Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕКОТОРЫМ СМЕШАННЫМ ЗАДАЧАМ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

§ 1. Краевая задача. 1°. Пусть требуется определить две кусочно-аналитические функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ комплексного переменного z, граничные значения которых на контуре L удовлетворяют условиям

$$\varphi_1^+(t) = \alpha(t)\varphi_2^-(t) + f_1(t), \qquad \varphi_2^+(t) = \beta(t)\varphi_1^-(t) + f_2(t) \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные почти всюду на L функции, удовлетворяющие условию Гельдера на интервалах непрерывности ($\alpha(t)\beta(t) \neq 0$ на L).

В общем случае краевая задача Римана для многих функций сводится к системе уравнений Фредгольма. Наиболее полные исследования этой задачи изложены в обзорной статье Ф. Д. Гахова [1] и в монографии Н. И. Мусхелишвили [2]. В работе Ф. Д. Гахова [3] получено эффективное замкнутое решение для случая, когда матричный коэффициент задачи Римана представляет собой произведение двух матриц, элементы которых являются функциями, аналитическими соответственно во внутренней и внешней областях контура L за исключением некоторого числа точек, в которых могут быть полюсы. В статье [1] указано также замкнутое решение для случая коэффициента задачи Римана, являющегося функционально-коммутативной матрицей. В работе [4] рассмотрены некоторые другие случаи задач Римана для многих функций, разрешаемых в замкнутом виде.

Для контура, разбивающего комплексную плоскость z на внутреннюю и внешнюю области, краевая задача (1.1) решается простым переобозначением функции $\varphi_1^-(z)$ в функцию $\varphi_2^-(z)$ и наоборот.

2°. Пусть контур L состоит из некоторого числа n простых разомкнутых гладких кривых. Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ считаем ограниченными на бесконечности.

Каноническим решением краевой задачи (1.1) для разомкнутого контура L будем называть кусочно-аналитические функции $X_1(z)$ и $X_2(z)$, удовлетворяющие краевым условиям на контуре L

$$X_1^+(t) = \alpha(t)X_2^-(t), \qquad X_2^+(t) = \beta(t)X_1^-(t) \tag{1.2}$$

и обладающие следующими свойствами:

1) Функция $X_1(z)$ имеет ν_1 нулей в точках $z = c_i$ $(i = 1, \ldots, \nu_1)$, а функция $X_2(z)$ имеет ν_2 нулей в точках $z = d_i$ $(i = 1, \ldots, \nu_2)$. В остальных точках конечной части плоскости обе функции имеют нулевой порядок за исключением, быть может, точек разрыва коэффициентов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ и концов кривых L_k — точек $z = a_k$ и $z = b_k$ ($L = L_1 + \ldots + L_n$).

Числа ν_1, ν_2, c_i, d_i таковы, что алгебраическая система, состоящая из $(n-1)$ уравнения

$$\int\limits_L \tau^k \ln\left[\frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)}\prod_{i=1}^{\nu_1}(\tau-c_i)^{-2}\prod_{i=1}^{\nu_2}(\tau-d_i)^2\right]\frac{d\tau}{B_n^+(\tau)}=0 \qquad (1.3)$$
$$(k=0,1,\ldots,n-2)$$

является совместной. Здесь $B_n^+(\tau)$ означает предельное значение на левом берегу разреза аналитической вне L функции

$$B_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2} \qquad (1.4)$$

2) В концах кривых $z=a_k$ и $z=b_k$ и в точках разрыва коэффициентов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ класс функций $X_j(z)$ совпадает с заданным классом функций $\varphi_j(z)$, $j=1,2$.

3) На бесконечности функции $X_j(z)$ имеют наивысший возможный порядок.

Краевые условия (1.2) равносильны следующим соотношениям:

$$(X_1X_2)^+=\alpha\beta\,(X_1X_2)^-, \qquad \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^+\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^-=\frac{\alpha}{\beta} \qquad (1.5)$$

Таким образом, для произведения функций $X_1(z)$ и $X_2(z)$ получается линейная однородная задача Римана [2, 5], а отношение этих же функций определяется из нелинейной краевой задачи типа задачи Римана, рассмотренной в работе [6]. Получаем каноническое решение краевой задачи (1.1

$$\begin{aligned}X_1(z)&=\prod_{i=1}^{\nu_1}(z-c_i)\prod_{k=1}^{n}(z-b_k)^{-\varkappa_k}\exp\left\{\frac{1}{2}[\Gamma_0(z)+\Gamma(z)]\right\}\\X_2(z)&=\prod_{i=1}^{\nu_2}(z-d_i)\prod_{k=1}^{n}(z-b_k)^{-\varkappa_k}\exp\left\{\frac{1}{2}[\Gamma_0(z)-\Gamma(z)]\right\}\end{aligned} \qquad (1.6)$$

$$\Gamma_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln[\alpha(\tau)\beta(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-z} \qquad (1.7)$$

$$\Gamma(z)=\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int\limits_L \ln\left[\frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)}\prod_{i=1}^{\nu_1}(\tau-c_i)^{-2}\prod_{i=1}^{\nu_2}(\tau-d_i)^2\right]\frac{d\tau}{B_n^+(\tau)(\tau-z)}$$

Здесь аргументы функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ на кривой L_k $(k=1,\ldots,n)$ выбраны таким образом, чтобы при непрерывном изменении аргументов от точки $z=a_k$ к точке $z=b_k$ особенности функций $X_j(z)$ в точке $z=a_k$ и в точках разрыва коэффициентов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ совпадали с заданным классом $\varphi_j(z)$, а в точке $z=b_k$ заданный класс получается подбором целого числа $\varkappa_k$ (совершенно аналогично линейной краевой задаче для одной функции [2, 5]). Если алгебраическая система (1.3) имеет несколько решений ν_1 и ν_2, то для того, чтобы удовлетворялось условие 3) определения, нужно выбирать наименьшее из решений. Таким образом, решение однородной задачи (1.2) для разомкнутого контура L свелось к решению алгебраической системы (1.3).

Покажем разрешимость алгебраической системы (1.3) относительно c_i и d_i при некоторых конечных целых числах ν_1 и ν_2. Действительно, из общей теории известно [2, 1], что существует решение однородной краевой задачи (1.2), имеющее конечный порядок на бесконечности. Общее решение однородной краевой задачи (1.2) в классе функций, аналитических в конечной части плоскости, дается формулами (1.6), (1.7) при произвольных ν_1, ν_2, c_i, d_i. Требование конечности порядка решения однородной задачи (1.2) на бесконечности и обеспечивает выполнение условий (1.3) при некоторых ν_1, ν_2, c_i, d_i. Отметим случаи, когда числа ν_1, ν_2, c_i, d_i находятся элементарно.

1) Случай, когда $n = 1$. Каноническое решение (1.1) существует безусловно, так что в формулах (1.6) — (1.7) можно положить $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

2) Случай, когда функция $\alpha(t) / \beta(t)$ будет краевым значением аналитической вне контура L функции на левом берегу разрезов L, нигде вне L не обращающейся в нуль и на бесконечности имеющей нулевой порядок, причем $\alpha^+(z) / \beta^+(z) = C\alpha^-(z) / \beta^-(z)$, где C — некоторая константа. В этом случае условия (1.3) удовлетворятся, если взять $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

3°. Используя каноническое решение (1.6), (1.7), удовлетворяющее условиям (1.2), неоднородную краевую задачу (1.1) можно записать в виде

$$\left(\frac{\varphi_1}{X_1}\right)^+ = \left(\frac{\varphi_2}{X_2}\right)^- + \frac{f_1}{X_1^+}, \qquad \left(\frac{\varphi_2}{X_2}\right)^+ = \left(\frac{\varphi_1}{X_1}\right)^- + \frac{f_2}{X_2^+} \tag{1.8}$$

Решение граничной задачи (1.8) запишется следующим образом:

$$\varphi_j(z) = X_j(z)\left\{\frac{1}{4\pi i}\int_L\left[\frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} + \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)}\right]\frac{d\tau}{\tau - z} - \right. \qquad (j = 1, 2)$$

$$\left. -(-1)^j\frac{B_n(z)}{4\pi i}\int_L\left[\frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} - \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)}\right]\frac{d\tau}{B_n^+(\tau)(\tau - z)} + P_\varkappa^{(j)}(z)\prod_{i=1}^{\nu_j}(z - z_i)^{-1}\right\} \tag{1.9}$$

$$(z_i = c_i \ \text{ при } j = 1 \text{ и } z_i = d_i \ \text{ при } j = 2)$$

$$P_\varkappa^{(j)}(z) = \gamma_\varkappa^{(j)}z^\varkappa + \ldots + \gamma_0^{(j)}, \qquad P_\varkappa^{(j)}(z) = 0 \quad \text{при } \varkappa < 0, \qquad \gamma_i^{(j)} = \text{const}$$

При $\nu_j - \varkappa + n - 1 \geqslant 1$ должны выполняться $(\nu_j - \varkappa + n - 1)$ условий разрешимости неоднородной задачи (1.1)

$$\int_L\left[\frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} - \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)}\right]\frac{\tau^k d\tau}{B_n^+(\tau)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu_j - \varkappa + n - 2) \tag{1.10}$$

Условия разрешимости (1.10) верны лишь при $\nu_j - \varkappa \leqslant 1$; как только $\nu_j - \varkappa > 1$, вместо условий (1.10) должны удовлетворяться соотношения, получающиеся разложением первых двух членов под фигурной скобкой в формуле (1.9) в окрестности бесконечно удаленной точки и приравниванием нулю коэффициентов при положительных степенях z в разложении.

§ 2. Основная смешанная задача плоской теории упругости для плоскости с разрезами, расположенными на одной прямой. 1°. Пусть область, занятая упругим телом, представляет собой всю плоскость, разрезанную вдоль n отрезков $L_k = a_k b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ действительной оси x $(L = L_1 + \ldots + L_n)$. На одной части поверхности разрезов M заданы напряжения, на другой S — смещения $(L = M + S)$.

Различные частные случаи этой задачи были рассмотрены Н. И. Мусхелишвили [7] и Д. И. Шерманом [8, 9].

Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости для тела с разрезами вдоль оси x описываются потенциалами Н. И. Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z) \qquad (z = x + iy)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar z) + (\bar z - z)\overline{\Phi'(z)}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} \tag{2.1}$$

Здесь σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; u и v — компоненты вектора смещения по декартовым осям x и y; μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; при этом $\varkappa = 3-4\nu$ для плоской деформации и $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния.

При больших z аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют вид [7]

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) - \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O(z^{-2})$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) - \frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{2i\alpha} + \frac{\varkappa(X + iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O(z^{-2}) \tag{2.2}$$

где (X, Y) — главный вектор внешних усилий, приложенных к краям совокупности разрезов, N_1 и N_2 — значения главных напряжений на бесконечности, α — угол, который ось, соответствующая N_1, образует с осью x.

Легко видеть из представлений (2.1), что основные задачи плоской теории упругости для плоскости с разрезами сводятся к частному случаю рассмотренной в предыдущем параграфе задачи, когда $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — кусочно-постоянные функции. Ограничимся случаем, когда лежащие на нижнем и верхнем берегах разрезов точки, в которых меняется тип краевого условия, находятся одна против другой.

Краевая задача на основании основных представлений (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) &= \alpha(t)\,\Omega^-(t) + f_1(t),\\ \Omega^+(t) &= \alpha^{-1}(t)\Phi^-(t) + f_2(t),\end{aligned} \qquad \alpha(t) = \begin{cases} -1 & (t \in M)\\ 1/\varkappa & (t \in S)\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ & (t \in M)\\ 2\mu\varkappa^{-1}(\dot u^+ + i\dot v^+) & (t \in S)\end{cases}\\ f_2(t) &= \begin{cases} \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- & (t \in M)\\ -2\mu(\dot u^- + i\dot v^-) & (t \in S)\end{cases}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\sigma_y\pm$, $\tau_{xy}\pm$, $\dot u\pm$, $\dot v\pm$ — заданные значения напряжений и производных смещений на поверхности трещин.

Решение краевой задачи (2.3) находится по формулам (1.6), (1.7), (1.9) и (1.3), в которых функция $\alpha(t)$ определяется формулой (2.3), а функцию $\beta(t)$ следует положить равной

$$\beta(t) = \alpha^{-1}(t)\,e^{2\pi i n} \tag{2.5}$$

где n — целое число, которое, вообще говоря, терпит разрыв при переходе через точку перемены типа граничного условия. Аргумент функции

$\alpha(t)$ на отрезке L_k, а также целые числа n и $\varkappa_k$ выбираются в формулах (1.6), (1.7), (1.9), (1.3) таким образом, чтобы функции $X_j(z)$, а следовательно, также функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ в концах разрезов $z = a_k$ и $z = b_k$ и в точках разрыва коэффициента $\alpha(t)$ имели интегрируемую бесконечность.

Для определения неизвестных коэффициентов полиномов $P_\varkappa(z)$ в формуле (1.9) служат [7] следующие условия: 1) условие (2.2) на бесконечности; 2) условия однозначности смещений; 3) условия, выражающие то, что смещения принимают на разрезах заданные значения, а не только лишь с точностью до некоторых постоянных.

Замечание. Используя формулы Н. И. Мусхелишвили ([7], § 124), совершенно аналогично можно решить основную смешанную задачу плоской теории упругости для плоскости с разрезами, расположенными вдоль дуги одной и той же окружности.

2°. Рассмотрим конкретный пример. Пусть задан полубесконечный разрез $(-\infty, +l)$, на одной части поверхности которого $(-\infty, 0)$ известны смещения $u^\pm = 0$, $v^\pm = \pm h$ ($h = \text{const}$), а другая часть поверхности $(0, l)$ разрезов свободна от нагрузок $\sigma_y^\pm = \tau_{xy}^\pm = 0$. На бесконечности все напряжения равны нулю. В рассматриваемом случае функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ обращаются в нуль, а коэффициент $\alpha(t)$ равен

$$\alpha(t) = \begin{cases} -1 & (0, +l) \\ 1/\varkappa & (-\infty, 0) \end{cases} \tag{2.6}$$

При больших z аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют вид

$$\Phi(z) = O(z^{-1}), \quad \Omega(z) = O(z^{-1}) \tag{2.7}$$

По формулам (1.6), (1.7), (1.9) находим

$$\Phi(z) = \frac{C}{\sqrt{z(z-l)}}\left[\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-z}}{\sqrt{l}+\sqrt{l-z}}\right]^{i\beta} \qquad (C = \text{const}) \tag{2.8}$$

$$\Omega(z) = \frac{C\mathfrak{l}}{\sqrt{z(z-l)}}\left[\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-z}}{\sqrt{l}+\sqrt{l-z}}\right]^{-i\beta} \qquad \left(\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}\right) \tag{2.9}$$

Здесь при $z \to \infty$

$$\sqrt{z(z-l)} = z + O(z^{-1}), \qquad \left(\frac{\sqrt{l}-\sqrt{l-z}}{\sqrt{l}+\sqrt{l-z}}\right)^{i\beta} = e^{-\pi\beta} + O(z^{-1}) \tag{2.10}$$

Функция $\sqrt{z-l}$ положительна при $x > l$. По формуле Н. И. Мусхелишвили [7] смещения записываются в виде

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)}$$

$$\varphi(z) = \int\Phi(z)\,dz, \quad \omega(z) = \int\Omega(z)\,dz \tag{2.11}$$

Согласно граничным условиям при обходе бесконечно удаленной точки вектор смещения изменяется на $2hi$.

Отсюда по формулам (2.8), (2.9), (2.11) находим

$$C = \frac{\mu h}{\pi \sqrt{\varkappa}} \qquad (2.12)$$

Рассматриваемый случай реализуется, например, при расклинивании упругого тела абсолютно жестким клином толщины $2h$, когда коэффициент трения между поверхностями клина и упругого тела очень велик (практически больше 0.5, см. [10]). При этом длина подвижно-равновесной трещины l может быть определена из условия С. А. Христиановича конечности напряжений на кромке трещины и двух гипотез Г. И. Баренблатта [11]

$$l = \frac{4\pi^2}{K^2} C^2 = \frac{E^2 h^2}{K^2 (1+\nu)^2 (3-4\nu)} \qquad (2.13)$$

Здесь E — модуль Юнга, а K — модуль сцепления [11].

Для сравнения длин приведем выражение отношения длины трещины l в рассматриваемом случае к длине трещины l_0, получающейся [11] при расклинивании бесконечного хрупкого тела абсолютно жестким гладким клином толщины $2h$

$$\frac{l}{l_0} = \frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu}, \qquad l_0 = \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2 K^2} \qquad (h = \text{const}) \qquad (2.14)$$

Поступила 12 VI 62

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций. Усп. матем. н., 1952, т. VII, вып. 4 (50), стр. 3—54.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.— Л., Гостехиздат, 1946.
3. Гахов Ф. Д. Краевая задача Римана для системы n пар функций. ДАН СССР, 1949, т. 67, № 4.
4. Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, стр. 31—58.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
6. Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., АН СССР, 1954.
8. Шерман Д. И. Упругая плоскость с прямолинейными разрезами. ДАН СССР, 1940, т. 26, № 7, стр. 635—638.
9. Шерман Д. И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. ДАН СССР, 1940, т. 27, № 4, стр. 330—334.
10. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
11. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4, стр. 3—56.