \tag{1.13}$$

(аналогично в случае ограниченного решения при $x=-1$)

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,\Phi_2(x)\qquad(\Phi_2(x)\in C_{r-1}(-1,1)) \tag{1.14}$$

При этом на функцию $f(x)$ налагаются одно или два ограничения соответственно.

Найдем теперь вырожденные (предельные) решения уравнения (0.1) при очень больших и очень малых λ. При очень больших значениях параметра λ можно положить $F([t-\xi]/\lambda)=F(0)$, $F'([t-\xi]/\lambda)=0$; тогда из формул (1.9) и (1.10) получим

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[P-\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt\right],\quad P=\frac{1}{\ln 2\lambda+F(0)}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1.15}$$

Ограниченные решения и соответствующие им условия, налагаемые на функцию $f(x)$, легко могут быть получены [8] из первой формулы (1.15). При очень малых значениях параметра λ уравнение (0.1) в соответствии с формулой (1.3) можем представить в виде

$$A\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,\delta\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi=f(x)\qquad(|x|\leqslant 1) \tag{1.16}$$

Решение уравнения (1.16) находится без труда [1]

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{A\lambda}\qquad(|x|\leqslant 1) \tag{1.17}$$

Ограниченным решениям в случае очень малых λ соответствуют решения, обращающиеся в нуль при $x=1\ (x=-1)$ и $x=\pm 1$. Условия, налагаемые при этом на функцию $f(x)$, очевидно, имеют вид

$$f(1)=0\qquad(f(-1)=0),\qquad f(\pm 1)=0 \tag{1.18}$$

[1] Более точное решение уравнения (0.1) при малых λ может быть получено способом последовательных приближений [9], причем нулевым приближением будет решение (1.17). Однако практическое использование этого способа сопряжено с трудностями численного интегрирования на каждом этапе последовательных приближений, при этом происходит также и накопление ошибки

Из сравнения (1.17) и (1.12) можем заключить, что решение (1.17) будет, очевидно, давать правильные результаты при $|x| \leqslant 1 - \varepsilon(\lambda)$, причем $\varepsilon(\lambda) > 0$ и стремится к нулю при $\lambda \to 0$.

В заключение этого параграфа отметим важную роль при решении уравнения (0.1) случая $f(x) = \mu + \nu x$. Дело в том, что часто бывает достаточным определить не само решение уравнения (0.1), а величины

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad M = \int_{-1}^{1} \xi \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1.19}$$

Сделать это для произвольной функции $f(x)$ не представляет труда, если известно решение уравнения (0.1) (хотя бы приближенное) $\varphi(x) = \mu\varphi_\mu(x) + \nu\varphi_\nu(x)$ для функции $f(x) = \mu + \nu x$. Действительно, используя прием В. И. Моссаковского [10], можем получить

$$P = \int_{-1}^{1} f(x)\, \varphi_\mu(x)\, dx, \qquad M = \int_{-1}^{1} f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \tag{1.20}$$

§ 2. Решение при больших значениях параметра λ. Используя формулу (1.12), представим уравнение (1.9) в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\left[P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\, dt\right] + \frac{1}{U^2\lambda}\int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\, d\xi \int_{-1}^{1} F'\left(\frac{t-\xi}{\lambda}\right) \frac{\sqrt{1-t^2}\, dt}{(t-x)\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.1}$$

Считая величину P заданной, можем из уравнения (2.1) определить $\Phi(x)$, затем по формулам (1.12) и (1.10) найти $\varphi(x)$ и P.

Рассматривая правую часть уравнения (2.1) как оператор, переводящий элементы пространства $C(-1, 1)$ в элементы того же пространства и используя принцип Банаха «неподвижной точки», можно показать, что единственное решение уравнения (2.1) может быть получено методом последовательных приближений при достаточно больших значениях параметра λ, а именно при

$$\lambda > \frac{\max|F''|}{-\max|F'| + \sqrt{(\max|F'|)^2 + 2\max|F''|}} \tag{2.2}$$

В то же время при достаточно больших значениях параметра λ (при $\lambda > 2/\rho$) на основании формулы (1.2) уравнение (2.1) можем представить в виде, более удобном для дальнейшего использования

$$\Phi(x) = \Phi^\circ(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2i}} \int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\, L_i(\xi, x)\, d\xi \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \Phi^\circ(x) = \frac{1}{\pi}\left[P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\, dt\right] \\ L_i(\xi, x) = \frac{2ia}{\pi^2}\int_{-1}^{1} \frac{(t-\xi)^{2i-1}\sqrt{1-t^2}}{(t-x)\sqrt{1-\xi^2}}\, dt \end{gathered} \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.3), очевидно, может быть найдено методом последовательных приближений при

$$\lambda > \lambda^*, \qquad \lambda^* = \sup\left\{\frac{2}{\rho},\ \frac{\max|F''|}{-\max|F'| + \sqrt{(\max|F|)^2 + 2\max|F''|}}\right\} \tag{2.5}$$

В качестве нулевого приближения удобно взять $\Phi^\circ(x)$; легко видеть, что n-е приближение будет иметь вид

$$\Phi^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{2k}^n(x) \frac{1}{\lambda^{2k}} \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.3) может быть получено и другим способом, сущность которого состоит в следующем. Будем искать решение в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{2k}(x) \frac{1}{\lambda^{2k}} \tag{2.7}$$

Подставляя выражение (2.7) в уравнение (2.3) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ^{-2}, получим

$$\begin{gathered}\Phi_0(x) = \Phi^\circ(x), \qquad \Phi_2(x) = \int_{-1}^{1} \Phi_0(\xi) L_1(\xi, x)\, d\xi \\ \Phi_4(x) = \int_{-1}^{1} [\Phi_0(\xi) L_2(\xi, x) + \Phi_2(\xi) L_1(\xi, x)]\, d\xi\end{gathered} \tag{2.8}$$

Определяя последовательно $\Phi_0(x)$, $\Phi_2(x)$ и $\Phi_4(x)$, найдем решение уравнения (2.3) с точностью до членов порядка λ^{-6}, затем по формуле (1.12) получим

$$\begin{gathered}\varphi(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1 + \frac{2a_1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) + \frac{4a_2}{\lambda^4}\left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4\right)\right] - \\ - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f'(t) \left\{\frac{1}{t-x} - \frac{2a_1 x}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^4} \times \right. \\ \left. \times [2a_2(6x^3 - 6x^2 t + 2xt^2 - 2x + 3t) + 2a_1^2 x]\right\} dt + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Теперь по формуле (1.10), используя (1.2) и (2.9), определим величину

$$\begin{gathered}P = \left[\ln 2\lambda + a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right]^{-1} \left[\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f'(t)\, t \left(a_1 + \frac{a_2 t^2}{\lambda^2} + \frac{7a_2}{2\lambda^2}\right) dt\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Ограниченные решения и соответствующие им условия, налагаемые на функцию $f(x)$, легко могут быть получены [5] из формулы (2.9).

Второй способ решения уравнения (2.3) очевидно применим всегда, когда имеет место формула (1.2), т. е. при $\lambda > 2/\rho$. Связь между первым и вторым способами решения состоит в следующем:

$$\Phi_{2k}^{n}(x) \to \Phi_{2k}(x) \qquad \text{при } n \to \infty,\ \lambda > \lambda^* \tag{2.11}$$

в силу единственности решения при указанных значениях параметра λ и единственности представления $\Phi(x)$ в виде (2.7).

Нетрудно показать, что при любом n ряд (2.6) абсолютно сходится при $\lambda > 2/\rho$. Тогда, очевидно, ряд (2.7), представляющий собой решение уравнения (2.3), абсолютно сходится при $\lambda > \lambda^*$.

§ 3. Приближенное решение при любых значениях параметра λ. Зафиксируем параметр λ и аппроксимируем каким-либо способом функцию $F(k)$ при $0 \leqslant |k| \leqslant 2/\lambda$ полиномом (например интерполяционным)

$$F(k) = a_0 + \sum_{r=1}^{i} b_r k^{2r} \tag{3.1}$$

Подставляя выражение (3.1) в (1.4), приходим к следующему уравнению:

$$-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi f(x) - \sum_{r=0}^{i} \frac{b_r}{\lambda^{2r}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)(x-\xi)^{2r} d\xi \tag{3.2}$$

Ищем решение уравнения (3.2) в виде

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\sum_{s=-1}^{i-1} A_{2s+2}\, \xi^{2s+2} + \sum_{s=0}^{i-1} A_{2s+1}\, \xi^{2s+1} \right) \tag{3.3}$$

функция $\varphi_0(\xi)$ определяется формулами (1.15); постоянные A_{2s+2} и A_{2s+1} подлежат определению.

Подставляя $\varphi(\xi)$ в форме (3.3) в уравнение (3.2) и вычисляя интегралы, приходим к следующим соотношениям:

$$\sum_{s=-1}^{i-1} A_{2s+2} \left(\frac{(2s+1)!!}{(2s+2)!!} [\ln 2\lambda + a_0 - \gamma(2s+3)] + P_{2s+2}(x) + \sum_{r=1}^{i} \frac{b_r}{\lambda^{2r}} P_{2r}^{2s+2}(x) \right) =$$
$$= -\sum_{r=1}^{i} \frac{b_r}{\lambda^{2r}} P^{2r}(x) \tag{3.4}$$

$$\sum_{s=0}^{i-1} A_{2s+1} \left(Q_{2s+1}(x) - \sum_{r=1}^{i} \frac{b_r}{\lambda^{2r}} Q_{2r}^{2s+1}(x) \right) = \sum_{r=1}^{i} \frac{b_r}{\lambda^{2r}} Q^{2r}(x) \tag{3.5}$$

Здесь

$$P_{2s+2}(x) = \sum_{n=0}^{s} \frac{(2n-1)!!}{2n!!\,(2s-2n+2)} x^{2s-2n+2}$$
$$Q_{2s+1}(x) = \sum_{n=0}^{s} \frac{(2n-1)!!}{2n!!\,(2s-2n+1)} x^{2s-2n+1} \tag{3.6}$$

$$P_{2r}^{2s+2}(x) = \sum_{m=-1}^{r-1} C_{2r}^{2m+2} \frac{(2m+2s+3)!!}{(2m+2s+4)!!} x^{2r-2m-2}$$

$$Q_{2r}^{2s+1}(x) = \sum_{m=0}^{r-1} C_{2r}^{2m+1} \frac{(2m+2s+1)!!}{(2m+2s+2)!!} x^{2r-2m-1}$$

$$P^{2r}(x) = \sum_{m=-1}^{r-1} C_{2r}^{2m+2} P_{2m+2}\, x^{2r-2m-2}, \qquad Q^{2r}(x) = \sum_{m=0}^{r-1} C_{2r}^{2m+1} M_{2m+1}\, x^{2r-2m-1}$$

$$\gamma(1) = 0, \qquad \gamma(2s+3) = \sum_{p=1}^{2s+2} \frac{(-1)^{p+1}}{p}, \qquad P_0 = \frac{1}{\pi(\ln 2\lambda + a_0)} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$P_{2m+2} = \frac{1}{\pi(\ln 2\lambda + \alpha_0)} \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{m} \frac{(2q-1)!!}{2q!!} \int_{-1}^{1} t^{2m-2q+1} \sqrt{1-t^2}\, f'(t)\,dt$$

$$M_{2m+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{m} \frac{(2q-1)!!}{2q!!} \int_{-1}^{1} t^{2m-2q} \sqrt{1-t^2}\, f'(t)\,dt$$

Приравнивая коэффициенты правой и левой частей соотношения (3.4) при одинаковых степенях x, получим $i+1$ уравнение для определения $i+1$ величины A_{2s+2}. Аналогичным образом из соотношения (3.5) получим i уравнений для определения i величин A_{2s+1}. После решения указанных систем линейных алгебраических уравнений приближенное решение уравнения (1.4) получим по формулам (3.3), (1.15). Определив общее решение, легко найти ограниченные решения и соответствующие им условия, налагаемые на функцию $f(x)$.

Очевидно, для получения приближенных решений одинаковой точности необходимо с уменьшением λ увеличивать i, поэтому при очень малых λ рациональнее использовать вырожденное решение (1.17). Сходимость получаемых приближенных решений при $i \to \infty$ к точному решению непосредственно вытекает из оценки (2.10), данной в работе [2].

Отметим еще, что если $F(k)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая любое число раз функция при $-\infty < k < \infty$, то приближенные решения сохраняют все свойства точного решения.

§ 4. Примеры. Рассмотрим задачи о действии жесткого[1] штампа на упругую полосу, (а) лежащую без трения на жестком основании, (б) жестко приделанную к жесткому основанию. Силы трения между штампом и полосой предполагаются отсутствующими.

Методами операционного исчисления задачи (а) и (б) могут быть приведены к решению интегральных уравнений, которые в безразмерных координатах имеют вид (0.1), причем $\varphi(\xi)$ — неизвестное давление между штампом и полосой на линии контакта

$$\lambda = \frac{h}{a}, \qquad f(x) = \frac{\Delta}{a}\,\delta(x)$$

$$\Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}, \qquad x = \frac{x'}{a}, \; \xi = \frac{\xi'}{a}$$

Здесь h — толщина полосы, a — полудлина линии контакта, $\delta(x)$ — известная осадка границы полосы под штампом, x', ξ' — размерные переменные.

Ядра интегральных уравнений могут быть представлены в следующей форме:

$$\text{(а)} \quad K(k) = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{u(\operatorname{sh} 2u + 2u)} \cos ku\, du \tag{4.1}$$

$$\text{(б)} \quad K(k) = \int\limits_0^\infty \frac{[2(3-4\sigma)\operatorname{sh} 2u - 4u]}{u\,[2(3-4\sigma)\operatorname{ch} 2u + (3-4\sigma)^2 + 1 + 4u^2]} \cos ku\, du \tag{4.2}$$

Можно показать, что ядра (4.1) и (4.2) удовлетворяют всем требованиям, указанным в § 1, причем соответствующие этим ядрам функции $F(k)$ будут непрерывными и непрерывно дифференцируемыми любое число раз при $-\infty < k < \infty$, а радиус сходимости $\rho = 2$. Легко также показать, что $\max|F''(k)| = 2a_1$, $\max|F'(k)| = 2B$.

Таблица 1

	σ	a_0	a_1	a_2	a_3	B	A	λ_∞	λ°	λ^*	λ_0
(а)		—0.352	0.521	—0.135	0.0346	0.584	0.500	5.5	2.4	1.5	1/5
	0.1	—0.396	0.603	—0.190	0.0592	0.621	0.494	6	2.5	1.6	1/5
	0.2	—0.442	0.647	—0.212	0.0676	0.646	0.469	6	2.6	1.7	1/4.5
(б)	0.3	—0.527	0.716	—0.245	0.0801	0.688	0.408	6.5	2.8	1.8	1/7
	0.4	—0.683	0.828	—0.298	0.0998	0.760	0.278	7.5	3.2	1.9	1/10

[1] Решение легко получить и для упругого штампа при обычных в этом случае допущениях.

Таблица 2

k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$
0.00	—0.352	0.75	—0.096	1.50	0.389	2.25	0.798	3.00	1.096
0.05	—0.350	0.80	—0.066	1.55	0.420	2.30	0.821	3.05	1.113
0.10	—0.346	0.85	—0.035	1.60	0.451	2.35	0.844	3.10	1.129
0.15	—0.340	0.90	—0.003	1.65	0.481	2.40	0.866	3.15	1.146
0.20	—0.331	0.95	0.029	1.70	0.510	2.45	0.887	3.20	1.162
0.25	—0.320	1.00	0.062	1.75	0.540	2.50	0.908	3.25	1.177
0.30	—0.306	1.05	0.095	1.80	0.568	2.55	0.929	3.30	1.193
0.35	—0.290	1.10	0.128	1.85	0.596	2.60	0.949	3.35	1.208
0.40	—0.272	1.15	0.162	1.90	0.623	2.65	0.968	3.40	1.223
0.45	—0.252	1.20	0.195	1.95	0.650	2.70	0.988	3.45	1.238
0.50	—0.229	1.25	0.228	2.00	0.676	2.75	1.007	3.50	1.252
0.55	—0.206	1.30	0.261	2.05	0.702	2.80	1.025		дальше
0.60	—0.180	1.35	0.293	2.10	0.727	2.85	1.043		как $\ln k$
0.65	—0.153	1.40	0.326	2.15	0.751	2.90	1.061		
0.70	—0.125	1.45	0.358	2.20	0.775	2.95	1.079		

Значения величины B и всех других величин, необходимых для получения. вырожденных решений (1.15), (1.17) и решений (2.9), (2.10) приведены в табл. 1 Вырожденные решения при очень больших λ рекомендуется употреблять при $\lambda > \lambda_\infty$, вырожденные решения при очень малых λ — при $\lambda < \lambda_0$, решения для больших λ — при $\lambda > \lambda^\circ$. В этих пределах получаемые приближенные решения можно считать практически точными.

§ 5. **Примеры** (продолжение). Приближенные решения задач (а) и (б) при $\lambda^\circ > \lambda > \lambda_0$ могут быть получены способом, изложенным в § 3. Необходимые для этого значения функции $F(k)$ вычислены на машине «Урал» и даны в табл. 2 и 3 соответственно для задач (а) и (б). Таблицы составлены таким образом, что промежуточные значения функции $F(k)$ могут быть получены линейной интерполяцией с тремя точными знаками после запятой.

Как показывают расчеты, для получения практически точных решений рассматриваемых задач нужно величину i в формуле (3.1) при равноотстоящих узлах интерполяции выбирать в соответствии с соотношением

$$i \geqslant E^\circ\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) \tag{5.1}$$

Функция $E^\circ(x)$ равна ближайшему к x целому числу. Приведем, например, решение задач (а) и (б) для случая $\lambda = 1$, $\delta(x) = \delta + \alpha x$, причем согласно (5.1) имеем $i = 3$ (в данном примере при получении аппроксимаций (3.1) в качестве узлов интерполяции на отрезке [0,2] брались корни полинома Чебышева $T_7(^1\!/_2 k)$, равно отстоящие узлы дают несколько менее точные результаты)

$$\text{(а)}\quad \varphi(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\delta}{a}(1.913—0.979x^2 + 0.272x^4 - 0.082x^6) + \right.$$
$$\left. + \alpha x(1.788 - 0.649x^2 + 0.194x^4)\right] \tag{5.2}$$

$$\text{(б)}\quad \varphi(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\delta}{a}(2.334 - 1.400x^2 + 0.477x^4 - 0.172x^6) + \right.$$
$$\left. + \alpha x(2.163 - 1.123x^2 + 0.380x^4)\right] \quad (\sigma = 0.3) \tag{5.3}$$

Легко убедиться, что решение (5.2) находится в хорошем согласии с аналогичными решениями, полученными в работах [1–4, 6].

Вычисления, проведенные автором, показали, что в случае задачи (б) при неизменной осадке $\delta(x)$ и любом фиксированном λ давление $\varphi(x)$ возрастает с увеличением σ. Кроме того, оказалось, что давление под штампом в случае задачи (б)

Таблица 3

k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)
				$\sigma = 0.1$					
0.00	—0.395	0.75	—0.107	1.50	0.401	2.25	0.805	3.00	1.097
0.05	—0.394	0.80	—0.074	1.55	0.433	2.30	0.828	3.05	1.114
0.10	—0.389	0.85	—0.040	1.60	0.463	2.35	0.850	3.10	1.130
0.15	—0.382	0.90	—0.008	1.65	0.493	2.40	0.871	3.15	1.146
0.20	—0.371	0.95	0.029	1.70	0.523	2.45	0.892	3.20	1.162
0.25	—0.358	1.00	0.064	1.75	0.551	2.50	0.913	3.25	1.178
0.30	—0.342	1.05	0.098	1.80	0.579	2.55	0.933	3.30	1.193
0.35	—0.324	1.10	0.133	1.85	0.607	2.60	0.952	3.35	1.208
0.40	—0.303	1.15	0.168	1.90	0.634	2.65	0.972	3.40	1.223
0.45	—0.280	1.20	0.203	1.95	0.660	2.70	0.991	3.45	1.238
0.50	—0.255	1.25	0.237	2.00	0.686	2.75	1.009	3.50	1.252
0.55	—0.229	1.30	0.271	2.05	0.711	2.80	1.028		дальше
0.60	—0.200	1.35	0.304	2.10	0.735	2.85	1.045		как ln*k*
0.65	—0.170	1.40	0.337	2.15	0.759	2.90	1.063		
0.70	—0.139	1.45	0.370	2.20	0.782	2.95	1.080		
				$\sigma = 0.2$					
0.00	—0.441	0.65	—0.201	1.30	0.262	1.95	0.660	2.60	0.954
0.05	—0.440	0.70	—0.168	1.35	0.296	2.00	0.686	2.65	0.973
0.10	—0.435	0.75	—0.134	1.40	0.330	2.05	0.711	2.70	0.992
0.15	—0.427	0.80	—0.099	1.45	0.364	2.10	0.736	2.75	1.010
0.20	—0.416	0.85	—0.063	1.50	0.396	2.15	0.760	2.80	1.028
0.25	—0.402	0.90	—0.027	1.55	0.428	2.20	0.783	2.85	1.046
0.30	—0.384	0.95	0.009	1.60	0.460	2.25	0.806	2.90	1.064
0.35	—0.365	1.00	0.046	1.65	0.490	2.30	0.829	2.95	1.081
0.40	—0.343	1.05	0.082	1.70	0.520	2.35	0.851	3.00	1.098
0.45	—0.318	1.10	0.119	1.75	0.550	2.40	0.872		дальше
0.50	—0.292	1.15	0.155	1.80	0.578	2.45	0.893		как ln*k*
0.55	—0.263	1.20	0.191	1.85	0.606	2.50	0.914		
0.60	—0.233	1.25	0.227	1.90	0.633	2.55	0.934		
				$\sigma = 0.3$					
0.00	—0.527	1.00	0.005	2.00	0.678	3.00	1.096	4.00	1.385
0.05	—0.525	1.05	0.045	2.05	0.704	3.05	1.112	4.05	1.398
0.10	—0.520	1.10	0.084	2.10	0.729	3.10	1.129	4.10	1.410
0.15	—0.511	1.15	0.123	2.15	0.754	3.15	1.145	4.15	1.422
0.20	—0.498	1.20	0.161	2.20	0.778	3.20	1.161	4.20	1.434
0.25	—0.483	1.25	0.199	2.25	0.801	3.25	1.177	4.25	1.446
0.30	—0.464	1.30	0.236	2.30	0.824	3.30	1.192	4.30	1.458
0.35	—0.442	1.35	0.273	2.35	0.846	3.35	1.207	4.35	1.469
0.40	—0.418	1.40	0.308	2.40	0.868	3.40	1.222	4.40	1.481
0.45	—0.391	1.45	0.344	2.45	0.889	3.45	1.237	4.45	1.492
0.50	—0.362	1.50	0.378	2.50	0.910	3.50	1.251	4.50	1.503
0.55	—0.330	1.55	0.412	2.55	0.930	3.55	1.265	4.55	1.514
0.60	—0.297	1.60	0.444	2.60	0.950	3.60	1.280	4.60	1.526
0.65	—0.263	1.65	0.476	2.65	0.970	3.65	1.293	4.65	1.536
0.70	—0.226	1.70	0.507	2.70	0.989	3.70	1.307	4.70	1.547
0.75	—0.189	1.75	0.538	2.75	1.007	3.75	1.320	4.75	1.558
0.80	—0.151	1.80	0.567	2.80	1.026	3.80	1.334		дальше
0.85	—0.113	1.85	0.596	2.85	1.044	3.85	1.347		как ln*k*
0.90	—0.074	1.90	0.624	2.90	1.061	3.90	1.360		
0.95	—0.034	1.95	0.651	2.95	1.079	3.95	1.373		
				$\sigma = 0.4$					
0.00	—0.683	0.45	—0.527	0.90	—0.166	2.35	0.828	4.80	1.566
0.05	—0.681	0.50	—0.493	0.95	—0.121	2.40	0.851	4.85	1.576
0.10	—0.675	0.55	—0.457	1.00	—0.077	2.45	0.873	4.90	1.586
0.15	—0.664	0.60	—0.419	1.05	—0.033	3.50	1.244	4.95	1.597
0.20	—0.650	0.65	—0.380	1.10	0.010	3.55	1.259	6.00	1.791
0.25	—0.632	0.70	—0.339	1.15	0.053	3.60	1.273	6.05	1.799
0.30	—0.611	0.75	—0.296	1.20	0.096	3.65	1.287	6.10	1.807
0.35	—0.586	0.80	—0.253	2.25	0.781	3.70	1.301	6.15	1.816
0.40	—0.558	0.85	—0.210	2.30	0.805	4.75	1.555	6.20	1.824

Продолжение таблицы

k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)
1.25	0.138	2.50	0.894	3.75	1.315	5.00	1.607	6.25	1.832
1.30	0.178	2.55	0.915	3.80	1.328	5.05	1.617	6.30	1.840
1.35	0.219	2.60	0.936	3.85	1.342	5.10	1.627	6.35	1.848
1.40	0.258	2.65	0.956	3.90	1.355	5.15	1.637	6.40	1.856
1.45	0.296	2.70	0.975	3.95	1.368	5.20	1.646	6.45	1.863
1.50	0.333	2.75	0.995	4.00	1.380	5.25	1.656	6.50	1.871
1.55	0.369	2.80	1.014	4.05	1.393	5.30	1.666	6.55	1.879
1.60	0.405	2.85	1.032	4.10	1.406	5.35	1.675	6.60	1.886
1.65	0.439	2.90	1.050	4.15	1.418	5.40	1.685	6.65	1.894
1.70	0.472	2.95	1.068	4.20	1.430	5.45	1.694	6.70	1.902
1.75	0.505	3.00	1.085	4.25	1.442	5.50	1.703	6.75	1.909
1.80	0.536	3.05	1.102	4.30	1.454	5.55	1.712	6.80	1.916
1.85	0.566	3.10	1.119	4.35	1.466	5.60	1.721	6.85	1.924
1.90	0.596	3.15	1.136	4.40	1.477	5.65	1.730	6.90	1.931
1.95	0.625	3.20	1.152	4.45	1.489	5.70	1.739	6.95	1.938
2.00	0.653	3.25	1.168	4.50	1.500	5.75	1.748	7.00	1.945
2.05	0.680	3.30	1.184	4.55	1.511	5.80	1.756		дальше
2.10	0.706	3.35	1.199	4.60	1.522	5.85	1.765		как $\ln k$
2.15	0.732	3.40	1.214	4.65	1.533	5.90	1.774		
2.20	0.757	3.45	1.229	4.70	1.544	5.95	1.782		

больше, чем в задаче (а) при всех равных условиях и любом фиксированном λ, однако разница эта при $0 < \sigma \leqslant 0.2$ не превосходит 10%.

В заключение заметим, что при небольшом видоизменении все способы, изложенные в данной статье, могут быть применены к решению контактных задач для упругого слоя (необязательно осесимметричных).

Автор благодарен И. И. Воровичу за постановку задач и руководство, а также Н. В. Коваленко и В. Г. Шепелевой, взявшим на себя труд составления табл. 2 и 3.

Поступила 30 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтер О. Я. О влиянии мощности упругого слоя грунта на распределение напряжений в фундаментной балке. Тр. НИС Фундаментстроя, сб. 10, Свайные и естественные основания, Гос. изд-во строит. лит-ры, 1939.
2. Беленький М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 3.
3. Бирман С. Е. Об осадке жесткого штампа на слое грунта, подстилаемом скальным основанием. Инж. сб., 1954, т. XX.
4. Самарин И. К., Крашенинникова Г. В. О расчете балок на сжимаемом слое. Ж. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1960, вып. 2.
5. Александров В. М., Александрова Г. П. Контактная задача теории упругости для упругой полосы. Материалы второй научной конференции аспирантов. Изд-во Ростовск. ун-та, 1960.
6. Егоров К. Е. О деформации основания конечной толщины. Ж. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1961, вып. 1.
7. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, 1961, т. XIV, вып. 3.
8. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. ГИТТЛ, 1949.
9. Александров В. М. О действии штампа на упругую полосу (слой) малой толщины. Авторефераты научно-исследовательских работ за 1960 год. Изд-во Ростовск. ун-та, 1961.
10. Моссаковский В. И. К вопросу об оценке перемещений в пространственных контактных задачах. ПММ, 1951, т. XV, вып. 5.