Прикладная математика и механика, Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОГО ПРОГИБА СИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Л. С. Срубщик, В. И. Юдович
(Ростов-на-Дону)

Уравнения большого прогиба симметрично загруженной оболочки вращения содержат естественный малый параметр ε^2 (относительная тонкостенность). При помощи асимптотических методов показано, что при малых ε существует равновесное состояние оболочки, при котором оболочка ведет себя подобно мембране всюду, кроме узкого участка вблизи границы, где имеет место явление краевого эффекта. Попутно строится эффективный способ вычисления этого решения.

§ 1. К постановке задачи. Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения [1]

$$Av - \frac{u^2}{2} + \theta u = 0 \qquad \left(u = \frac{dw}{d\rho}, \ A(\ ) \equiv -\rho \frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\ )\right) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^2 Au + uv - \theta v + \varphi(\rho) = 0, \quad \varphi(\rho) = \frac{1}{Eh}\int_0^\rho q(t)\, tdt, \qquad \varepsilon^2 = \frac{h^2}{12(1-\sigma) r_1^2}$$

Здесь w — прогиб срединной поверхности оболочки, $Eh\,v / \rho$ — радиальное усилие, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, ε^2 характеризует относительную тонкостенность, r_1 — радиус внешнего контура, $q(\rho)$ — интенсивность нормальной нагрузки, θ — угол наклона оболочки в недеформированном состоянии; в случае сферической оболочки, например, $\theta = \theta_1\rho$, где θ_1 — кривизна.

Краевые условия, соответствующие глухой заделке оболочки по контуру, имеют вид

$$\frac{dv}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}v = 0 \qquad \left(0 < \sigma < \frac{1}{2}\right)$$

$$u = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \qquad \frac{v}{\rho} < \infty, \quad \frac{u}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0 \tag{1.2}$$

(такой вид контурной заделки выбран лишь для определенности; дальнейшее легко переносится и на некоторые другие распространенные случаи, например, шарнирное закрепление).

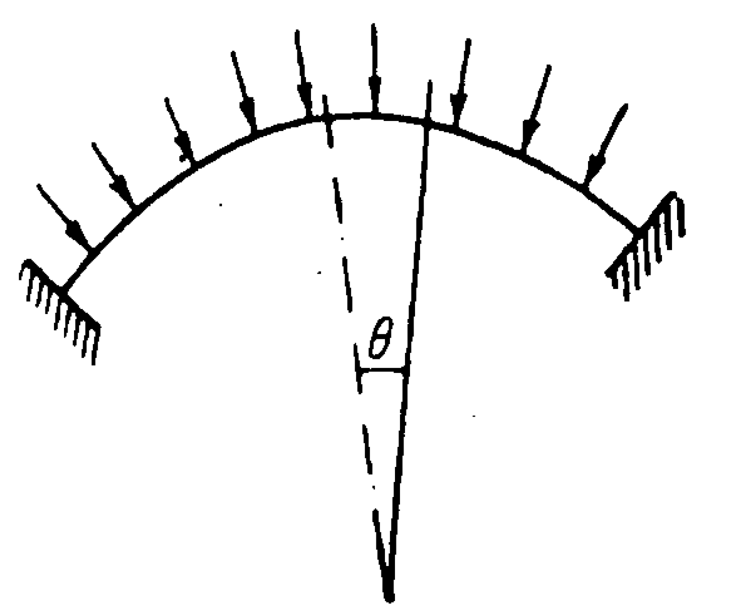
Рассмотрим асимптотическое поведение решений задачи (1.1,2) при $\varepsilon \to 0$. В случае пластины ($\theta = 0$) соответствующее исследование проведено в работе [2], где установлено, что решение задачи (1.1,2) близко к решению «вырожденной» задачи (задача для мембраны) всюду, кроме малой окрестности границы $\rho = 1$, где имеет место краевой эффект. При этом было существенно, что как для вырожденной, так и для невырожденной задачи имеет место единственность решения.

В дальнейшем важную роль играет вырожденная задача (о равновесии мембраны)

$$Av_0 - \frac{u_0^2}{2} + \theta u_0 = 0, \qquad u_0 v_0 - \theta v_0 + \varphi(\rho) = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{dv_0}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_0 = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \qquad \frac{v_0}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0 \tag{1.4}$$

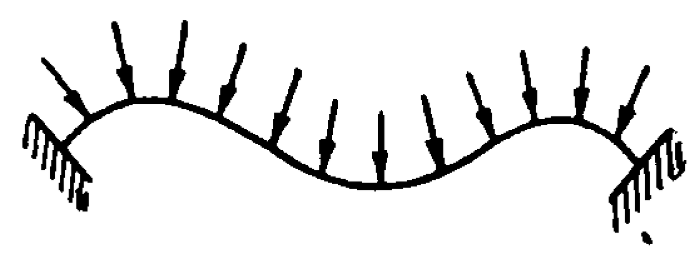
При этом механический смысл имеют только такие решения задачи (1.3,4), для которых $v_0 \geqslant 0$. (Мембрана выдерживает только растягивающие усилия.) Дальше такие решения называются положительными.



Фиг. 1

Теоремы существования и единственности положительных решений доказываются в § 2. Отметим, что решение задачи (1.3,4) в случае сферической оболочки и равномерной нормальной нагрузки было приближенно рассчитано Суркиным [3]. Естественно разыскивать решения задачи (1.1,2) близкие к положительным решениям задачи (1.3,4). Будем рассматривать такие решения задачи (1.1,2), для которых $v \geqslant 0$, и называть их мембранными. Далее устанавливается, что при достаточно малых ε такое решение существует и единственно. Именно мембранные решения при $\varepsilon \to 0$ переходят в положительные решения для мембраны.

На первый взгляд может показаться парадоксальным, что, например, в сферической оболочке, подвергнутой действию внешней нормальной нагрузки (фиг. 1), развиваются лишь растягивающие усилия. Это объясняется тем, что тонкая оболочка в этом случае «выворачивается» (фиг. 2) так, что приложенная нагрузка работает на увеличение выпуклости оболочки.



Фиг. 2

Для доказательства этих фактов вначале строятся формальные асимптотические разложения решения задачи (1.1,2), аналогичные полученным в работе [2] для случая пластины (§ 3), и в окрестности этих разложений применяется метод Ньютона, развитый для операторных уравнений Л. В. Канторовичем [4]. Наряду с получением указанных выше качественных результатов построенные здесь асимптотические разложения дают эффективный способ вычисления мембранных решений.

Отметим, что случай оболочки существенно отличается от случая пластины тем, что как невырожденная, так и вырожденная задача имеет, вообще говоря, несколько решений. Единственное решение отбирается условием положительности функции v.

Ниже будем предполагать выполненными следующие условия:

$$m_1\rho^2 \leqslant \varphi(\rho) \leqslant m_2\rho^2, \qquad \theta(\rho) \leqslant m_3\rho \qquad (m_1, m_2, m_3 = \text{const} > 0) \tag{1.5}$$

§ 2. Уравнения мембраны. Докажем, что задача (1.3,4) имеет и притом только одно положительное решение. Из (1.3) следует, что

$$u_0 = \theta - \frac{\varphi(\rho)}{v_0(\rho)} \tag{2.1}$$

Функция $v_0(\rho)$ определяется как решение задачи

$$Lv_0 \equiv -\frac{d\rho}{d_0}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho v_0 = \frac{\varphi^2}{2\rho v_0^2} - \frac{\theta^2}{2\rho} = 0$$

$$\frac{v_0}{\rho} < \infty \quad \text{при } \rho = 0, \qquad \frac{dv_0}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_0 = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (1.5). Тогда задача (2.2) имеет не более одного положительного решения.

В самом деле, если допустить, что для задачи (2.2) существует два решения $v_0(\rho) \geqslant 0$ и $v'_0(\rho) \geqslant 0$, то, обозначая $v_0 - v_0' = w$, будем иметь

$$\int_0^1 Lww\, d\rho \equiv \int_0^1 \left[\left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{w^2}{\rho^2}\right] d\rho + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) w^2(1) = -\int_0^1 \frac{(v_0 + v_0')\varphi^2 w^2}{2\rho v_0^2 v_0'^2}\, d\rho \tag{2.3}$$

Из (2.3), используя простое неравенство

$$w^2(1) = \left(\int_0^1 \frac{dw}{d\rho} d\rho\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2 d\rho \tag{2.4}$$

и учитывая положительность v_0, v_0', найдем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2 + \frac{w^2}{\rho^2}\right] d\rho + \sigma w^2(1) \leqslant 0 \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что $w = v_0 - v_0' \equiv 0$. Для доказательства существования применим метод Чаплыгина в форме весьма близкой к той, которую развил Б. Н. Бабкин [5]; при этом одновременно получим эффективный способ построения положительных решений.

Теорема 2.2. Задача (2.2) имеет не менее одного положительного решения.

Доказательство. Заметим вначале, что задача (2.2) эквивалентна операторному уравнению

$$v_0(\rho) = L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho v_0^2} - \frac{\theta^2}{2\rho}\right) \tag{2.6}$$

причем

$$L^{-1}f \equiv \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \eta \int_\eta^1 f(\xi)\, d\xi\, d\eta + \rho\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\int_0^1 \eta \int_\eta^1 f(\xi)\, d\xi\, d\eta \tag{2.7}$$

Введем функцию $C(\rho)$ равенством

$$C(\rho) = \left[\frac{\varphi^2(\rho)}{\theta^2 + \rho^2 a}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

где $a > \theta$ — любая постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$a^2\left(\max\frac{\theta^2(\rho)}{\rho^2} + a\right) \leqslant \left[\frac{16(1-\sigma)}{3-\sigma}\right]^2 \min\frac{\varphi^2}{\rho^4} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1) \tag{2.9}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $C(\rho)$ удовлетворяет неравенству

$$L^{-1}\left(\frac{\theta^2}{2\rho}\right) < L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho C^2}\right) \leqslant L^{-1}\left(\frac{\theta^2}{2\rho}\right) + C(\rho) \tag{2.10}$$

Покажем, что решение задачи является пределом последовательности функций $\{v_n\}$, определяемой соотношениями

$$v_1 = L^{-1}\left(\frac{\varphi^2}{2\rho C^2} - \frac{\theta^2}{2\rho}\right), \quad v_{n+1} = v_n - \delta_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

где δ_n — решение уравнения

$$L\delta_n + M\delta_n - \alpha_n = 0, \qquad \frac{\delta_n}{\rho}\bigg|_{\rho=0} < \infty, \qquad \frac{d\delta_n}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho}\delta_n\bigg|_{\rho=1} = 0 \tag{2.12}$$

$$\alpha_n = Lv_n - \frac{\varphi^2}{2v_n^2\rho} + \frac{\theta^2}{2\rho}, \qquad M = \max\left|\frac{\varphi^2}{\rho v_1^3}\right| \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1) \tag{2.13}$$

Величина M конечна, так как по условию $|\varphi| < m_1\rho^2$, а из (2.7, 10, 11) следует, что $v_1(\rho) \geqslant m_2\rho$.

Убедимся в том, что $\alpha_1 \leqslant 0$. Действительно, применяя (2.11) и (2.10), найдем

$$\alpha_1 = Lv_1 - \frac{\varphi^2}{2v_1^2\rho} + \frac{\theta^2}{2\rho} = \frac{\varphi^2(v_1^2 - C^2)}{2\rho v_1^2 C^2} \leqslant 0 \tag{2.14}$$

Используя этот факт, докажем, что $\delta_1 \leqslant 0$. Умножая (2.12) при $n = 1$ на δ_1 и интегрируя по ρ, получим

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{d\delta_1}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\delta_1^2}{\rho^2} + M\delta_1^2\right] d\rho + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\delta_1^2(1) = \int_0^1 \alpha_1\delta_1\, d\rho \tag{2.15}$$

Оценивая левую часть (2.15) при помощи неравенства (2.4), примененного к δ_1, выводим

$$\int_0^1 \alpha_1\delta_1\, d\rho \geqslant 0 \tag{2.16}$$

Если теперь допустить, что $\delta_1(\rho)$ неотрицательна, то можно указать такой отрезок $[\xi_1, \xi_2] \subset [0, 1]$, что $\delta_1(\rho) \geqslant 0$ для $\rho \in [\xi_1, \xi_2]$ и $\delta_1(\xi_1) = \delta_1(\xi_2) = 0$. Но это приводит к противоречию, так как аналогично (2.16) для $[\xi_1, \xi_2]$ получаем

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha_1\delta_1\, d\rho \geqslant 0 \tag{2.17}$$

Итак доказано, что $\delta_1(\rho)$ неположительная, т. е. $\delta_1(\rho) \leqslant 0$.

Из (2.15), используя (2.4) и неравенство

$$\int_0^1 \delta_1^2\, d\rho \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{d\delta}{d\rho}\right)^2 d\rho$$

выводим

$$\begin{gathered} \left(M + \frac{3}{2} + 2\sigma\right)\|\delta_1\|_{L_2}^2 \leqslant \int_0^1 \alpha_1\delta_1\, d\rho \leqslant \|\alpha_1\|_{L_2}\|\delta_1\|_{L_2} \\ \|\delta_1\|_{L_2} \leqslant \frac{\|\alpha_1\|_{L_2}}{M_1}, \qquad M_1 = M + \frac{3}{2} + 2\sigma \end{gathered} \tag{2.18}$$

Покажем теперь, что $\alpha_2 \leqslant 0$. Имеем

$$\alpha_2 = Lv_2 - \frac{\varphi^2}{2v_2^2\rho} + \frac{\theta^2}{2\rho} = \frac{\varphi^2}{2\rho v_1^2} - \frac{\varphi^2}{2\rho(v_1 - \delta_1)^2} + M\delta_1 \tag{2.19}$$

Применяя формулу Лагранжа, перепишем (2.19) в виде

$$\alpha_2 = \left[M - \frac{\varphi^2}{\rho(v_1 - \tau\delta_1)^3}\right]\delta_1 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{2.20}$$

Неположительность $\alpha_2(\rho)$ вытекает из (2.20) в силу определения (2.13) величины M и неравенств $v_1 \leqslant 0$, $\delta_1 \geqslant 0$. Из (2.20) вытекают, кроме того, оценки

$$|\alpha_2(\rho)| \leqslant M|\delta_1(\rho)|, \qquad \|\alpha_2\|_{L_2} \leqslant M\|\delta_1\|_{L_2} \tag{2.21}$$

Из (2.12) получаем

$$\|\delta_2\|_{L_2} \leqslant \frac{\|\alpha_2\|_{L_2}}{M_1} \tag{2.22}$$

Аналогично выводятся оценки

$$\| \delta_k \|_{L_2} \leqslant \frac{\| \alpha_k \|_{L_2}}{M_1}, \qquad \| \alpha_k \|_{L_2} \leqslant M \| \delta_{k-1} \|_{L_2} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.23}$$

Отсюда получаем для любого $k \geqslant 1$

$$\| \alpha_k \|_{L_2} \leqslant q^k \| \alpha_1 \|_{L_2}, \qquad \| \delta_k \|_{L_2} \leqslant q^k \frac{1}{M_1} \| \alpha_1 \|_{L_2}, \qquad q = \frac{M}{M_1} = \frac{M}{M + {}^3/_2 + 2\sigma} < 1 \tag{2.24}$$

Докажем, что ряд $v_1 - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots)$, а значит и последовательность $\{v_k\}$, равномерно на $[0, 1]$ вместе с первыми производными сходится к некоторой функции v_0. Для этого перейдем от (2.12) к уравнению

$$\delta_k = L^{-1} \alpha_k - M L^{-1} \delta_k \tag{2.25}$$

Теперь из (2.24, 25), используя (2.7), получаем оценку

$$\max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \left(| \delta_k | + \left| \frac{d\delta_k}{d\rho} \right| \right) \leqslant m_3 (\| \alpha_k \|_{L_2} + \| \delta_k \|_{L_2}) \leqslant m_4 q^k \| \alpha_1 \|_{L_2} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.26}$$

Отсюда и вытекает сходимость. Остается установить, что v_0 является решением (2.6). Из (2.13) вытекает следующее соотношение:

$$v_k = L^{-1} \left(\frac{\varphi^2}{2\rho v_k^2} - \frac{\theta^2}{2\rho} \right) + L^{-1} (\alpha_k) \tag{2.27}$$

Последний член (2.27) равномерно стремится к нулю в силу (2.24) и ограниченности L^{-1} как оператора, действующего из L_2 в пространство непрерывных функций C. Далее, заметим, что $m\rho \geqslant v_k \geqslant v_1 \geqslant m_1 \rho$, где m и m_1 — известные постоянные. Поэтому

$$\left| \frac{\varphi^2}{\rho v_k^2} - \frac{\varphi^2}{\rho v_0^2} \right| \leqslant m_5 \frac{\varphi^2}{\rho^5} | v_k - v_0 | \leqslant m_6 \left| \frac{dv_k}{d\rho} - \frac{dv_0}{d\rho} \right| \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty$$

и уравнение (2.6) для v_0 получается предельным переходом при $k \to \infty$ из (2.27).

Отметим, что можно построить другое доказательство теоремы 2.2, учитывая, что задача (2.2) эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$I[v] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho \left(\frac{dv}{d\rho} \right)^2 + \frac{v^2}{\rho} - 2\sigma v \frac{dv}{d\rho} + \frac{\varphi^2}{v} + \theta^2 v \right] d\rho \tag{2.28}$$

(энергия мембраны) на множестве положительных функций v, удовлетворяющих краевым условиям (2.2). Одновременно обосновывается метод Ритца для приближенного вычисления решения задачи (2.2).

§ 3. Построение асимптотического представления. Введем обозначения. Пусть вектор $\mathbf{V} \equiv (v, u)$— решение, а $P[\mathbf{V}]$ — левая часть системы (1.1). Для решения (1.1, 2) строятся асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} v &= \sum_{s=0}^{n+1} \varepsilon^s v_s + \sum_{s=0}^{n+1} \varepsilon^s h_s + \sum_{s=0}^{n+1} \varepsilon^s \alpha_s + x_n \\ u &= \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s u_s + \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s g_s + \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s \beta_s + z_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Функции $u_s(\rho)$, $v_s(\rho)$ получаем при помощи первого итерационного процесса [6].

Именно, полагаем

$$\mathbf{V}_n \equiv (v^n, u^n) \qquad \left(v^n = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s v_s, \quad u^n = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s u_s\right) \tag{3.2}$$

и требуем, чтобы было

$$P\,[\mathbf{V}_n] = O\,(\varepsilon^{n+1}) \tag{3.3}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ в (3.3), получаем для определения v_0, u_0 систему уравнений (1.3, 4), а для определения v_s, u_s — систему

$$Av_s - \frac{1}{2}\sum_{k+j=s} u_k u_j + \theta u_s = 0, \qquad \sum_{k+j=s} u_k v_j - \theta v_s + Au_{s-2} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n+1;\ u_{-1} = 0) \tag{3.4}$$

с краевыми условиями

$$\left[\frac{v_s}{\rho}\right]_{\rho=0} < \infty, \qquad \left[\frac{dv_s}{d\rho} - \frac{\sigma}{\rho} v_s\right]_{\rho=1} = B_s$$

где B_s — пока неизвестные постоянные. Функции u_s, v_s не удовлетворяют краевым условиям (1.2) при $\rho = 1$ и, следовательно, разность $\mathbf{V} - \mathbf{V}$ не мала вблизи точки $\rho = 1$. Возникающие невязки в выполнении краевых условий (1.2) при $\rho = 1$ компенсируются функциями типа пограничного слоя $h_s(\rho)$, $g_s(\rho)$, которые определяются при помощи второго итерационного процесса. Именно, ищем разность $\mathbf{V} - \mathbf{V}_n$ в виде

$$v - v^n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m h_m, \qquad u - u^n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m g_m \tag{3.5}$$

Пусть, далее,

$$r = 1 - \rho, \qquad v_k = \sum_{l=0}^{\infty} v_{kl} r^l, \qquad u_k = \sum_{l=0}^{\infty} u_{kl} r^l, \qquad \theta = \sum_{l=0}^{\infty} \theta_l r^l$$

соответствующие разложения в ряд Тейлора в точке $r = 0$. В (1.1) подставляем (3.5), делаем замену $\rho = 1 - \varepsilon t$ и приравниваем коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$. С учетом (3.3) это приводит к следующим системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 h_i}{dt^2} = 0 \qquad (i = 0, 1) \tag{3.6}$$

$$\frac{d^2 h_{s+2}}{dt^2} = R_1 h_{s+1} + R_2 h_s - \sum_{k+j+l=s} t^l u_{kl} g_j + \sum_{k+j+l+1=s} t^{l+1} u_{kl} g_j -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i+j=s} g_i g_j + \frac{1}{2}\sum_{i+j+1=s} t g_i g_j + \sum_{k+l=s} t^l \theta_l g_k - \sum_{k+l+1=s} t^{l+1}\theta_l g_k$$

$$\frac{d^2 g_s}{dt^2} - v_{00} g_s = R_1 g_{s-1} + R_2 g_{s-2} + \sum_{\substack{k+j+l=s \\ (s \neq j)}} t^l v_{kl} g_j - \sum_{k+j+l+1=s} t^{l+1} v_{kl} g_j +$$
$$+ \sum_{j+m=s} g_j h_m - \sum_{j+m+1=s} t g_j h_m + \sum_{k+m+l=s} t^l u_{kl} h_m - \sum_{k+m+l+1=s} t^{l+1} u_{kl} h_m -$$
$$- \sum_{k+l=s} t^l \theta_l h_k + \sum_{k+l+1=s} t^{l+1} \theta_l h_k \tag{3.7}$$

где

$$R_1(\ )\equiv 2t\frac{d^2(\ )}{dt^2}+\frac{d(\ )}{dt},\qquad R_2(\ )\equiv -t^2\frac{d^2(\ )}{dt^2}-t\frac{d(\ )}{dt}+(\ )$$

$$g_{-2}=g_{-1}=0,\qquad v_{00}=\frac{1}{1-\sigma}\int_0^1\eta\int_\eta^1\left(\frac{\varphi^2}{2\xi v_0^2}-\frac{\theta^2}{2\xi}\right)d\xi\,d\eta>0\quad(s=0,1,2,\ldots)$$

Требуя, чтобы g_s компенсировала невязку для u_s в выполнении граничных условий $u=0$ при $\rho=1$, получаем краевые условия

$$g_s|_{t=0}=-u_{s0}\qquad(s=0,1,\ldots,n)\tag{3.8}$$

Второе краевое условие для g_s и условие для h_s получаем из требования, чтобы решение имело характер пограничного слоя в окрестности $\rho=1$

$$g_s|_{t=\infty}=0,\qquad h_s|_{t=\infty}=0\qquad(s=0,1,\ldots,n)\tag{3.9}$$

Постоянные B_s определяем, приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^s\,(s=0,1,\ldots,n+1)$ в равенстве

$$\sum_{s=0}^{n+1}\varepsilon^s\left[\frac{d(v_s+h_s)}{d\rho}-\frac{\sigma}{\rho}(v_s+h_s)\right]_{\rho=1}=0\tag{3.10}$$

В частности, $B_0=0$. Из (3.6, 9) видно, что $h_0=h_1=0$. Именно отсюда вытекает правильность выбора краевого условия (1.4) для положительного решения в задаче о равновесии мембраны (1.3, 4). Из (3.7 — 9) в силу (3.6) получаем при $s=0$

$$\begin{gathered}\frac{d^2g_0}{dt^2}-v_{00}g_0=0,\qquad g_0|_{t=0}=-u_{00},\qquad g_0|_{t=\infty}=0,\qquad v_{00}>0\\ g_0=-u_{00}\exp(-\sqrt{v_{00}}t)=-u_0(1)\exp\left[-\sqrt{v_0(1)}\frac{1-\rho}{\varepsilon}\right]\end{gathered}\tag{3.11}$$

т. е. g_0 — функция типа пограничного слоя нулевого порядка. Теперь определяем h_2. Из (3.7, 9, 11) получаем

$$\frac{d^2h_2}{dt_2}+u_0(1)\,g_0+\frac{1}{2}g_0^2-\theta(1)\,g_0=0,\qquad h_2|_{t=\infty}=0$$

$$h_2=-\frac{[u_0(1)-\theta(1)]^2}{v_0(1)}\left(\frac{1}{8}\exp\left[-2\sqrt{v_0(1)}\frac{1-\rho}{\varepsilon}\right]-\exp\left[-\sqrt{v_0(1)}\frac{1-\rho}{\varepsilon}\right]\right)$$

Далее, из условия (3.10), приравнивая нулю коэффициент при ε^1, находим

$$B_1=-\frac{3}{4}\frac{[u_0(1)-\theta(1)]^2}{\sqrt{v_0(1)}}$$

Функции g_s определяются из уравнений типа (3.11), но неоднородных.

Бесконечно дифференцируемые, невозрастающие функции $\alpha_s(\rho)$ и $\beta_s(\rho)$ компенсируют невязку в выполнении граничных условий при $\rho=0$ соответственно для функций $g_s(\rho)$ и $h_s(\rho)$

$$\alpha_s(\rho)=\begin{cases}-h_s(0) & (0\leqslant\rho\leqslant 0.1),\\ 0 & (0.2\leqslant\rho\leqslant 1),\end{cases}\qquad \beta_s(\rho)=\begin{cases}-g_s(0) & (0\leqslant\rho\leqslant 0.1)\\ 0 & (0.2\leqslant\rho\leqslant 1)\end{cases}$$

Таким образом, процесс построения асимптотики сводится к следующему. Находим положительное решение v_0, u_0 задачи (1.3, 4) и из (3.11) определяем g_0. Затем из (3.4) последовательно находим v_s, u_s, а из (3.7—9) находим h_s, g_s $(s=1,2,\ldots)$.

§ 4. Обоснование асимптотических разложений. Существование мембранных решений. Введем обозначения $\varphi_k = v - x_k$, $\psi_k = u - z_k$.

Лемма 4.1. Для φ_k и ψ_k справедливы оценки

$$A\varphi_k - \frac{1}{2}\psi_k^2 + \theta\psi_k = O(\rho\varepsilon^{k+1})^*, \quad \varepsilon^2 A\psi_k + \varphi_k\psi_k - \theta\psi_k + \varphi(\rho) = O(\rho\varepsilon^{k+1}) \tag{4.1}$$

(условие $f(\rho, \varepsilon) = O(\rho\varepsilon^{k+1})$ означает, что $|f(\rho, \varepsilon)| \leqslant m\rho\varepsilon^{k+1}$).

Доказательство опустим, так как оно почти дословно повторяет доказательство для случая пластины.

Лемма 4.2. При достаточно малых ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$ для всех $\rho \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\varphi_k \geqslant 0, \qquad \frac{\varphi_k}{\rho} > \frac{v_1}{2\rho} \geqslant m > 0 \tag{4.2}$$

Здесь v_1 определяется в (2.11). Имеем

$$\varphi_k = \sum_{s=0}^{k+1} \varepsilon^s v_s + \sum_{s=0}^{k+1} \varepsilon^s h_s^\circ, \qquad h_s^\circ = h_s + \alpha_s$$

Учитывая, что $h_0 = 0$, а также оценки $v_s(\rho) = O(\rho)$, $h_s^\circ(\rho) = O(\rho)$, имеем

$$\varphi_k = v_0 + O(\rho\varepsilon) \tag{4.3}$$

Теперь неравенства (4.2) сразу следуют из (4.3), если использовать соотношение $v_0 \geqslant v_1 \geqslant m\rho$, отмеченное при доказательстве теоремы 2.2

Введем банаховы пространства векторов $\mathbf{V} \equiv (v, u)$:

1) состоящее из векторов с конечной нормой

$$(L_\rho) \qquad \|\mathbf{V}\|_{L_\rho}^2 = \int_0^1 \frac{v^2 + u^2}{\rho}\, d\rho \tag{4.4}$$

2) замыкание множества гладких вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.2), по норме

$$(W_\rho) \qquad \|\mathbf{V}\|_{W_\rho}^2 = \int_0^1 \frac{1}{\rho}\left[(Av)^2 + (Au)^2\right] d\rho \tag{4.5}$$

Задачу (1.1, 2) будем рассматривать как функциональное уравнение

$$P[\mathbf{V}] = 0 \tag{4.6}$$

где оператор P определяется левой частью системы (1.1) и действует из W_ρ в L_ρ.

Теорема 4.1. Задача (1.1, 2) имеет одно и только одно мембранное решение. Единственность доказывается точно так же, как и в случае пластины [7]. Для доказательства существования применяется теорема Л. В. Канторовича [4] о сходимости метода Ньютона. За начальное приближение принимается $\mathbf{V}_k^* = (\varphi_k, \psi_k)$.

В применении к рассматриваемой задаче теорема формулируется следующим образом.

Теорема 4.2. Пусть оператор P определен в сфере Ω ($\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_k^*\| \leqslant R$) пространства W_ρ и имеет в замкнутой сфере Ω_0 ($\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_k^*\| \leqslant r$) непрерывную вторую производную. Пусть, кроме того:

1) существует линейная операция $\Gamma_0 = [P_{\mathbf{V}_k^*}'(\mathbf{V})]^{-1}$

2) $\|\Gamma_0(P[\mathbf{V}_k^*])\|_{W_\rho} \leqslant \eta$

3) $\|\Gamma_0 P''(\mathbf{V})\|_{W_\rho} \leqslant K \qquad (\mathbf{V} \in \Omega_0)$

4) $h = K_\eta \leqslant \frac{1}{2}, \qquad r \geqslant r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\eta$

Тогда уравнение (4.6) имеет решение $\mathbf{V}^*$, к которому сходится процесс Ньютона. При этом

$$\|\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_k^*\|_{W_\rho} \leqslant r_0 \tag{4.7}$$

Очевидно, что условия теоремы выполняются, если

$$\|P(\mathbf{V}_k^*)\|_{L_\rho} \|[P_{\mathbf{V}_k^*}]^{-1}\|^2 \|P_{\mathbf{V}}''\| \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

Покажем, что (4.8) выполняется при достаточно малых ε для любого $k > 3$. Из (4.1) выводим

$$\|P(\mathbf{V}_k^*)\|_{L_\rho} \leqslant m\varepsilon^{k+1} \tag{4.9}$$

Оценим второй сомножитель в (4.8). Имеем

$$P_{\mathbf{V}_k^*}'(\mathbf{V}) \equiv (Av - \psi_k u + \theta u,\ \varepsilon^2 Au + \psi_k v + \varphi_k u - \theta v) \tag{4.10}$$

Из (4.10) получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} P_{\mathbf{V}_k^*}'(\mathbf{V})\,\mathbf{V}\,d\rho = \int_0^1 \left[\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{\rho^2}\right]d\rho + \varepsilon^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\rho^2}\right]d\rho +$$
$$+ \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)v^2(1) + \int_0^1 \frac{\varphi_k u^2}{\rho}\,d\rho \tag{4.11}$$

Из (4.11), используя (4.2) и (2.4), выводим

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} P_{\mathbf{V}_k^*}'(\mathbf{V})\,\mathbf{V}\,d\rho \geqslant \varepsilon^2 \|\mathbf{V}\|_{L_\rho}^2$$

Отсюда следует, что

$$\|P_{\mathbf{V}_k^*}'(\mathbf{V})\|_{L_\rho} \geqslant \varepsilon^2 \|\mathbf{V}\|_{L_\rho} \tag{4.12}$$

Пользуясь неравенством (4.12), нетрудно показать, что оператор $P_{\mathbf{V}_k^*}'$ обратим и имеет место оценка

$$\|[P_{\mathbf{V}_k^*}']^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{4.13}$$

Для оценки $\|P_{\mathbf{V}}''\|$ рассмотрим билинейную форму

$$P_{\mathbf{V}}''(\mathbf{V}')(\mathbf{V}'') = (-u'u'',\ u'v'' + u''v') \tag{4.14}$$

Теперь заметим, что справедливы неравенства типа теорем вложения

$$\int_0^1 \frac{v^4 + u^4}{\rho}\,d\rho \leqslant m\|\mathbf{V}\|_{W_\rho}^4, \qquad \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} |v| \leqslant m\|\mathbf{V}\|_{W_\rho} \tag{4.15}$$

которые легко выводятся из (4.5) и интегральных представлений u, v соответственно через Au и Av. Поэтому

$$\| P_{\mathrm{V}}'' (\mathrm{V}') (\mathrm{V}'') \|_{L_\rho}^2 \leqslant m^2 \| \mathrm{V}' \|_{W_\rho}^2 \| \mathrm{V}'' \|_{W_\rho}^2 \tag{4.16}$$

Отсюда следует оценка

$$\| P_{\mathrm{V}}'' \| \leqslant m_1 \tag{4.17}$$

Из (4.9, 13, 17) получаем, что

$$\| P \, [\mathrm{V}_k^*] \|_{L_\rho} \| [O_{\mathrm{V}_k^*}']^{-1} \|^2 \| P_{\mathrm{V}}'' \| \leqslant m_2 \varepsilon^{k-3} < \frac{1}{2} \tag{4.18}$$

если $k > 3$, а ε достаточно мало ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$). Итак, условия теоремы Л. В. Канторовича выполняются. Поэтому уравнение (4.6), эквивалентное задаче (1.1, 2), имеет решение $\mathrm{V}^* = (v, u)$, для которого справедлива оценка вида (4.7)

$$\| \mathrm{V}^* - \mathrm{V}_k^* \|_{W_\rho} \leqslant r_0$$

Подсчитывая величину r_0 при помощи неравенств (4.9, 13), находим:

$$\| \mathrm{V}^* - \mathrm{V}_k^* \|_{W_\rho} \leqslant m_3 \varepsilon^{k-1} \qquad (k > 3) \tag{4.19}$$

Наконец, из (4.19) при помощи (4.3,15) получаем, что

$$v = v_0 + O(\rho\varepsilon) \tag{4.20}$$

Отсюда и вытекает, что $v \geqslant m\rho$, если ε достаточно мало. Это означает, что построенное решение V^* является мембранным. Теорема 4.1 доказана.

Условие $v \geqslant 0$ позволяет применить рассуждения работы [2] и получить следующие выводы.

Теорема 4.3. Для мембранного решения задачи (1.1, 2) справедливы асимптотические представления (3.1), причем остатки допускают оценки

$$\max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} | x_k(\rho) | \leqslant m_1 \varepsilon^{k+1}, \qquad \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} | z_k(\rho) | \leqslant m_2 \varepsilon^{k + \frac{1}{2}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

$$\max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \left| \frac{dx_k}{d\rho} \right| \leqslant m_3 \varepsilon^{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots), \qquad \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \left| \frac{dz_k}{d\rho} \right| \leqslant m_4 \varepsilon^{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

$$\max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \left| \frac{d^2 x_k}{d\rho^2} \right| \leqslant m_5 \varepsilon^{k - \frac{1}{2}} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \left| \frac{d^2 z_k}{d\rho^2} \right| \leqslant m_6 \varepsilon^{k - \frac{5}{2}} \quad (k = 3, 4, \ldots)$$

Поступила 2 VI 1962

Ростовский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
2. Срубщик Л. С. и Юдович В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2.
3. Муштари Х. М. и Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигиздат, 1957.
4. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
5. Бабкин Б. Н. Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
6. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 5.
7. Морозов И. Ф. Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично загруженной круглой пластины. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 3