ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПЛОСКОГО ШТАМПА КРУГОВОГО В ПЛАНЕ

Э. Г. Дейч

(Бухарест)

1. Допустим, что возвышение точек поверхности штампа в начальном состоянии над плоскостью, ограничивающей упругое полупространство, дается уравнением

$$\varphi(r) = Ar^{2\lambda} \qquad (\lambda > 0) \tag{1.1}$$

Предположим, что сила Q приложена по оси вращения поверхности основания штампа. Для радиуса площадки соприкасания a и перемещения штампа δ имеем [1]

$$a^{2\lambda+1} = \frac{(\nu-1)\,Q}{4\nu GA\beta_\lambda}, \qquad \delta = Aa^{2\lambda}\alpha_\lambda \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k^{(\lambda)} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k-1)!!} \qquad [(-1)!! = 1], \qquad \beta_\lambda = \alpha_\lambda - I_0^{(\lambda)} \tag{1.3}$$

$$I_k^{(\lambda)} = (-1)^k (4k+1) \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1} k!} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma^2(\lambda+1)}{\Gamma(k+\lambda+{}^3/_2)\,\Gamma(\lambda-k+1)} \tag{1.4}$$

Здесь ν — число Пуассона, G — модуль сдвига упругого полупространства.

Для распределения давления по площадке контакта имеем

$$p(r) = \frac{p^\circ}{2\beta_\lambda \mu} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!\, I_k^{(\lambda)}}{(2k-1)!!} \left[1 - \frac{P_{2k}(\mu)}{P_{2k}(0)}\right] \tag{1.5}$$

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \qquad \left(p^\circ = \frac{Q}{\pi a^2}\right)$$

Здесь $P_{2k}(\mu)$ — полиномы Лежандра. Давление в центре площадки равно

$$p_0 = p(0) = p^\circ \chi_\lambda, \qquad \chi_\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{[(2k-1)!!]^2} I_k^{(\lambda)} \tag{1.6}$$

Попытаемся ниже привести эти формулы к более простому виду.

2. Обозначим

$$\gamma_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{[(2k-1)!!]^2} I_k^{(\lambda)} \tag{2.1}$$

Для величины χ_λ из (1.6) будем иметь

$$\chi_\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_\lambda}(\gamma_\lambda - I_0^{(\lambda)}) = \frac{\beta_\lambda - \gamma_\lambda + I_0^{(\lambda)}}{2\beta_\lambda} \qquad \text{или} \qquad \chi_\lambda = \frac{\alpha_\lambda - \gamma_\lambda}{2\beta_\lambda} \tag{2.2}$$

Представив выражение $I_k^{(\lambda)}$ из (1.4) в виде

$$I_k^{(\lambda)} = \frac{(-1)^k (4k+1)}{2k!} \frac{\Gamma(k+{}^1/_2)\,\Gamma^2(\lambda+1)}{\Gamma(k+\lambda+{}^3/_2)\,\Gamma(\lambda-k+1)} \tag{2.3}$$

можно будет написать формулы (1.3) и (2.1) в следующем виде:

$$\alpha_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2(\lambda+1)}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4k+1}{\Gamma(k+\lambda+{}^3/_2)\,\Gamma(\lambda-k+1)} \tag{2.4}$$

$$\gamma_\lambda = \frac{\pi\Gamma^2(\lambda+1)}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4k+1)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+{}^1/_2)\,\Gamma(k+\lambda+{}^3/_2)\,\Gamma(\lambda-k+1)} \tag{2.5}$$

Видя, что

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda-k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \Gamma(k-\lambda), \qquad 4k+1 = 4\frac{\Gamma(k+{}^5/_4)}{\Gamma(k+{}^1/_4)}$$

предыдущие формулы можно после некоторых преобразований написать

$$\alpha_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{2\Gamma(\lambda+{}^3/_2)}\,{}_3F_2\left(-\lambda,\ \frac{5}{4},\ 1;\ \lambda+\frac{3}{2},\ \frac{1}{4};\ -1\right) \tag{2.6}$$

$$\gamma_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{2\Gamma(\lambda+{}^3/_2)}\,{}_4F_3\left(-\lambda,\ \frac{5}{4},\ 1,\ 1;\ \lambda+\frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\ 1\right) \tag{2.7}$$

где ${}_pF_q(a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_q; x)$ — обобщенная гипергеометрическая функция [2].

Воспользуемся формулой Уиппля [3]

$${}_4F_3\left(\alpha,\ 1+\frac{1}{2}\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \frac{1}{2}\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1;\ -1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)} \qquad (\alpha-2\beta-2\gamma>-2)$$

и формулой Дугаля [3]

$${}_5\Gamma_4\left(\alpha,\ 1+\frac{1}{2}\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \frac{1}{2}\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\delta+1;\ 1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\delta+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma-\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma-\delta+1)\,\Gamma(\alpha-\delta-\beta+1)} \quad (\alpha-\beta-\gamma-\delta>-1)$$

Полагая в этих формулах $\alpha={}^1/_2$, $\beta=-\lambda$, $\gamma=\delta=1$, получим

$$\begin{aligned} &{}_3F_2\left(-\lambda,\ \frac{5}{4},\ 1;\ \lambda+\frac{3}{2},\ \frac{1}{4};\ -1\right)=2\lambda+1 && \left(\lambda>-\frac{1}{4}\right)\\ &{}_4F_3\left(-\lambda,\ \frac{5}{4},\ 1,\ 1;\ \lambda+\frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\ 1\right)=-\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1} && \left(\lambda>\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Таким образом, формулы (2.6) и (2.7) соответственно примут вид

$$\alpha_\lambda=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+{}^1/_2)},\qquad \gamma_\lambda=-\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{(2\lambda-1)\,\Gamma(\lambda+{}^1/_2)}\qquad \left(\lambda>\frac{1}{2}\right) \tag{2.9}$$

Тогда из (1.3) и (2.2) соответственно имеем

$$\beta_\lambda=\frac{\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+{}^3/_2)},\qquad \chi_\lambda=\frac{2\lambda+1}{2(2\lambda-1)}\qquad \left(\lambda>\frac{1}{2}\right) \tag{2.10}$$

Формулы (1.2) и (1.6) принимают вид

$$a^{2\lambda+1}=\frac{(\nu-1)\,Q}{4\nu GA}\,\frac{\Gamma(\lambda+{}^3/_2)}{\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)},\qquad \delta=Aa^{2\lambda}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+{}^1/_2)} \tag{2.11}$$

$$p_0=\frac{2\lambda+1}{2(2\lambda-1)}\,p^\circ \qquad \left(\lambda>\frac{1}{2}\right) \tag{2.12}$$

Выражение (2.10) для β_λ упрощает также и выражение потенциала ([1], гл. 5, формула (6.16)).

Получение этим же путем более простой формулы для давления затруднительно. Для этого изберем другой путь.

3. Известно [4], что рассматриваемая задача может быть также решена и другим способом, а именно: величины a и δ даются формулами

$$a^2\int_0^{\pi/2}\varphi'(a\sin\theta)\sin^2\theta\,d\theta=\frac{(\nu-1)\,Q}{4\nu G},\qquad \delta=a\int_0^{\pi/2}\varphi'(a\sin\theta)\,d\theta \tag{3.1}$$

и давление p — формулой

$$p(r)=-\frac{1}{2\pi}\int_r^a\frac{F'(s)\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}}\qquad (0<r<a) \tag{3.2}$$

где

$$F(r)=\frac{4\nu G}{\nu-1}\left[\delta-r\int_0^{\pi/2}\varphi'(r\sin\theta)\,d\theta\right]\qquad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{3.3}$$

Заменяя (1.1) выражениями (3.1), легко получим формулы (2.11). Учитывая (2.11), из (3.3) получим

$$F(r)=\frac{(2\lambda+1)\,Q}{2\lambda a^{2\lambda+1}}\,(a^{2\lambda}-r^{2\lambda}) \qquad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{3.4}$$

Теперь из (3.2) находим

$$p(r)=\frac{(2\lambda+1)\,Q}{2\pi a^{2\lambda+1}}\int\limits_r^a\frac{s^{2\lambda-1}ds}{\sqrt{s^2-r^2}} \tag{3.5}$$

Подстановка $s^2-r^2=a^2\xi^2$ переводит его в

$$p(r)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)p^\circ\int\limits_0^\rho\left(\frac{r^2}{a^2}+\xi^2\right)^{\lambda-1}d\xi \qquad \left(\begin{matrix}0\leqslant r\leqslant a\\ \rho=\sqrt{1-r^2/a^2}\end{matrix}\right) \tag{3.6}$$

Предположив, что $r\neq 0$ и подставив $s^2=r^2/(1-t)$ в (3.5), получим

$$p(r)=\frac{2\lambda+1}{4}\,p^\circ\left(\frac{r}{a}\right)^{2\lambda-1}B_{\rho^2}\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}-\lambda\right) \qquad \left(\begin{matrix}0<r\leqslant a\\ \rho^2=1-r^2/a^2\end{matrix}\right) \tag{3.7}$$

где $B_x(\alpha,\,\beta)$ — неполная бета-функция.

Учитывая равенства

$$B_x(\alpha,\,\beta)=\int\limits_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\frac{x^\alpha}{\alpha}F(1-\beta,\,\alpha;\,\alpha+1;\,x) \tag{3.8}$$

равенство (3.7) можно также представить в виде

$$p(r)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)p^\circ\left(\frac{r}{a}\right)^{2\lambda-1}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\,F\left(\lambda+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2};\,\frac{3}{2};\,1-\frac{r^2}{a^2}\right) \qquad (0<r\leqslant a) \tag{3.9}$$

Для давления p_0, соответствующего $r=0$, из (3.5) или (3.6) получим (2.12).

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть $\lambda=n$, где n — целое число. В этом случае увидим из (3.6), что

$$p(r)=\frac{2n+1}{2(2n-1)}\,p^\circ\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\,E_{n-1}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \qquad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{4.1}$$

Здесь $E_{n-1}(x)$ — полином $(n-1)$-й степени относительно x, определенный соотношениями

$$E_n(x)=\frac{2n+1}{\sqrt{1-x}}\int\limits_0^{\sqrt{1-x}}(x+\xi^2)^n\,d\xi, \qquad E_n(x)=1+\frac{2n}{2n-1}\,xE_{n-1}(x) \tag{4.2}$$

Здесь рекуррентная формула получается интегрированием по частям первого равенства.

Рекуррентная формула справедлива и для того случая, когда n не целое число. Из (4.2) находим $E_0(x)=1$, а затем последовательно получаем из (4.2)

$$E_1(x)=1+2x, \qquad E_3(x)=\frac{1}{5}(5+6x+8x^2+16x^3) \tag{4.3}$$

$$E_2(x)=\frac{1}{3}(3+4x+8x^2), \qquad E_4(x)=\frac{1}{35}(35+40x+48x^2+64x^3+128x^4)$$

Можно легко убедиться, что полиномы $E_n(x)$ представляют собой полиномы Якоби, а именно $E_n(x)=F(-n,\,1;\,{}^1\!/_2-n;\,x)$. Таким образом, выражение (4.1) можно еще представить в виде

$$p(r)=\frac{2n+1}{2(2n-1)}\,p^\circ\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\,F\left(1-n,\,1;\,\frac{3}{2}-n;\,\frac{r^2}{a^2}\right) \qquad (0\leqslant r\leqslant a) \tag{4.4}$$

Например, из (4.4) и (2.11) при $n=1$ и $A=1/2R$ получим

$$p(r)=\frac{3}{2}\,p^\circ\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} \qquad (0\leqslant r\leqslant a), \qquad a^3=\frac{3(\nu-1)\,QR}{8\nu G}, \qquad \delta=\frac{a^2}{R}$$

б) Пусть $\lambda = {}^1/_2$, $A = \operatorname{ctg}\alpha$, т. е. случай конического штампа, вдавливаемого заостренным концом. Из (2.11) находим

$$a^2 = \frac{(\nu - 1) Q \operatorname{tg}\alpha}{\pi\nu G}, \qquad \delta = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg}\alpha$$

а из (3.9)

$$p(r) = p^\circ \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\, F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{1}{2} p^\circ \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}} \qquad (0 < r \leqslant a) \tag{4.5}$$

Здесь использована зависимость [2]

$$F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

в) Пусть $\lambda = {}^3/_2$. Из (2.11) имеем

$$a^4 = \frac{4(\nu - 1) Q}{9\pi\nu G A}, \qquad \delta = \frac{3\pi}{4} A a^3$$

Из (3.6) получим

$$p(r) = p^\circ \left[\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}\right] \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

Поступила 25 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГТТИ, 1955.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГТТИ, 1951.
3. MacRobert T. M. Functions of a complex variable. London, 1954.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., ГТТИ, 1949.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ТИПА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Многие контактные задачи теории упругости (например контактные задачи для упругой полосы и др.) приводятся к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{x - \xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad (|x| \leqslant 1, \ \lambda \in (0, \infty)) \tag{0.1}$$

Параметр λ характеризует толщину полосы и т. д. (свойства ядра интегрального уравнения указаны ниже). Ниже рассматривается несколько способов решения этого уравнения, каждый из которых целесообразно использовать на некотором интервале изменения λ; в совокупности эти способы исчерпывают диапазон изменения параметра λ. Именно для больших и очень малых значений λ решение уравнения (0.1) получено в виде простых и достаточно точных формул, для промежуточных значений λ решение уравнения (0.1) сведено к решению легко составляемой системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве примеров рассмотрены задачи о действии штампа на упругую полосу, лежащую без трения на недеформируемом основании, а также на полосу, жестко соединенную с недеформируемым основанием. Заметим, что первая из этих задач рассматривалась в работах [1–7]. В отличие от этих работ комплекс способов, предлагаемых в настоящей статье, позволяет значительно проще находить практически точные решения указанных задач при любых значениях параметра λ. Указаны границы рационального использования каждого способа и приведены необходимые таблицы.