**Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

**У. К. Нигул**

(Таллин)

Исследование точности теории Кирхгофа — Лява в статике произвольных оболочек было начато в работах [1,2], в которых имелись в виду напряженные состояния с показателем изменяемости $p$ (см. формулу (1.8)), не превышающим предела $p \leqslant a^{-1/2}$ (здесь $a$ — относительная толщина оболочки). Эти работы привели к мнению, что гипотезы Кирхгофа—Лява позволяют определить напряженное состояние оболочки с асимптотической погрешностью порядка $a$ при $a \to 0$. Указанное утверждение является правильным для многих задач. Однако это не означает, что все варианты теории Кирхгофа—Лява являются эквивалентными и в асимптотическом смысле обоснованными во всех задачах.

Интересно отметить, что существуют такие задачи расчета круговых цилиндрических оболочек, при которых простейшие варианты теории Кирхгофа — Лява приводят к асимптотической погрешности порядка $a$ или $a^{1/2}$, а некоторые более сложные варианты — к погрешности в главных членах. Такие задачи нетрудно выявить, если сопоставить разрешающие уравнения различных вариантов теории Кирхгофа — Лява с разрешающим уравнением ([3], стр. 36), полученным аналитически из трехмерной теории упругости.

Оказывается, что в разрешающем уравнении теории В. В. Новожилова [4,5] коэффициенты являются правильными перед всеми статическими членами с множителем $a^2$, а при некоторых других вариантах теории круговых цилиндрических оболочек [6,10] появляются неправильные коэффициенты перед смешанны производными четвертого и шестого порядка. Нетрудно подобрать такие задачи, в которых существенную роль играют именно эти члены.

Одну такую задачу рассматривал В. М. Даревский [6]. Оставаясь в пределах точности гипотез Кирхгофа — Лява, он построил сравнительно сложный вариант теории для решения задач упомянутого типа. Рассматривая конкретный пример, В. М. Даревский пришел к выводу, что его теория и теория В. В. Новожилова дают различные формулы для главных членов перемещений. В связи с этим В. М. Даревский ([6], стр. 535) высказал мнение, что соотношения упругости теории В. В. Новожилова [4] являются слишком упрощенными для решения рассматриваемой задачи. В данной статье будет показано, что в асимптотическом смысле правильным будет именно решение, полученное на основе теории В. В. Новожилова.

Приведенный пример наглядно показывает, что существуют задачи, при которых более тщательное соблюдение гипотез Кирхгофа — Лява не только не приводит к уточнению решения, а даже наоборот. Поэтому, очевидно, целесообразно сформулировать надежную основу оценки точности различных вариантов теории Кирхгофа — Лява.

В предлагаемой статье излагается линейная теория статики и динамики круговых цилиндрических оболочек, построенная как асимптотическое приближение к трехмерной теории упругости при $a \to 0$. Она позволяет определить достаточно медленно изменяющиеся напряженные состояния $(a^2p^2 \ll 1)$ с асимптотической погрешностью порядка $\vartheta_0 \sim a^2p^2 + a^2$. Для краткости будем называть эту теорию асимптотической теорией.

Предлагаемая асимптотическая теория представляет собой дальнейшее развитие результатов, полученных автором ранее [3] на основе метода степенных рядов, предложенного в современной форме для построения двумерной теории оболочек Н. А. Кильчевским [11] и В. В. Новожиловым и Р. М. Финкельштейном [1] и независимо от них примененного Эпштейном и Кеннардом [12–16] для построения динамики круговых цилиндрических оболочек. В [3] были введены асимптотические оценки погрешности, построена уточненная теория круговых цилиндрических оболочек и исследовано разрешающее уравнение.

В отличие от указанных работ в данной статье все искомые величины выражаются через разрешающую функцию. Это делает окончательные результаты более обозримыми и удобными для применения в приложениях. Важно подчеркнуть, что предлагаемая асимптотическая теория не зависит от специфических свойств метода степенных рядов. Она позволяет анализировать отдельные гипотезы и оценивать точность различных вариантов теории Кирхгофа — Лява. Оказывается, что в отдельности гипотезы теории Кирхгофа — Лява не являются в асимптотическом смысле обоснованными. Однако в таком сочетании, в каком они находят применение в теории В. В. Новожилова, они приводят к правильным окончательным формулам для тангенциальных усилий и некоторых других величин. Взаимная компенсация погрешностей гипотез является важным положительным свойством теории В. В. Новожилова и гарантирует правильные коэффициенты разрешающего уравнения. Уточнение соотношений упругости (в пределах теории Кирхгофа — Лява) может нанести ущерб явлению взаимной компенсации погрешностей и привести к более сложной, но менее точной теории, как это, например, имело место в [6].

В конце статьи приводятся результаты анализа точности теории В. В. Новожилова при статическом расчете круговых цилиндрических оболочек в поперечных тригонометрических рядах.

Указывается класс задач, при которых асимптотическая погрешность теории В. В. Новожилова не превышает предела $a$ или $a^{1/2}$. К этому классу относится также задача В. М. Даревского [6].

**1. Основные обозначения и исходные положения.** Введем следующие обозначения: $E$ — модуль упругости; $\mu$ — коэффициент Пуассона; $\rho$ — плотность материала; $R_0$ — радиус срединной поверхности оболочки; $\delta$ — толщина оболочки; $\xi$, $\varphi$, $\zeta$ — безразмерные координаты соответственно по длине, поперечному кругу и по радиусу оболочки; $t$ — время; $\tau$ — безразмерное время; $u_j$ ($j = 1, 2, 3$) — перемещения в направлениях $\xi$, $\varphi$, $\zeta$ соответственно; $\sigma_{jk}$ ($j, k = 1, 2, 3$) — напряжения. При этом

$$\xi = \frac{x}{R_0}, \qquad \zeta = \frac{R}{R_0}, \qquad \tau = \frac{t}{R_0}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\rho(1-\mu^2)}}$$

и

$$\nu = \frac{1}{1-\mu}, \qquad b = \frac{\delta}{2R_0}, \qquad a^2 = \frac{1}{3}b^2, \qquad \zeta_* = \zeta - 1$$

Безразмерные перемещения $u_j^*$ и напряжения $\sigma_{jk}^*$ определяем по формулам

$$u_j = s_j R_0 u_j^* \qquad (s_1 = s_3 = 1, \quad s_2 = i = \sqrt{-1}) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{jk} = E\,(1-\mu^2)^{-1}\, s_{jk}\sigma_{jk}^* \tag{1.2}$$

$$(s_{jk} = 1 \quad \text{при } jk = 11,\ 22,\ 33,\ 13; \qquad s_{jk} = i \quad \text{при } jk = 12,\ 23)$$

и безразмерные усилия, моменты и поперечные силы — по формулам

$$T_{jk}^* = N_{jk}^{\circ},\ M_{jk}^* = N_{jk}^{1}, \qquad Q_j^* = N_{j3}^{\circ} \qquad (j, k = 1, 2) \tag{1.3}$$

$$N_{jk}^{(n)} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} \alpha_j \zeta_*^{\,n} \sigma_{jk}^*\, d\zeta \qquad (j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3;\ n = 0, 1;\ \alpha_1 = \zeta,\ \alpha_2 = 1) \tag{1.4}$$

Для «интегральных перемещений» введем обозначение

$$U_{jn} = \frac{1}{2b} \int\limits_{-b}^{b} \zeta \zeta_*^n u_j^* \, d\zeta \qquad (j = 1, 2, 3;\ n = 0, 1, \ldots) \tag{1.5}$$

Будем рассматривать оболочки, ненагруженные поверхностной нагрузкой или нагруженные нормальной нагрузкой, вида

$$R_0 \delta^{-1} (1 \pm b) \, \sigma_{33}^* (\xi, \varphi, \pm b; \tau) = \pm \tfrac{1}{2} q_* \tag{1.6}$$

Для большого класса прикладных задач можно заменить (1.6) соотношением

$$q_* = R_0 \delta^{-1} E^{-1} (1 - \mu^2) \, q$$

где $q$ обозначает нормальную нагрузку, приведенную к срединной поверхности. (Из рассмотрения исключаются случаи чистого растяжения и кручения, как подробно изученные [5].)

При принятых условиях все напряженные состояния, имеющие достаточно малый показатель изменяемости, могут быть построены при помощи одной разрешающей функции Ф. В работе [3] предполагалось, что разрешающая функция Ф имеет вид

$$\Phi = \exp (\lambda \xi - \mathrm{i} m \varphi - i \Omega \tau) \tag{1.7}$$

При этом коэффициенты $\lambda$, $m$, $\Omega$ должны удовлетворять условию

$$1 \gg \vartheta_0 = a^2 g^2, \qquad g^2 = p^2 + c_1, \qquad p^2 = | c_2 \Omega^2 + c_3 \lambda^2 + c_4 m^2 | \tag{1.8}$$

$$c_j = \mathrm{const} \sim 1$$

Условие (1.8) можно рассматривать как определение понятия «достаточно малый показатель изменяемости напряженного состояния». Оно является основным предположением всех рассуждений данной статьи.

Если понимать равенства

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi = \lambda \Phi, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi = - \mathrm{i} m \Phi, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi = - i \Omega \Phi \tag{1.9}$$

в смысле символической записи производных, то формулы статьи [3] и данной статьи применимы также при неэкспоненциальных функциях Ф, являющихся достаточное число раз дифференцируемыми и при этом возрастающими не быстрее чем (1.7). Такие функции Ф часто встречаются при построении частных решений, соответствующих поверхностной нагрузке.

**2. Разрешающее уравнение и основные формулы асимптотической теории.** Функция Ф определяется с асимптотической погрешностью $\vartheta_0$ из уравнения ([3], стр. 43)

$$[d_0 + a^2 (d_1 + d_2)] \, \Phi = q_* \tag{2.1}$$

где

$$d_0 = - \Omega^6 - \tfrac{1}{2} (3 - \mu) \, \Omega^4 (\lambda^2 - m^2) + \Omega^4 - \tag{2.2}$$

$$- \tfrac{1}{2} (1 - \mu) \, \Omega^2 [(\lambda^2 - m^2)^2 - (3 + 2\mu) \lambda^2 + m^2] + \tfrac{1}{2} (1 - \mu) (1 - \mu^2) \lambda^4$$

$$d_1 = \tfrac{1}{2} (1 - \mu) \, [(\lambda^2 - m^2)^4 - 2m^6 + m^4], \qquad d_2 = 2 (1 - \mu) \lambda^2 m^2 (2m^2 - 1)$$

Однородное уравнение (2.1) обладает следующим свойством. Если задать одну пару из трех величин $\Omega$, $\lambda$, $m$ таким образом, что их абсолютные величины существенно меньше $a^{-1}$, то получим характеристическое уравнение, корни которого также существенно меньше $a^{-1}$ и, следовательно, $\Phi$ удовлетворяет условию (1.8).

Уравнение (2.1) содержит производные по $\xi$ и $\varphi$ до восьмого порядка, а по $\tau$ до шестого. Это связано с тем, что существует только три формы распространения волн [17-19], удовлетворяющих условию (1.8).

Из системы уравнений ([3], стр. 29) получим для перемещений срединной поверхности ($\zeta_* = 0$) следующие формулы:

$$u_{j0}^* = v_{j0} + a^2 v_{j1} + \ldots \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

где

$$v_{10} = -\lambda\left[\mu\Omega^2 + \tfrac{1}{2}\mu(1-\mu)\lambda^2 + \tfrac{1}{2}(1-\mu)m^2\right]\Phi$$

$$v_{20} = m\left[\Omega^2 + \tfrac{1}{2}(2+\mu)(1-\mu)\lambda^2 - \tfrac{1}{2}(1-\mu)m^2\right]\Phi \tag{2.4}$$

$$v_{30} = \left[\Omega^4 + \tfrac{1}{2}(3-\mu)\Omega^2(\lambda^2 - m^2) + \tfrac{1}{2}(1-\mu)(\lambda^2 - m^2)^2\right]\Phi$$

$$v_{11} = -\lambda\left[\Omega^2 g^2 - \tfrac{1}{2}(1-\mu^2)\lambda^4 - \tfrac{1}{2}\mu(3-\mu)\lambda^2 m^2 + \tfrac{1}{4}(5-\mu)m^4 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{3}{4}\mu(3-\mu)\lambda^2 + \tfrac{1}{4}(1-2\mu)m^2\right]\Phi \tag{2.5}$$

$$v_{21} = m\left[\Omega^2 g^2 - \tfrac{1}{2}(5-2\mu-\mu^2)\lambda^4 + \tfrac{1}{4}(13-7\mu-2\mu^2)\lambda^2 m^2 - \right.$$
$$\left. - \tfrac{3}{4}(1-\mu)m^4 + \tfrac{1}{4}(2+3\mu+4\mu^2)\lambda^2 - \tfrac{3}{4}m^2\right]\Phi$$

$$v_{31} = \left[\Omega^2(p^4 + p^2) - \tfrac{3}{4}(\lambda^2 - m^2)^3 + \tfrac{3}{4}(2-2\mu+\mu^2)\lambda^4 - \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}(6-10\mu+5\mu^2)\lambda^2 m^2 + \tfrac{3}{4}(1-\mu)m^4\right]\Phi$$

На основе (2.3) следует из степенных рядов ([3], стр. 46—49), что поле перемещений и компоненты деформации $\varepsilon_{kr}^*$ ($k, r = 1, 2$) определяются с асимптотической погрешностью $\vartheta_0$ по формулам

$$u_j^* = v_{j0} + \zeta_*\psi_j, \qquad \varepsilon_{kr}^* = \varepsilon_{kr} + \zeta_*\varkappa_{kr} \qquad (j = 1, 2, 3;\ k, r = 1, 2) \tag{2.6}$$

где $\psi_j$, $\varepsilon_{kr}$ и $\varkappa_{kr}$ обозначают соответственно углы поворота, компоненты деформации срединной поверхности и изменения кривизны. Для этих величин имеем выражения

$$\psi_1 = -\lambda v_{30}, \qquad \psi_2 = v_{20} + m v_{30}, \qquad \psi_3 = -\mu\nu(\varepsilon_{11}^\vee + \varepsilon_{22}^\vee) \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^\vee, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}^\vee + \tfrac{1}{2}(1+\mu)\lambda m a^2 G$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^\vee + \tfrac{3}{4}\mu m^2 a^2 G \tag{2.8}$$

$$\varkappa_{11} = \varkappa_{11}^\vee, \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{12}^\vee, \quad \varkappa_{21} = \varkappa_{12}^\vee - \varepsilon_{12}^\vee, \quad \varkappa_{22} = \varkappa_{22}^\vee + \psi_3 - \varepsilon_{22}^\vee \tag{2.9}$$

Здесь

$$\varepsilon_{11}^{\vee} = \lambda v_{10}, \qquad \varepsilon_{12}^{\vee} = -mv_{10} + \lambda v_{20}, \qquad \varepsilon_{22}^{\vee} = mv_{20} + v_{30}$$

$$G = m^2(m^2-1)\Phi, \qquad \varkappa_{11}^{\vee} = \lambda\psi_1, \qquad \varkappa_{12}^{\vee} = 2\lambda\psi_2, \qquad \varkappa_{22}^{\vee} = m\psi_2 \tag{2.10}$$

Вычисление интегралов (1.4), (1.5) по степенным рядам напряжений и перемещений ([3], стр. 46—56) и применение формул (2.3) — (2.10) дает для усилий, моментов, интегральных перемещений и поперечных сил следующие формулы, построенные с асимптотической погрешностью $\vartheta_0$:

$$T_{11}^* = \varepsilon_{11}^{\vee} + \mu\varepsilon_{22}^{\vee} - \tfrac{1}{2}\mu(1-\mu)m^2a^2G$$

$$T_{22}^* = \mu\varepsilon_{11}^{\vee} + \varepsilon_{22}^{\vee} + (1-\mu)\left(2\lambda^2 - \tfrac{1}{2}m^2\right)a^2G \tag{2.11}$$

$$T_{12}^* = \tfrac{1}{2}(1-\mu)(\varepsilon_{12}^{\vee} + \lambda ma^2G)$$

$$T_{21}^* = \tfrac{1}{2}(1-\mu)(\varepsilon_{12}^{\vee} + \mu\lambda ma^2G)$$

$$M_{11}^* = a^2(\varkappa_{11} + \mu\varkappa_{22} + \varepsilon_{11}^{\vee} + \mu\varepsilon_{22}^{\vee} + \mu\nu q_*)$$

$$M_{22}^* = a^2(\mu\varkappa_{11}' + \mu\varkappa_{22} + \mu\nu q_*)$$

$$M_{12}^* = \tfrac{1}{2}(1-\mu)a^2\varkappa_{12}, \qquad M_{21}^* = \tfrac{1}{2}(1-\mu)a^2\varkappa_{21}$$

$$U_{j0} = v_{j0}, \qquad U_{j1} = a^2(v_{j0} + \psi_j) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2.12}$$

$$Q_1^* = \lambda M_{11}^* + mM_{21}^* + \Omega^2 U_{11}$$

$$Q_2^* = \lambda M_{12}^* - mM_{22}^* + \Omega^2 U_{21} \tag{2.13}$$

В задачах статики может оказаться целесообразным видоизменить выражения (2.11) $M_{11}^*$, $M_{22}^*$ на основе (2.1) в следующие:

$$M_{11}^* = a^2(\varkappa_{11}^{\vee} + \mu\varkappa_{22}^{\vee} + \varepsilon_{11}^{\vee} + \mu\varepsilon_{22}^{\vee})$$

$$M_{22}^* = a^2(\mu\varkappa_{11}^{\vee} + \varkappa_{22}^{\vee} - \mu\varepsilon_{11}^{\vee} - \varepsilon_{22}^{\vee}) \tag{2.14}$$

По существу формулы (2.6) — (2.14) выражают искомые величины через разрешающую функцию $\Phi$; они не написаны в развернутом виде только для краткости изложения.

При вычислении коэффициентов у $a^2G$ во всех выражениях тангенциальных усилий $\overset{*}{T}_{jk}$ $(j, k = 1, 2)$ оказывались нужными члены, стоящие в степенных рядах напряжений [3] с множителем $\zeta_*^2$ и в части $\overset{*}{T}_{jj}$ $(j = 1, 2)$, кроме того, члены, учитывающие влияние напряжений $\overset{*}{\sigma}_{33}$. Поэтому выражения (2.6), хотя и достаточно точны для определения $\varepsilon_{kr}$, не позволяют восстановить выражения (2.11) для $T_{jk}^*$.

О роли нормальных напряжений $\sigma_{33}^*$ при вычислении $T_{jj}^*$, $M_{jj}^*$ $(j = 1, 2)$ удобно судить следующим образом.

Воспользуемся проинтегрированными соотношениями упругости трехмерной теории в следующем виде

$$T_{jj}^* = \overset{\circ}{I_{jj}} + \overset{\circ}{J_{jj}}, \qquad M_{jj}^* = I_{jj}^1 + J_{jj}^1 \qquad (j = 1, 2) \tag{2.15}$$

где

$$\begin{gathered} I_{jj}^n = \frac{1}{2b} \int\limits_{-b}^{b} \zeta_*{}^n \alpha_j \{(1 - \mu)\, \varepsilon_{jj}(\zeta) + \mu\, [\varepsilon_{11}(\zeta) + \varepsilon_{22}(\zeta)]\}\, d\zeta \\ J_{jj}^n = \frac{\mu\nu}{2b} \int\limits_{-b}^{b} \zeta_*{}^n \alpha_j \sigma_{33}{}^*\, d\zeta, \qquad \alpha_1 = \zeta, \qquad \alpha_2 = 1 \quad (n = 0, 1) \end{gathered} \tag{2.16}$$

Тогда на основе [3] с точностью до членов с множителем $a^2$

$$\begin{gathered} J_{11}{}^\circ = J_{22}{}^\circ = \nu\mu a^2 \, \{-(\nu\Omega^2 + \lambda^2 - m^2)\, (\lambda v_{10} + m v_{20}) - m v_{20} + 2\Omega^2 v_{30}\} = \\ = \ldots + \tfrac{1}{2}\mu \; [(2 + \mu)\, \lambda^2 - m^2]\, a^2 G \\ J_{11}{}^1 = J_{22}{}^1 = \nu\mu a^2 q_* \end{gathered} \tag{2.17}$$

Сопоставление выражений (2.11) и (2.15) явно показывает, что могут существовать такие медленно изменяющиеся напряженные состояния, при которых гипотеза $\sigma_{33}{}^* \equiv 0$ в отдельно взятом виде является неприемлемой.

Нетрудно убедиться в том, что выражения (2.11) — (2.13) удовлетворяют проинтегрированным (двумерным) уравнениям равновесия оболочки в пределах асимптотической погрешности $\vartheta_0$. Первое и второе уравнения удовлетворяются тождественно, третье превращается в уравнение (2.1), четвертое и пятое — в формулы (2.13).

Изложенная асимптотическая теория, конечно, допускает дальнейшие упрощения при построении конкретных элементарных напряженных состояний. Однако в данной статье изучается только различие между асимптотической теорией и теорией Кирхгофа — Лява, так как в пределах последней проблемы дальнейшего упрощения рассматривались во многих работах [4, 5, 7, 20].

**3. Об асимптотической погрешности теориии Кирхгофа — Лява.** Ни один вариант теории Кирхгофа — Лява полностью не совпадает с асимптотической теорией.

Однако каждый вариант теории Кирхгофа — Лява является эквивалентным с асимптотической теорией в таких задачах, при которых с асимптоточеской погрешностью $\vartheta_0$ могут быть отброшены выражения, отличающие его от асимптотической теории.

Все последовательные варианты теории Кирхгофа—Лява являются равноценными асимптотической теории для большого класса задач, при которых оказывается возможным (в пределах погрешности $\vartheta_0$) опустить: в уравнении (2.1) выражение $d_2$, в формулах (2.8), (2.11)—выражения $a^2G$ и в формулах (2.14) — компоненты деформации $\varepsilon_{jk}{}^\nu$.

Применение варианта теории Кирхгофа — Лява, разработанного В. В. Новожиловым [4], в асимптотическом смысле оправдывается не только в указанных задачах, но и во многих других.

Теория В. В. Новожилова [4, 5] совпадает (в пределах асимптотической погрешности $\vartheta_0$) с асимптотической теорией в части основного уравнения [3,20] и в части формул для величин $v_{j0}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\psi_k$ $(k = 1, 2)$, $\varepsilon_{11}, \varkappa_{11}$ $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{22}$, $T_{jk}{}^*$ $(j, k = 1, 2)$, $M_{12}{}^*$ (в задачах статики упрощенное основное уравнение ([5], стр. 230) теории В. В. Новожилова полностью совпадает с уравнением (2.1)); его теория отличается формулами для $v_{j1}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{22}$, $\varkappa_{21}$, $M_{21}{}^*$, $M_{jj}^*$, $Q_j{}^*$ $(j = 1, 2)$, кроме того, она не определяет $\psi_3$.

Заметим, что $\varepsilon_{12}$ не совпадает с величиной $\omega$ в работах [4, 5]. Однако формула

$$\varepsilon_{12} = (1 - \mu)^{-1} (T_{12}{}^* + T_{21}{}^*)$$

вытекающая из (2.8), (2.11), позволяет определить правильное значение $\varepsilon_{12}$ по $T_{12}{}^*$, $T_{21}{}^*$ теории В. В. Новожилова.

Другие варианты теории Кирхгофа — Лява [6—8] отличаются от асимптотической теории более существенно, в том числе по коэффициентам выражения $d_2$ в уравнении (2.1) и перед $a^2G$ — в формулах (2.11) для $T_{jk}{}^*$. Удачность теории В. В. Новожилова заключается в взаимной компенсации погрешностей геометрических гипотез и упрощенных соотношений упругости. Поэтому нетрудно указать задачи, при которых теория В. В. Новожилова является в асимптотическом смысле обоснованной, а другие варианты теории Кирхгофа — Лява приводят к асимптотической погрешности порядка $a^\circ$. О противоположных примерах автор не имеет сведений.

Анализ точности теории В. В. Новожилова в симметричных (относительно поперечного круга $\xi = 0$) задачах статики $(\Omega = 0)$, при которых

$$a^2m^8 \lesssim 1 \qquad (m = 2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

$$q_* = r(\xi)\, e^{-im\varphi}, \qquad |r| \geqslant \left|\frac{d^n r}{d\xi^n}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{3.2}$$

и $\varepsilon_{12}$ не входит в условия, заданные на краях $\xi = \pm \xi_0 \sim 1$, дал следующие результаты.

1. Если $T_{12}{}^*$ не входит в краевые условия, то перемещения и усилия основного напряженного состояния определяются с асимптотической погрешностью $a$.

2. Если $T_{12}{}^*$ и $M_{11}{}^*$ или $T_{12}{}^*$ и $Q_1{}^*$ входят в краевые условия, то могут иметь место такие исходные данные, при которых перемещения и усилия основного напряженного состояния определяются с асимптотической погрешностью $a^{1/2}$.

3. Краевые эффекты для любой искомой величины и основное напряженное состояние для моментов и поперечных сил могут оказаться определенными с асимптотической погрешностью больше $a^{1/2}$, только в том случае, если соответствующее перемещение или напряжение в $a$ (или больше) раз меньше доминирующего перемещения или напряжения.

К рассматриваемому классу принадлежит ряд задач, при которых другие варианты теории Кирхгофа — Лява определяют перемещения или усилия основного напряженного состояния с асимптотической погрешностью порядка $a^{\circ}$. Одним из таких примеров является задача, исследованная В. М. Даревским [6].

Поступила 24 V 1962

ЛИТЕРАТУРА


1. Новожилов В. В. и Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. ПММ, 1943, т. VII, вып. 5.
2. Муштари Х. М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа — Лява. ПММ, 1947, т. XI, вып. 5.
3. Нигул У. К. Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез. Тр. Таллинского политехн. ин-та, 1960, № 176.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
6. Даревский В. М. Об соотношениях теории тонких оболочек. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Рояк Д. А. О едином приближенном характеристическом уравнении круговой цилиндрической оболочки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
8. Houghton D. S., Johns D. J. A. A Comparison of the Characteristic Equations in the Theory of Circular Cylindrical Shells, Aeronaut. Quart., 1961, vol. 12, № 3.
9. Morley L. S. D. An Improvement of Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 1.
10. Yu Yi-Yuan. Vibrations of Thin Cylindrical Shells Analyzed by Means of Donnell-Type Equations. J. Aero/Space Sciences, 1958, vol. 25, No. 11.
11. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. II, вып. 4.
12. Epstein P. S. On the Theory of Elastic Vibrations in Plates and Shells. J. Math. and Phys., 1942, vol. 21, No. 3.
13. Kennard E. H. The New Approach to Shell Theory: Circular Cylinders. J. Appl. Mech., 1953, vol. 20, No. 1.
14. Kennard E. H. Cylindrical Shells: Energy, Equilibrium, Addenda and Erratum J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No. 1.
15. Kennard E. H. Approximate Energy and Equilibrium Equations for Cylindrical Shells. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
16. Kennard E. H. A Fresh Test of the Epstein Equations for Cylinders. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 4.
17. Gazis D. C. Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders, I. Analytical Foundation, II. Numerical Results. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 5.
18. Greenspon J. E. Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell—Comparison of the Exact Theory With Approximate Theories. J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, No. 5.
19. Mirsky I. and Herrmann G. Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells. J. Acoust. Soc. America, 1957, vol. 29, No. 10.
20. Нигул У. К. Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки. Тр. Таллинского политехн. ин-та, 1958, № 147.
21. Нигул У. К. Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой кругоцилиндрической оболочки. 1960, Тр. Таллинского политехн. ин-та, 1960, № 171.