Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. А. Свекло

(Калининград)

§ 1. Постановка задачи. Ищем регулярное, т. е. непрерывное вплоть до производных второго порядка решение уравнений движения [1]

$$
\begin{aligned}
&a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}\tag{1.1}
$$

в точках анизотропной полуплоскости $y \geqslant 0$ при следующих начальных

$$
u(x, y, 0)=u_0(x, y),\qquad v(x, y, 0)=v_0(x, y),\qquad (\partial u/\partial t)_0=u_0'(x, y),
$$
$$
(\partial v/\partial t)_0=v_0'(x, y)\tag{1.2}
$$

и краевых условиях:

$$
\tau_{xy}(x, 0, t)=A(x, t),\qquad \sigma_y(x, 0, t)=B(x, t)\tag{1.3}
$$

В правых частях этих равенств стоят заданные функции.

§ 2. Формула Грина — Вольтерра. В общем случае анизотропии имеет место формула Грина — Вольтерра

$$
\iiint\limits_T (u_1X_2+v_1Y_2-u_2X_1-v_2Y)\,dxdydt=
$$
$$
=\iint\limits_S [u_1P^*(u_2, v_2)+v_1Q(u_2, v_2)-u_2P(u_1, v_1)-v_2Q(u_1, v_1)]\,dS\tag{2.1}
$$

Здесь u_1, v_1 — решение уравнений (1.1), соответствующее массовым силам X_1, Y_1, а u_2, v_2 — массовым силам X_2, Y_2; через T обозначен произвольный объем в пространстве xyt, ограниченный поверхностью S, с внутренней нормалью n

$$
\begin{aligned}
P(u, v)&=\sigma_x\cos(nx)+\tau_{xy}\cos(ny)-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\cos(nt)\\
Q(u, v)&=\tau_{xy}\cos(nx)+\sigma_y\cos(ny)-\rho\frac{\partial v}{\partial t}\cos(nt)
\end{aligned}\tag{2.2}
$$

Формула остается справедливой и в том случае, когда одно из решений имеет правильные сильные разрывы [2].

§ 3. Фундаментальные решения. Построим специальные решения однородных уравнений (1.1), отличные от нуля внутри характеристического конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0) и имеющие нужную особенность на его оси $x=x_0$, $y=y_0$. Их назовем фундаментальными. Введем функции

$$\omega_{1j}^{\circ}=\gamma\left(\frac{c-d}{c}\frac{\lambda'_j}{\theta_j\lambda_j}-\frac{a}{L_{1j}}\right),\qquad \lambda_j'=\frac{d\lambda_j}{d\theta_j},$$

$$\omega_{2j}^{\circ}=\gamma\left(\frac{c+d}{L_{1j}}-\frac{a}{c}\frac{\lambda'_j}{\theta_j\lambda_j}\right),\qquad \gamma=\frac{c}{a^2-(c-d)^2},\qquad L_{1j}=a\theta_j^2+d\lambda_j^2-1 \quad (3.1)$$

Между θ_j и λ_j имеют место зависимости

$$L_{1j}L_{2j}-c^2\theta_j^2\lambda_j^2=0,\qquad L_{2j}=d\theta_j^2+a\lambda_j^2-1$$
$$\delta_j=t_0-t-(x-x_0)\,\theta_j+(y-y_0)\,\lambda_j=0 \quad (3.2)$$

Зададимся падающими возмущениями в виде

$$u_k^{\circ\circ}=\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Re} i\int^{\theta_j}c\xi\lambda_j(\xi)\,\overset{\circ\circ}{\omega}_{kj}(\xi)\,d\xi,\qquad v_k^{\circ\circ}=\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Re} i\int^{\theta_j}L_{1j}(\xi)\,\overset{\circ\circ}{\omega}_{kj}(\xi)\,d\xi \quad (3.3)$$

где

$$\omega_{kj}^{\circ\circ}=\frac{L_{2j}-c\lambda_j^2}{F_j^{\circ}}\,\overset{\circ}{\omega}_{kj}\quad(k=1,2),\qquad \omega_{3j}^{\circ\circ}=-\frac{\lambda_j}{\theta_j}\frac{c\theta_j^2\omega_{1j}^{\circ}+L_{2j}\omega_{2j}^{\circ}}{F_j^{\circ}}$$
$$F_j^{\circ}=c^2\lambda_j^2\,(\theta_j^2\omega_{1j}^{\circ}+\lambda_j^2\omega_{2j}^{\circ})+L_{2j}-c\lambda_j^2 \quad (3.4)$$

Строя [3] решения для отраженных возмущений с учетом границы, свободной от напряжений, и налагая их на соответствующие решения для падающих, получим фундаментальные решения u_k°, v_k°, отличные от нуля внутри характеристического конуса и равные нулю на его границе и вне его. Первые производные от этих решений рвутся при переходе через соответствующие характеристические поверхности, лежащие либо внутри упомянутого конуса, либо составляющие его границу, но, как легко показать, удовлетворяют кинематическим и динамическим условиям совместности.

§ 4. Оценка фундаментальных решений вблизи оси характеристического конуса. Чтобы провести эту оценку, укажем, что для этого достаточно оценить при больших значениях θ_j функции (3.3), так как только падающие возмущения имеют особенности на оси конуса. Учитывая [1] выбор ветвей λ_j при $c<a-d$, получим, выписывая лишь главные члены

$$\lambda_j=-M_j i\theta_j,\qquad M_j=\left[\frac{L_0}{2ad}+(-1)^{j+1}\sqrt{\frac{L_0^2}{4a^2d^2}-1}\,\right]^{1/2},\qquad L_0=a^2+d^2-c^2 \quad (4.1)$$

при этом

$$M_1M_2=1,\qquad M_1^2+M_2^2=\frac{L_0}{ad},\qquad (a-M_j^2d)(d-M_j^2a)+c^2M_j^2=0 \quad (4.2)$$

Из (3.2) находим

$$\theta_j=\frac{x'-iM_jy'}{r_j'^2}\,t',\qquad x'=x-x_0,\quad y'=y-y_0,\quad t'=t_0-t$$
$$r_j'^2=x'^2+M_j^2y'^2 \quad (4.3)$$

Легко получим при больших θ_j

$$\omega_{1j}^{\circ}=-\sum_{j=1}^{2}\frac{A_j^{\circ}}{\theta_j^2}+o(\theta_j^{-2}),\qquad \omega_{2j}^{\circ}=-\sum_{j=1}^{2}\frac{A_j^{\circ}}{M_j^2\theta_j^2}+o(\theta_j^{-2})$$
$$A_j^{\circ}=\frac{\gamma d}{c}\frac{\Pi_j}{a-M_j^2d},\qquad \Pi_j=a+(c-d)M_j^2\qquad (j=1,2) \quad (4.4)$$

Отсюда

$$\lim\,(\theta_j^2\omega_{1j}^\circ + \lambda_j^2\omega_{2j}^\circ) = 0, \qquad \theta_j \to \infty$$

и главные части функций ω_{kj}° и ω_{kj}^{∞} при больших θ_j совпадают. Теперь легко дать оценку для фундаментальных решений. Получим

$$u_1^\circ = -c\sum_{j=1}^{2} M_jA_j^\circ \operatorname{Re}\theta_j, \qquad v_1^\circ = -\sum_{j=1}^{2} B_j^\circ \operatorname{Re} i\theta_j, \qquad B_j^\circ = \frac{\gamma d}{c}\Pi_j \tag{4.5}$$

или

$$u_1^\circ = -c\sum_{j=1}^{2} M_jA_j^\circ \frac{x't'}{r_j'^2}, \qquad v_1^\circ = -\sum_{j=1}^{2} M_jB_j^\circ \frac{y't'}{r_j'^2} \tag{4.6}$$

Необходимо также оценить производные при больших θ_j. Пользуясь (3.2), (4.3) найдем

$$\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x} = c\sum_{j=1}^{2} M_jA_j^\circ \frac{x'^2 - M_j^2y'^2}{r_j'^4}t' \tag{4.7}$$

Этот же результат можно получить простым дифференцированием по x выражения для u_1°. Аналогично подсчитываются остальные производные. Не излагая выкладок, приводим окончательные результаты подсчета самих решений и соответствующих им напряжений.

а) Первое фундаментальное решение. К формулам (4.6) добавим

$$\sigma_{x1}^\circ = d\sum_{j=1}^{2} M_j\Pi_jA_j^\circ \frac{x'^2 - M_j^2y'^2}{r_j'^4}t', \qquad \sigma_{y1}^\circ = -d\sum_{j=1}^{2} \frac{\Pi_jA_j^\circ}{M_j}\frac{x'^2 - M_j^2y'^2}{r_j'^4}t' \tag{4.8}$$

$$\tau_{xy_1}^\circ = d\sum_{j=1}^{2} M_j\Pi_jA_j^\circ \frac{2x'y't'}{r_j'^4}$$

б) Второе фундаментальное решение

$$u_2^\circ = -c\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}A_j \frac{x't'}{r_j'^2}, \qquad v_2^\circ = -\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}B_j^\circ \frac{y't'}{r_j'^2} \tag{4.9}$$

Напряжения получаются в виде

$$\sigma_{x_2}^\circ = d\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}\Pi_jA_j^\circ \frac{x'^2 - M_j^2y'^2}{r_j'^4}t', \qquad \sigma_{y_2}^\circ = -d\sum_{j=1}^{2} M_j^{-3}\Pi_jA_j^\circ \frac{x'^2 - M_jy'^2}{r_j'^4}t'$$

$$\tau_{xy_2} = d\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}\Pi_jA_j^\circ \frac{2x'y't'}{r_j'^4} \tag{4.10}$$

в) Третье фундаментальное решение

$$u_3^\circ = -c\sum_{j=1}^{2} M_jA_j^\circ \frac{y't'}{r_j'^2}, \qquad v_3^\circ = \sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}B_j^\circ \frac{x't'}{r_j'^2} \tag{4.11}$$

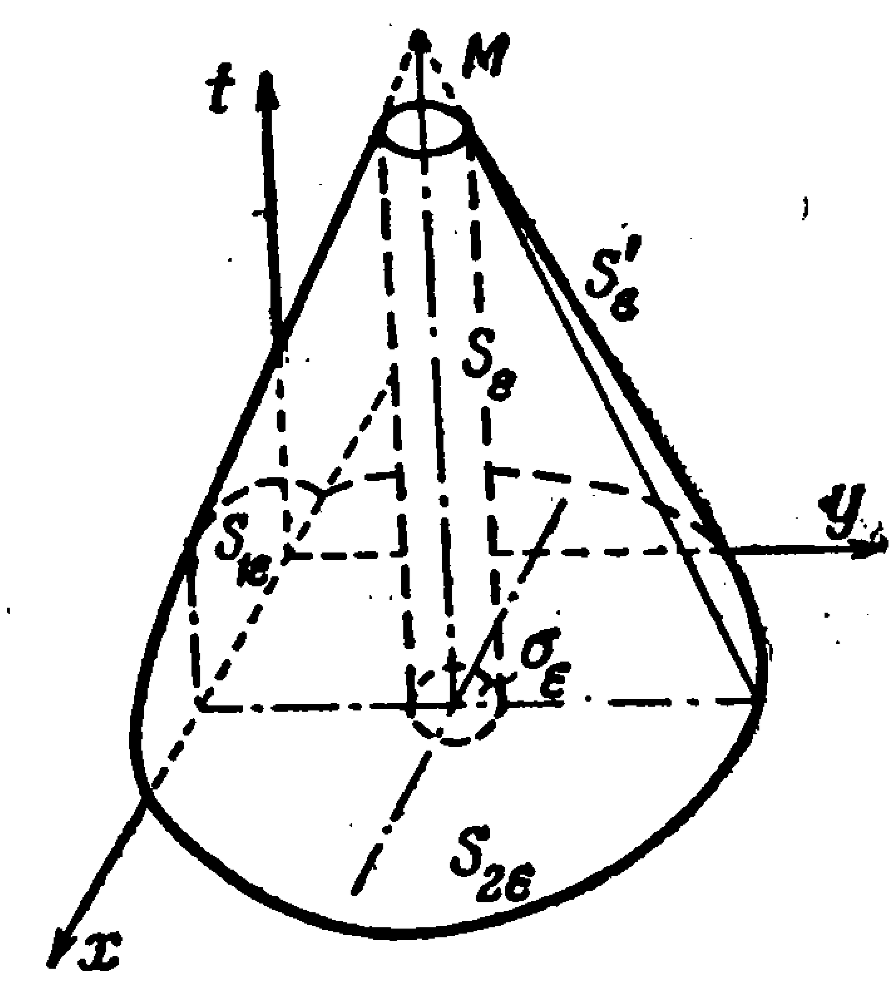
Для напряжений получим

$$\sigma_{x_3}^\circ = d\sum_{j=1}^{2} M_j\Pi_jA_j^\circ \frac{2x'y't'}{r_j'^4}, \qquad \sigma_{y_3}^\circ = -d\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}\Pi_jA_j^\circ \frac{2x'y't'}{r_j'^4}$$

$$\tau_{xy_3}^\circ = -d\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1}\Pi_jA_j^\circ \frac{x'^2 - M_j^2y'^2}{r_j'^4}t' \tag{4.12}$$

Во всех формулах указаны главные части.

§ 5. Решение задачи Коши для анизотропной полуплоскости. Для ее решения применим формулу Грина — Вольтерра к искомому и к одному из фундаментальных решений $u_k°$, $v_k°$. За область интегрирования примем часть пространства, ограниченную с одной стороны поверхностью S' характеристического конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0), а (фигура) с другой — частью S_1 плоскости $y = 0$, частью S_2 плоскости $t = 0$ и, наконец, частью цилиндрической поверхности S_ε радиуса ε, вырезающей ось конуса. Под S' следует понимать ту часть поверхности конуса, которая соответствует изменению переменной θ_1 в промежутке $-1/\sqrt{a} < \theta_1 < 1/\sqrt{a}$. Именно на этой части обращаются в нуль все фундаментальные решения. Учитывая, с другой стороны, что последние соответствуют нулевым массовым силам, получим



$$\iint\limits_{S'_\varepsilon} B_k dS + \iint\limits_{S_{1\varepsilon}} B_k\,dx\,dt + \iint\limits_{S_{2\varepsilon}} B_k\,dx\,dy + \iint\limits_{S_\varepsilon} B_k\,dS =$$
$$= -\iiint\limits_{T_\varepsilon} (u_k°X + v_k°Y)\,dx\,dy\,dt \tag{5.1}$$

где индекс ε означает, что используются пока (до предельного перехода) части указанных поверхностей, зависящие от ε. Выражения для B_k имеют вид

$$\begin{aligned} B_k = &\left(\sigma_{x_k}°\cos(nx) + \tau_{xy_k}°\cos(ny) - \rho\frac{\partial u_k°}{\partial t}\cos(nt)\right)u + \\ &+ \left(\tau_{yx_k}°\cos(nx) + \sigma_{y_k}°\cos(ny) - \rho\frac{\partial v_k°}{\partial t}\cos(nt)\right)v - \\ &- \left(\sigma_x\cos(nx) + \tau_{xy}\cos(ny) - \rho\frac{\partial u}{\partial t}\cos(nt)\right)u_k° - \\ &- \left(\tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y\cos(ny) - \rho\frac{\partial v}{\partial t}\cos(nt)\right)v_k° \end{aligned} \tag{5.2}$$

В формуле (5.1) все интегралы известны, за исключением интеграла по S_ε. Интеграл по S'_ε равен нулю в силу того, что для решений $u_k°$, $v_k°$ выполняются кинематические и динамические условия совместности. Интегралы по $S_{2\varepsilon}$ и $S_{1\varepsilon}$ известны в силу начальных и граничных условий. Покажем, что интеграл по S_ε в пределе при $\varepsilon \to 0$ равен некоторой линейной комбинации производных от искомых функций u, v. На поверхности S_ε имеем

$$\cos(nt) = 0, \qquad \cos(nx) = \frac{x'}{r'}, \qquad \cos(ny) = \frac{y'}{r'}, \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 = \varepsilon^2$$

Полагая $x' = \varepsilon\cos\varphi$, $y' = \varepsilon\sin\varphi$, получим

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} B_k\,dS = \int\limits_0^{t_0-\eta(\varepsilon)} \left\{\int\limits_{L_\varepsilon} [(\sigma_{x_k}°\cos\varphi + \tau_{xy_k}°\sin\varphi)\,u + (\tau_{yx_k}°\cos\varphi + \sigma_{y_k}°\sin\varphi)\,v + \right.$$
$$\left. + (\sigma_x\cos\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi)\,u_k° - (\tau_{yx}\cos\varphi + \sigma_y\sin\varphi)\,v_k°]\,dl\right\}dt \tag{5.3}$$

где $\eta(\varepsilon)$ исчезает вместе с ε, а L_ε — окружность радиуса ε.

Так как искомое решение регулярно, то, например

$$u(x, y, t) = u(x_0 + \varepsilon\cos\varphi,\ y_0 + \varepsilon\sin\varphi,\ t) =$$
$$= u(x_0, y_0, t) + \varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial x_0}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y_0}\sin\varphi\right] + \ldots$$
$$\sigma_x(x, y, t) = \sigma_x(x_0 + \varepsilon\cos\varphi,\ y_0 + \varepsilon\sin\varphi,\ t) =$$
$$= \sigma_x(x_0, y_0, t) + \varepsilon\left[\frac{\partial\sigma_x}{\partial x_0}\cos\varphi + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y_0}\sin\varphi\right] + \ldots$$

и т. д. Невыписанные члены имеют порядок малости ε^2 и выше. Подставляя в (5.3) и учитывая, что $dl = \varepsilon d\varphi$, получим

$$\iint\limits_{S_k} B_k\,dS = \int\limits_0^{t_0-\eta} \varepsilon\Big\{u(x_0, y_0, t)\int\limits_0^{2\pi}(\sigma_{x_k}{}^\circ\cos\varphi + \tau_{xy_k}{}^\circ\sin\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ v(x_0, y_0, t)\int\limits_0^{2\pi}(\tau_{yx_k}{}^\circ\cos\varphi + \sigma_{y_k}{}^\circ\sin\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x_0}\,\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}(\sigma_{x_k}{}^\circ\cos^2\varphi + \tau_{xy}{}^\circ\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial y_0}\,\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}(\sigma_{x_k}{}^\circ\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy_k}{}^\circ\sin^2\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial x_0}\,\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}(\tau_{yx_k}{}^\circ\cos^2\varphi + \sigma_{y_k}{}^\circ\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial y_0}\,\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}(\tau_{yx_k}{}^\circ\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{y_k}{}^\circ\sin^2\varphi)\,d\varphi -$$
$$- \varepsilon\int\limits_0^{2\pi}\left[(\sigma_x{}^\circ\cos\varphi + \tau_{xy}{}^\circ\sin\varphi)\,u_k{}^\circ + (\tau_{xy}\cos\varphi + \sigma_y{}^\circ\sin\varphi)\,v_k{}^\circ\right]d\varphi\Big\}\,dt$$
$$\sigma_x{}^\circ = \sigma_x(x_0, y_0, t), \ldots \tag{5.4}$$

Члены, исчезающие вместе с ε, не выписываются. В последующем понадобятся интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{r_{j\varphi}^2} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{r_{j\varphi}^4} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\sin^3\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = 0$$
$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^4\varphi - M_j^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = \frac{2\pi}{(1+M_j)^2}$$
$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi - M_j^2\sin^4\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = -\frac{2\pi}{(1+M_j)^2} \tag{5.5}$$
$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = \frac{\pi}{M_j(1+M_j)^2}, \quad \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi = 0$$
$$r_{j\varphi}^2 = \cos^2\varphi + M_j^2\sin^2\varphi$$

Нетрудно убедиться в том, что в равенстве (5.4) коэффициенты при $u(x_0, y_0, t)$ и $v(x_0, y_0, t)$ равны нулю для всех фундаментальных решений.

Для первого и второго фундаментальных решений дополнительно равны нулю в силу равенств (5.5) интегралы

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_{x_k}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy_k}{}^\circ \sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} (\tau_{yx_k}{}^\circ \cos^2\varphi + \sigma_{y_k}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi = 0$$
$$(k = 1, 2)$$

Для третьего фундаментального решения, наоборот, обратятся в нуль интегралы

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_{x_3}{}^\circ \cos^2\varphi + \tau_{xy_3}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} (\tau_{yx_3}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{y_3}{}^\circ \sin^2\varphi)\,d\varphi = 0$$

Для первого фундаментального решения проведем вычисления подробнее. Обозначая через $D_{1\varepsilon}$ известные количества, запишем

$$\iint_{S_\varepsilon} B_1\,dS = \int_0^{t_0-\eta(\varepsilon)} \left\{\frac{\partial u}{\partial x_0}\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{x_1}{}^\circ \cos^2\varphi + \tau_{xy_1}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi + \right.$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial y_0}\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\tau_{xy_1}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{y_1}{}^\circ \sin^2\varphi)\,d\varphi -$$
$$- \varepsilon \int_0^{2\pi} [\sigma_x(x_0, y_0, t)\cos\varphi + \tau_{xy}(x_0, y_0, t)\sin\varphi]\, u_1{}^\circ\, d\varphi - \qquad (5.6)$$
$$\left. - \varepsilon \int_0^{2\pi} [\tau_{xy}(x_0, y_0, t)\cos\varphi + \sigma_y(x_0, y_0, t)\sin\varphi]\, v_1{}^\circ\, d\varphi\right\} dt = D_{1\varepsilon} + \eta_1(\varepsilon)$$

На окружности L_ε имеем

$$\sigma_{x_1}{}^\circ = \frac{d}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{2} M_j \Pi_j A_j{}^\circ \frac{\cos^2\varphi - M_j{}^2\sin^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}(t_0 - t)$$
$$\sigma_{y_1} = -\frac{d}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{2} M_j^{-1} \Pi_j A_j{}^\circ \frac{\cos^2\varphi - M_j{}^2\sin^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}(t_0 - t) \qquad (5.7)$$
$$\tau_{xy_1} = \frac{d}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{2} M_j \Pi_j A_j{}^\circ \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r_{j\varphi}^4}(t_0 - t)$$

По закону Гука

$$\sigma_x(x_0, y_0, t) = a\frac{\partial u}{\partial x_0} + (c - d)\frac{\partial v}{\partial y_0}, \qquad \sigma_y(x_0, y_0, t) = (c - d)\frac{\partial u}{\partial x_0} + a\frac{\partial v}{\partial y_0}$$
$$\tau_{xy}(x_0, y_0, t) = d\left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) \qquad (5.8)$$

Укажем значения $u_1{}^\circ$ и $v_1{}^\circ$ на L_ε

$$u_1{}^\circ = -\frac{c}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2} M_j A_j{}^\circ \frac{\cos\varphi}{r_{j\varphi}^2}(t_0 - t), \qquad v_1{}^\circ = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2} M_j B_j{}^\circ \frac{\sin\varphi}{r_{j\varphi}^2}(t_0 - t) \qquad (5.9)$$

Пользуясь равенствами (5.5) и (5.7), получим

$$K_1 = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{x_1}{}^\circ \cos^2\varphi + \tau_{xy_1}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi =$$
$$= d\sum_{j=1}^{2} M_j \Pi_j A_j{}^\circ \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4\varphi - M_j{}^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r_{j\varphi}^4}\,d\varphi\right](t_0 - t) =$$
$$= 2\pi d\sum_{j=1}^{2} \frac{\Pi_j A_j{}^\circ}{1 + M_j}(t_0 - t) \qquad (5.10)$$

Аналогичные выкладки дают

$$K_2 = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\tau_{yx_1}{}^\circ \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{y_1}{}^\circ \sin^2\varphi)\, d\varphi = 2\pi d \sum_{j=1}^{2} \frac{M_j^{-1}\Pi_j A_j{}^\circ}{1+M_j}(t_0 - t) \qquad (5.11)$$

Обратимся к третьему и четвертому слагаемым равенства (5.6). Выделим и подсчитаем коэффициенты при $\partial u / \partial x_0$ и $\partial v / \partial y_0$, содержащихся в этих слагаемых. Получим на основании равенств (5.5)

$$\begin{aligned} K_1' &= 2\pi\gamma d \sum_{j=1}^{2} \frac{M_j\Pi_j}{1+M_j}\left[\frac{a}{a-M_j{}^2 d} + \frac{c-d}{cM_j}\right](t_0 - t) \\ K_2' &= 2\pi\gamma d \sum_{j=1}^{2} \frac{M_j\Pi_j}{1+M_j}\left[\frac{c-d}{a-M_j{}^2 d} + \frac{a}{cM_j}\right](t_0 - t) \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Равенство (5.6) записывается в виде

$$\int_0^{t_0-\eta(\varepsilon)} \left[(K_1 + K_1')\frac{\partial u}{\partial x_0} + (K_2 + K_2')\frac{\partial v}{\partial y_0}\right] dt = D_{1\varepsilon} + \eta_1(\varepsilon) \qquad (5.13)$$

Имеем

$$\begin{aligned} K_1 + K_1' &= 2\pi\frac{\gamma d}{c}\sum_{j=1}^{2}\frac{\Pi_j}{(1+M_j)}\left\{\frac{d\Pi_j}{a-M_j{}^2 d} + \frac{acM_j}{a-M_j{}^2 d} + (c-d)\right\}(t_0 - t) = \\ &= 2\pi\gamma\, da \sum_{j=1}^{2} \frac{\Pi_j}{a - M_j{}^2 d}(t_0 - t) = 2\pi a\,(t_0 - t) \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} K_2 + K_2' &= 2\pi\frac{\gamma d}{c}\sum_{j=1}^{2}\frac{\Pi_j}{1+M_j}\left[\frac{\Pi_j}{(a-M_j{}^2 d)M_j} + \frac{c(c-d)M_j}{d(a-M_j{}^2 d)} + \frac{a}{d}\right](t_0 - t) = \\ &= 2\pi\gamma\frac{ad}{c}\sum_{j=1}^{2}\Pi_j(t_0 - t) = 2\pi(c+d)(t_0 - t) \end{aligned} \qquad (5.15)$$

Равенство (5.13) принимает вид

$$2\pi \int_0^{t_0-\eta(\varepsilon)} \left[a\frac{\partial u}{\partial x_0} + (c+d)\frac{\partial v}{\partial y_0}\right](t_0 - t)\, dt = D_{1\varepsilon} + \eta_1(\varepsilon)$$

где $\eta_1(\varepsilon)$ исчезает вместе с ε. Устремляя ε к нулю, получаем в пределе первое вспомогательное равенство, соответствующее первому фундаментальному решению

$$2\pi \int_0^{t_0} \left[a\frac{\partial u}{\partial x_0} + (c+d)\frac{\partial v}{\partial y_0}\right](t_0 - t)\, dt = D_1 \qquad (5.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_1 = &-\iiint_T (u_1{}^\circ X + v_1{}^\circ Y)\, dx\, dy\, dt - \iint_{S_1} (\tau_{xy} u_1{}^\circ + \sigma_y v_1{}^\circ)\, dx dt + \\ &+ \rho \iint_{S_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} u_1{}^\circ + \frac{\partial u}{\partial t} v_1{}^\circ - \frac{\partial u_1{}^\circ}{\partial t} u - \frac{\partial v_1{}^\circ}{\partial t} v\right) dx\, dy \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Аналогично, применяя формулу Грина — Вольтерра к искомому и остальным фундаментальным решениям, получим второе и третье вспомогательные соотношения

$$2\pi\int_0^{t_0}\left[(c+d)\frac{\partial u}{\partial x_0}+a\frac{\partial v}{\partial y_0}\right](t_0-t)\,dt=D_2$$

$$2\pi\int_0^{t_0}d\left(\frac{\partial u}{\partial y_0}-\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)(t_0-t)\,dt=D_3 \tag{5.18}$$

где D_2 и D_3 получаются из D_1 заменой функций u_1°, v_1° соответственно на u_2°, v_2° и u_3°, v_3°. Для доведения задачи до конца запишем уравнения (1.1) в форме

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left[a\frac{\partial u}{\partial x_0}+(c+d)\frac{\partial v}{\partial y_0}\right]+\frac{\partial}{\partial y_0}\left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y_0}-\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)\right]+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left[(c+d)\frac{\partial u}{\partial x_0}+a\frac{\partial v}{\partial y_0}\right]-\frac{\partial}{\partial x_0}\left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y_0}-\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)\right]+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{5.19}$$

Дифференцируя равенства (5.17) и (5.18) по соответствующим аргументам, складывая и вычитая, при помощи уравнений (5.19) и интегрирования по частям, получим

$$u(x_0,y_0,t_0)=u_0(x_0,y_0)+u_0'(x_0,y_0)\,t_0+\frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}X(x_0,y_0,t)(t_0-t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial D_1}{\partial x_0}+\frac{\partial D_3}{\partial y_0}\right) \tag{5.20}$$
$$v(x_0,y_0,t_0)=v_0(x_0,y_0)+v'_0(x_0,y_0)\,t_0+\frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}Y(x_0,y_0,t)(t_0-t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial D_2}{\partial y_0}-\frac{\partial D_3}{\partial x_0}\right)$$

Эти формулы дают в замкнутой форме решение поставленной задачи; с другой стороны, они обобщают известный результат С. Л. Соболева, относящийся к случаю изотропного тела [2]. Аналогичные результаты могут быть получены и в более общем случае анизотропии, например, в случае четырех упругих постоянных [3].

§ 6. Действие точечных источников. Теперь можно перейти к исследованию вопроса о действии источников колебаний различного вида, в частности, действия на неограниченную анизотропную плоскость мгновенного импульса. Предположим, что до начала воздействия среда покоилась

$$u_0(x,y)=v_0(x,y)=0,\qquad u'_0(x,y)=v'_0(x,y)=0 \tag{6.1}$$

Тогда согласно (5.20) для неограниченной плоскости получим

$$u(x_0,y_0,t)=\frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}X(x_0,y_0,t)(t_0-t)\,dt+\frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial D_1}{\partial x_0}+\frac{\partial D_3}{\partial y_0}\right)$$
$$v(x_0,y_0,t)=\frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}Y(x_0,y_0,t)(t_0-t)\,dt+\frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial D_2}{\partial y_0}-\frac{\partial D_3}{\partial x_0}\right) \tag{6.2}$$

где

$$D_k=-\iiint_T(Xu_k^\circ+Yv_k^\circ)\,dx\,dy\,dt,\qquad u_k^\circ=u_k^{\circ\circ},\qquad v_k^\circ=v_k^{\circ\circ} \tag{6.3}$$

Здесь T — часть пространства xyt, ограниченная большей поверхностью характеристического конуса, построенного в точке (x_0, y_0, t_0), и плоскостью $t = 0$. В силу особенностей u_k°, v_k° при вычислении производных от D_k по x_0 и y_0 нельзя в (6.2) непосредственно вносить знак производной под знак интеграла. Чтобы, однако, подсчитать эти производные, представим D_k в виде

$$D_k = -\iiint\limits_{T-T'_\varepsilon} (Xu_k^\circ + Yv_k^\circ)\, dx\, dy\, dt - \iiint\limits_{T'_\varepsilon} (Xu_k^\circ + Yv_k^\circ)\, dx\, dy\, dt \qquad (6.4)$$

где T'_ε — круглый цилиндр радиуса ε и высоты $t_0 - \eta(\varepsilon)$. Таким образом, в первом интеграле внутренняя граница области интегрирования не зависит от x_0 и y_0. С другой стороны, и внешняя граница этой области в силу свойств фундаментальных решений может быть сделана не зависящей от указанных аргументов. Поэтому при дифференцировании по x_0 и y_0 первого слагаемого в (6.4) можно внести производную под знак интеграла и записать (6.2) в форме

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_0} X(x_0, y_0, t)(t_0 - t)\, d\tau - \frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T-T'_\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial y_0}\right)X + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_3^\circ}{\partial y_0}\right)Y\right]d\tau - \frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_0^{t_0-\eta(\varepsilon)}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Xu_1^\circ\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Xu_3^\circ\, d\sigma + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Yv_1^\circ\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Yv_3^\circ\, d\sigma\right]dt$$

(6.5)

$$v(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_0} Y(x_0, y_0, t)(t_0 - t)\, dt - \frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T-T_\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_0}\right)X + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_0}\right)Y\right]d\tau - \frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_0^{t_0-\eta(\varepsilon)}\left[\frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Xu_2^\circ\, d\sigma - \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Xu_3^\circ\, d\sigma + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Yv_2^\circ\, d\sigma - \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Yv_3^\circ\, d\sigma\right]dt$$

Подсчитаем члены, содержащие интегралы по σ_ε. При малых ε функции u_k°, v_k° можно заменить оценками (4.6), (4.9) и (4.11), что позволяет использовать при вычислениях некоторые результаты теории логарифмического потенциала. Функции

$$x' / r'^2_j, \qquad y_j' / r'^2_j, \qquad y_j' = y_j - y_{j0}, \qquad r'^2_j = x'^2 + y'^2_j \qquad (6.6)$$

суть гармонические на плоскости xy_j, где $y_j = M_j y$. На этой плоскости имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} \rho^\circ(x, y_j) \ln\frac{1}{r'_j}\, dx\, dy_j = \iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} \rho^\circ(x, y_j)\frac{x - x_0}{r'^2_j}\, dx\, dy_j$$
$$\frac{\partial}{\partial y_{j0}}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} \rho^\circ(x, y_j) \ln\frac{1}{r'_j}\, dx\, dy_j = \iint\limits_{\rho_{j\varepsilon}} \rho^\circ(x, y_j)\frac{y_j - y_{j0}}{r'^2_j}\, dx\, dy_j \qquad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} \rho^\circ \ln\frac{1}{r'_j}\, dx\, dy_j + \frac{\partial^2}{\partial y^2_{j0}}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} \rho^\circ \ln\frac{1}{r'_j}\, dx\, dy_j = -2\pi\rho^\circ(x_0, y_{j0}) \qquad (6.8)$$

где $\sigma_{j\varepsilon}$ — область, ограниченная эллипсом $x^2 + y_j^2 / M_j^2 = \varepsilon^2$. Рассмотрим сумму

$$(t_0 - t)\, N_1 = \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} X u_1^\circ dx dy + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} X u_3^\circ dx\, dy \tag{6.9}$$

На основании (4.6) и (4.11) получим

$$N_1 = -c \sum_{j=1}^{2} M_j A_j^\circ \left[\frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} X \frac{x - x_0}{r'^2_j} dx\, dy + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} X \frac{y - y_0}{r'^2_j} dx\, dy\right] =$$

$$= -c \sum_{j=1}^{2} A_j^\circ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} X\left(x, \frac{y_j}{M_j}, t\right) \ln \frac{1}{r'_j} dx\, dy_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y_{j0}^2}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} X\left(x, \frac{y_j}{M_j}, t\right) \ln \frac{1}{r'_j} dx\, dy_j\right] = 2\pi c X (x_0, y_0, t) \sum_{j=1}^{2} A_j^\circ = 2\pi X (x_0, y_0, t) \tag{6.10}$$

Теперь подсчитаем сумму

$$(t_0 - t)\, N_1' = \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Y v_1^\circ\, dx\, dy + \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Y v_3^\circ dx\, dy \tag{6.11}$$

Имеем

$$N_1' = \sum_{j=1}^{2} B_j^\circ \left[M_j \frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Y \frac{y - y_0}{r'^2_j} dx\, dy - M_j^{-1} \frac{\partial}{\partial y_0}\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} Y \frac{x - x_0}{r'^2_j} dx\, dy\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} M_j^{-1} B_j^\circ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_{j0}}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} Y \ln \frac{1}{r'_j} dx\, dy_j - \frac{\partial^2}{\partial y_{j0} \partial x_0}\iint\limits_{\sigma_{j\varepsilon}} Y \ln \frac{1}{r'_j} dx\, dy_j\right] = 0 \tag{6.12}$$

Таким образом, с учетом полученных результатов после предельного перехода найдем

$$u (x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T}\left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial y_0}\right) X + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_3^\circ}{\partial y_0}\right) Y\right] dx\, dy\, dt$$

Аналогично получим

$$v (x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T}\left[\left(\frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0^\circ} - \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_0}\right) X + \left(\frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_0}\right) Y\right] dx\, dy\, dt \tag{6.13}$$

Теперь задача о действии сосредоточенного импульса решается так же, как в случае изотропной среды. Рассмотрим последовательность функций X_n и Y_n, отличных от нуля в некоторой малой области T_n, размеры которой стремятся к нулю с возрастанием n. Потребуем, далее, чтобы при любом n имели место равенства

$$\iiint\limits_{T_n} X_n\, (x, y, t)\, dxdydt = P, \qquad \iiint\limits_{T_n} Y_n\, (x, y, t)\, dx\, dy\, dt = Q \tag{6.14}$$

где P, Q не зависят от n. Соответственно получаем другую последовательность

$$u_n(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T_n}\left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial y}\right)X_n + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_3^\circ}{\partial y_0}\right)Y_n\right]dx\,dy\,dt$$

$$v_n(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{2\pi\rho}\iiint\limits_{T_n}\left(\frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_0}\right)X_n + \left(\frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_0}\right)Y_n\Big]dx\,dy\,dt \tag{6.15}$$

Пользуясь теоремой о среднем и устремляя n к бесконечности, получим в пределе решение задачи

$$u(x_0, y_0, t_0) = -\frac{P}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial y_0}\right) - \frac{Q}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_3^\circ}{\partial y_0}\right)$$

$$v(x_0, y_0, t_0) = -\frac{P}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_0}\right) - \frac{Q}{2\pi\rho}\left(\frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_3^\circ}{\partial x_0}\right) \tag{6.16}$$

где все функции справа берутся при $x = y = t = 0$. Если, например, $Q = 0$, то, пользуясь значениями u_k°, v_k°, найдем

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{P}{2\pi\rho}\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Re}\frac{ic\theta_j\lambda_j}{\delta'_j}(\theta_j\omega_{1_j}^{\circ\circ} - \lambda_j\omega_{3_j}^{\circ\circ})$$

$$v(x_0, y_0, t_0) = -\frac{P}{2\pi\rho}\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Re}\frac{ic\theta_j\lambda_j}{\delta'_j}(\lambda_j\omega_{2_j}^{\circ\circ} + \theta_j\omega_{3_j}^{\circ\circ}) \tag{6.17}$$

где должны быть учтены равенства

$$\delta_j = t_0 - \theta_j x_0 + \lambda_j(\theta_j)y_0 = 0, \qquad \delta'_j = -x_0 + \lambda'_j(\theta_j)y_0$$

Легко непосредственно проверить, что функции (6.17) удовлетворяют уравнениям движения при отсутствии массовых сил. Таким образом, они дают решение задачи о действии на анизотропную плоскость мгновенного импульса, направленного вдоль оси x. Это означает, что формулы (6.16) дают решение задачи о действии на анизотропную плоскость мгновенного импульса с составляющими P и Q, приложенного в начале выбранной системы отсчета.

Легко показать, что неравенство $c < a - d$ несущественно. Однако эти постоянные должны удовлетворять неравенству $c < a + d$. Последнее является условием гиперболичности системы уравнений (1.1). Полагая $c = a - d$, приходим к решению для изотропной среды, найденному С. Л. Соболевым.

Поступила 8 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
2. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.— Л., ОНТИ, 1937.
3. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. Ленингр. ун-та 1949, вып. 17.