Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. М. Матросов

(Казань)

В работе получаются достаточные признаки асимптотической устойчивости и неустойчивости, обобщающие известные критерии А. М. Ляпунова [1] в направлении замены условия знакоопределенности производной функции Ляпунова менее жестким условием знакопостоянства ее (при некоторых требованиях к множеству, где производная обращается в нуль).

Такого типа обобщения были получены для случая установившихся (в смысле [1]) движений Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским [2], а также А. П. Тузовым [3], для периодических движений Н. Н. Красовским [4]. Здесь рассматривается общий случай неустановившихся движений. Легко убедиться на примере [1], что на этот случай не распространяются обобщения названных авторов в форме [2, 3, 4]. В получаемых признаках используется две функции Ляпунова. Как известно, впервые теорема о неустойчивости с двумя функциями предложена Н. Г. Четаевым [5]. Для неравномерной асимптотической устойчивости снимается и требование бесконечно малого высшего предела, что приводит к модификации соответствующих теорем Н. Н. Красовского [6], В. И. Зубова [7], Р. Рейсига [8].

Разбирается приложение к нестационарным гироскопическим системам с диссипацией.

§1. Пусть даны уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

в которых функции X_i в области Γ

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 < H^2, \qquad t \geqslant 0 \qquad (H = \mathrm{const} > 0)$$

определены, непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными $\partial X_i / \partial x_j$, $\partial X_i / \partial t$, так

$$|X_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < X \qquad (X = \mathrm{const} > 0)$$

При этом каждой совокупности вещественных чисел $(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) \in \Gamma$

---

[1] Так

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)\,x \qquad \left(p(t) \geqslant 0, \int_{t_0}^{\infty} p\,dt < \infty\right)$$

Общее решение

$$x = x_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p\,dt\right]$$

показывает, что решение $x = 0$ устойчиво неасимптотически, хотя для $V = {}^1\!/_2\, x^2$ производная $\dot V = -px^2 \leqslant 0$ и в множестве, где $\dot V = 0$, не содержится целиком полутраектории, кроме $x = 0$.

отвечает единственная система непрерывно дифференцируемых по t функций

$$x_i\ (t,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0},\ t_0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

удовлетворяющих в Г системе (1.1) и начальным условиям

$$x_i\ (t_0,\ x_{10},\ \ldots x_{n0},\ ,\ t_0) = x_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Пусть также

$$X_i\ (0,\ \ldots,\ 0,\ t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

т. е. система (1.1) допускает невозмущенное движение

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0 \tag{1.2}$$

Совокупность n вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ называется точкой x в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Расстоянием от точки x до точки x° (соответственно множества $M \subset E^n$) в E^n называется число

$$\rho\ (x,\ x^\circ) = \sqrt{(x_1 - x_1^\circ)^2 + \ldots + (x_n - x_n^\circ)^2}$$
$$(\rho\ (x, M) = \inf\ [\rho\ (x,\ x^\circ),\ x^\circ \in M])$$

Нормой вектора x является $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Совокупность функций

$$x\ (t,\ x_0,\ t_0) = \{x_1\ (t,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0},\ t_0),\ \ldots,\ x_n\ (t,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0},\ t_0)\}$$

определяет в области (H)

$$\| x \| < \mathrm{H}$$

пространства E^n возмущенное движение.

Будем рассматривать функции Ляпунова $V\ (x,\ t)$, $W\ (x,\ t)$, определенные (вещественные, однозначные) и непрерывные в Г вместе со своими производными $\dot V\ (x,\ t)$, $\dot W\ (x,\ t)$ по времени t, взятыми в силу системы (1.1), причем $V\ (0,\ t) \equiv 0$, $\dot V\ (0, t) \equiv 0$ (см. [1]), а также функции $V^*\ (x)$, $V'\ (x)$, определенные и непрерывные в (H).

Множество точек $x \in (H)$, для которых $V^*\ (x) = 0$, обозначим $E\ (V^* = 0)$.

Определение 1.1. Определенно $\dot W\ (x,\ t) \neq 0$ в множестве $E\ (V^* = 0)$, если для любых чисел α и A $(0 < \alpha < A < H)$ найдутся числа $r_1\ (\alpha,\ A)$, $\xi\ (\alpha,\ A)$ $(0 < r_1 < d_1,\ \xi > 0)$ такие, что $|\dot W\ (x,\ t)| > \xi$ при $\alpha < \| x \| < A$, $\rho\ (x, E\ (V^* = 0)) < r_1,\ t \geqslant 0$.

Теорема 1.1. Пусть существуют функции $V\ (x,\ t)$, $W\ (x,\ t)$, обладающие в Г следующими свойствами.

1°. Функция $V\ (x,\ t)$ определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел.

2°. Производная $\dot V\ (x,\ t) \leqslant V^*\ (x) \leqslant 0$.

3°. Функция $W\ (x,\ t)$ ограничена.

4°. Определенно $\dot W\ (x,\ t) \neq 0$ в множестве $E\ (V^* = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0, t_0.

Доказательство. Предположим условия теоремы выполненными. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости движения, уточненной К. П. Персидским для случая равномерной устойчивости, невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) устойчиво равномерно по t_0 и для любого числа A $(0 < A < H)$ найдется число $\lambda(A)$ $(0 < \lambda < A)$ такое, что для любых

$$t_0 \geqslant 0, \quad \|x_0\| \leqslant \lambda \tag{1.3}$$

при всех $t > t_0$ будет $\|x(t, x_0, t_0)\| < A$, причем

$$V(x_0, t_0) \leqslant \sup [V(x_0, t_0), t_0 \geqslant 0, \|x_0\| \leqslant \lambda] < \inf [V(x, t), t \geqslant 0, \|x\| = A] = V_A$$

Остается доказать, что сколь угодно малому числу μ $(0 < \mu < \lambda)$ соответствует положительное число $T(A, \mu)$ такое, что при условиях (1.3) для всех $t \geqslant t_0 + T$ будет $\|x(t, x_0, t_0)\| < \mu$. Учитывая монотонность функции $V(x(t, x_0, t_0), t)$, достаточно установить существование числа $T^*(A, \mu)$ такого, что во всяком возмущенном движении с начальными условиями (1.3) в момент $t^* = t_0 + T^*$ будет

$$V(x(t^*, x_0, t_0), t^*) < \inf [V(x, t), t \geqslant 0, \|x\| \geqslant \mu, \|x\| < A] = V_\mu$$

Так как $V(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, то по V_μ найдется, число α (μ, A) $(0 < \alpha < \mu)$ такое, что при $t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant \alpha$ будет $V(x, t) < V_\mu$. Поэтому, чтобы установить существование T^*, достаточно найти положительное число $T'(\alpha, A)$ такое, что каково бы ни было возмущенное движение с начальными условиями (1.3) в некоторый момент времени t' $(t_0 \leqslant t' \leqslant t_0 + T')$, в нем будет $\|x(t', x_0, t_0)\| \leqslant \alpha$.

Рассмотрим какое-либо возмущенное движение $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ с начальными условиями (1.3) и установим несколько его свойств:

(а) Если $\rho(x(t), x(\tau)) \geqslant r > 0$ $(t > \tau)$, то

$$t - \tau \geqslant \frac{r}{X\sqrt{n}}$$

По формулам конечных приращений

$$|x_i(t) - x_i(\tau)| = \left|\frac{dx_i}{dt}\right|(t - \tau) \leqslant X(t - \tau)$$

поэтому при $r \leqslant \sqrt{[x_1(t) - x_1(\tau)]^2 + \ldots + [x_n(t) - x_n(\tau)]^2}$ действительно

$$r \leqslant X\sqrt{n}(t - \tau)$$

В силу п. 3° существует положительное число

$$L = \sup (|W(x, t)|, t \geqslant 0, \|x\| < A)$$

Согласно п. 4° найдутся положительные числа $r_1(\alpha, A)$, $\xi(\alpha, A)$ такие, что в множестве $U \subset (H)$, где $\alpha < \|x\| < A$, $\rho(x, E(V^* = 0)) < r_1$, при любом $t \geqslant 0$ будет

$$|\dot{W}(x, t)| > \xi.$$

(б) Возмущенное движение $x(t)$ не может постоянно оставаться в множестве U в течение отрезка времени, равного $2L/\xi$.

Предположим $x(\tau) \in U$. Для $x(t)$ $(t > \tau)$

$$W(t) - W(\tau) = \int_\tau^t \dot{W}\, dt$$

и пока движение $x(t)$ находится в U, производная $\dot{W}(t)$ не меняет знака, поэтому

$$|W(t)| + |W(\tau)| \geqslant \int_\tau^t |\dot{W}|\, dt > \xi(t - \tau)$$

Но это неравенство может осуществляться совместно с $|W| \leqslant L$ лишь при

$$t < \tau + 2L/\xi$$

Итак, существует число τ^* $(\tau < \tau^* \leqslant \tau + 2L/\xi)$ такое, что при $t = \tau^*$ движение находится на границе замыкания $[U]$ множества U.

(в) Если в момент τ

$$\alpha < \|x(\tau)\| < A, \quad \rho(x(\tau), \quad E(V^* = 0)) < r_1 / 2$$

и при всех $\tau \leqslant t \leqslant \tau + 2L/\xi$ будет $\|x(t)\| > \alpha$, то в момент τ^* $(\tau < \tau^* \leqslant \tau + 2L/\xi)$, когда

$$\alpha < \|x(\tau^*)\| < A, \qquad \rho(x(\tau^*), \qquad E(V^* = 0)) = r_1$$

будет

$$V(\tau^*) \leqslant V(\tau) - a(\alpha, A) \qquad a = \frac{\varepsilon r_1}{2X\sqrt{n}} > 0$$

$$\varepsilon = \inf [\,|V^*(x)|\,, \alpha < \|x\| < A, \rho(x, E(V^* = 0)) \geqslant r_1 / 2] > 0$$

Действительно, при названных условиях найдется момент τ_* $(\tau < \tau_* < \tau^*)$ такой, что

$$\alpha < \|x(\tau_*)\| < A, \qquad \rho(x(\tau_*), \quad E(V^* = 0)) = r_1 / 2$$

а при всех $\tau_* \leqslant t \leqslant \tau^*$ будет

$$\alpha < \|x(t)\| < A, \qquad r_1 / 2 \leqslant \rho(x(t), \qquad E(V^* = 0)) \leqslant r_1$$

Следовательно, согласно п. 2°

$$\dot{V}(t) \leqslant V^*(x(t)) \leqslant -\varepsilon$$

Но, как нетрудно заметить, $\rho(x(\tau^*), x(\tau_*)) \geqslant r_1 / 2$, откуда с учетом (а) и (б)

$$\frac{2L}{\xi} \geqslant \tau^* - \tau_* \geqslant \frac{r_1}{2X\sqrt{n}}$$

В силу этого

$$V(\tau^*) - V(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_*} \dot{V}\,dt + \int_{\tau_*}^{\tau^*} \dot{V}\,dt \leqslant \int_{\tau_*}^{\tau^*} \dot{V}(t)\,dt \leqslant -\varepsilon(\tau^* - \tau_*) \leqslant -\frac{\varepsilon r_1}{2X\sqrt{n}}$$

Рассмотрим последовательность моментов времени

$$t_k = t_0 + k2L/\xi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(г) Если движение $x(t)$ на отрезке времени $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+2}$ постоянно находится в области $\alpha < \|x(t)\| < A$, то

$$V(t_{k+2}) \leqslant V(t_k) - a$$

В самом деле, если при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ постоянно

$$\alpha < \|x(t)\| < A, \qquad \rho(x(t), \quad E(V^* = 0)) \geqslant r_1 / 2$$

то

$$V(t_{k+2}) - V(t_k) \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{V}(t)\,dt \leqslant -\frac{2L\varepsilon}{\xi} \leqslant -a$$

Если же имеется $t_k \leqslant \tau \leqslant t_{k+1}$ такое, что

$$\alpha < \|x(\tau)\| < A, \quad \rho(x(\tau), \quad E(V^* = 0)) < r_1 / 2$$

то согласно (б) найдется такое значение τ^* $(\tau < \tau^* \leqslant t_{k+2})$, при котором

$$\rho(x(\tau^*) \quad E(V^*(x) = 0)) = r_1$$

и согласно (в)

$$V(\tau^*) \leqslant V(\tau) - a \leqslant V(t_k) - a$$

и поэтому также

$$V(t_{k+2}) \leqslant V(\tau^*) \leqslant V(t_k) - a$$

Выберем произвольное целое число $k' \geqslant V_A / a > 0$ и примем $T' = t_{2k'}(\alpha, A)$. Если предположить, что при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T'$ будет $\alpha < \|x(t)\| < A$, то согласно (г)

$$V(t_{2k'}) \leqslant V(x_0, t_0) - k'a < V_A - k'a \leqslant 0$$

что несовместно с условием п. 1°. Итак, найдется t' $(t_0 \leqslant t' \leqslant t_0 + T')$ такое, что $\|x(t')\| \leqslant \alpha$, а это и доказывает теорему.

Множество точек $x \in (H)$, для которых $\dot{V}(x, t) = 0$ при данном $t \in [0, \infty)$, обозначим $E_t(\dot{V} = 0)$.

Определение 1.2. Определенно $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множествах $E_t(\dot{V} = 0)$, если для любых чисел α и A $(0 < \alpha < A < H)$ найдутся положительные числа $l(\alpha, A)$, $\xi(\alpha, A)$ такие, что будет

$$|\dot{W}(x, t)| > \xi \text{ при } \alpha < \|x\| < A, \ |\dot{V}(x\ t)| < l, \ t \geqslant$$

Теорема 1.2. Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t)$, обладающие в Г следующими свойствами .

1°. Функция $V(x, t)$ определенно положительна.

2°. Производная $\dot{V}(x, t) \leqslant 0$, а частные производные $\partial V/\partial x_s$, $\partial V/\partial t$, $\partial^2 V / \partial x_s \partial x_i$, $\partial^2 V / \partial x_s \partial t$, $\partial^2 V / \partial t^2$ непрерывны и ограничены.

3°. Функция $W(x, t)$ ограничена.

4°. Определенно $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множествах $E_t(\dot{V} = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0, t_0.

Примечание. Теорема 1.1, а при $X_i(x, t)$ непрерывных в (H) равномерно по $t \in [0, \infty)$ и теорема 1.2 допускают обращение.

Действительно, если невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0, t_0, то, как показано И. Г. Малкиным [9], в некоторой окрестности невозмущенного движения (H_0) $[(H_0)] \subset (H)$ $t \in (0, \infty)$ существует определенно положительная функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой в силу (1.1) определенно отрицательна. Если при этом функции $X_i(x, t)$ непрерывны в (H) равномерно по $t \in (0, \infty)$, то, как показано Н. Н. Красовским [4], упомянутая функция $V(x, t)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем переменным, причем эти производные равномерно ограничены в области (H_0) при $t \in (0, \infty)$. Взяв, например, $W(x, t) = V(x, t)$, получаем две функции, удовлетворяющие при $x \in (H_0)$, $t \in (0, \infty)$ условиям теорем (1.1) и (1.2). Так как рассматривается асимптотическая устойчивость в смысле Ляпунова [1, 9, 10] (локальная), то получившееся сужение области существования функций по сравнению с Г несущественно.

Определение 1.3. Строго $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V^* = 0)$, если для любых чисел α и A $(0 < \alpha < A < H)$ найдется число $r_1(\alpha, A)$ $(0 < r_1 < \alpha)$ и непрерывная функция $\xi_\alpha(t)$ такие, что при любом $t \geqslant 0$

$$\xi_\alpha(t) > 0, \ \int_t^\infty \xi_\alpha(\tau)\, d\tau = \infty \tag{1.4}$$

и в множестве, где $\alpha < \|x\| < A$, $\rho(x, E(V^* = 0)) < r_1$, $t \geqslant 0$, будет

$$|\dot{W}(x, t)| \geqslant \xi_\alpha(t)$$

Теорема 1.3. Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t)$, обладающие в Г следующими свойствами,

1°. Функция $V(x, t)$ определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел.

2°. Производная $\dot{V}(x, t) \leqslant 0$ и в каждой области $t \geqslant 0$, $\alpha < \| x \| < H$, будет $\dot{V}(x, t) \leqslant \varphi_\alpha(t) V^*(x)$, где $V^*(x) \leqslant 0$, а $\varphi_\alpha(t)$ — непрерывная неотрицательная функция t такая, что для любой бесконечной системы S замкнутых непересекающихся отрезков полуоси $[0, \infty)$ одинаковой фиксированной положительной длины каждый

$$\int_S \varphi_\alpha(t)\, dt = \infty$$

3°. Функция $W(x, t)$ ограничена.

4°. Строго $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V^* = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0.

Определение 1.4. Строго $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множествах $E_t(\dot{V} = 0)$, если для любых чисел α и A $(0 < \alpha < A < H)$ найдутся положительное число $l(\alpha, A)$ и непрерывная функция $\xi_\alpha(t)$ такие, что при любом $t \geqslant 0$

$$\xi_\alpha(t) > 0, \quad \int_t^\infty \xi_\alpha(\tau)\, d\tau = \infty$$

и в множестве, где $\alpha < \| x \| < A$, $|\dot{V}(x, t)| < l$, $t \geqslant 0$, будет

$$|\dot{W}(x, t)| \geqslant \xi_\alpha(t)$$

Теорема 1.4. Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t)$, обладающие в Γ следующими свойствами.

1°. Функция $V(x, t)$ определенно положительна.

2°. Производная $\dot{V}(x, t) \leqslant 0$, а частные производные $\partial V / \partial x_s$, $\partial V / \partial t$, $\partial^2 V / \partial x_s \partial x_i$, $\partial^2 V / \partial x_s \partial t$, $\partial^2 V / \partial t^2$ непрерывны и ограничены.

3°. Функция $W(x, t)$ ограничена.

4°. Строго $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множествах $E_t(\dot{V} = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0.

Определение 1.5. Функция $W(x, t)$ допускает высший предел, бесконечно малый в множестве $E(V^* = 0)$, если она ограничена, $W(x, t) = 0$ при $x \in E(V^* = 0)$, $t \geqslant 0$ и для сколь угодно малых чисел l, α, A $(l > 0;\ 0 < \alpha < A < H)$ найдется положительное число r' такое, что при $\alpha < \| x \| < A$, $\rho(x, E(V^* = 0)) < r'$, $t \geqslant 0$ будет $|W(x, t)| < l$.

Теорема 1.5. Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t)$, обладающие в Γ следующими свойствами.

1°. Функция $V(x, t)$ определенно положительна.

2°. Производная $\dot{V}(x, t) \leqslant 0$ и в каждой области $t \geqslant 0$, $\alpha < \| x \| < H$ будет $\dot{V}(x, t) \leqslant \varphi_\alpha(t) V^*(x)$, где $V^*(x) \leqslant 0$, а $\varphi_\alpha(t)$ — непрерывная неотрицательная функция t такая, что для любой бесконечной системы S замкнутых непересекающихся отрезков полуоси $[0, \infty)$ одинаковой фиксированной положительной длины каждый

$$\int_S \varphi_\alpha(t)\,dt = \infty$$

3°. Функция $W(x, t)$ допускает высший предел, бесконечно малый в множестве $E(V^* = 0)$.

4°. Определенно $\dot W(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V^* = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательства теорем 1.2—1.5 являются соответствующими модификациями доказательства теоремы 1.1.

Полученные предложения можно распространить на случай асимптотической устойчивости «в большом», если аналогично [4] в условия теорем включить оценку области притяжения невозмущенного движения.

§ 2. *Теорема 2.1.* Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t)$, обладающие в Г следующими свойствами.

1°. Функция $V(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел и при любом $t \geqslant 0$ можно указать точки x, лежащие в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения и такие, что в них $V(x, t) > 0$.

2°. Производная $\dot V(x, t) \geqslant 0$ и в каждой области $t \geqslant 0$, $\alpha < \| x \| < A < H$ будет $\dot V(x, t) \geqslant \varphi_\alpha(t) V'(x)$, где $V'(x) \geqslant 0$, а $\varphi_\alpha(t)$ — непрерывная неотрицательная функция t такая, что для любой бесконечной системы S замкнутых непересекающихся отрезков полуоси $[0, \infty)$ одинаковой фиксированной положительной длины каждый

$$\int_S \varphi_\alpha(t)\,dt = \infty$$

3°. Функция $W(x, t)$ ограничена.

4°. Строго $\dot W(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V' = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены, а невозмущенное движение устойчиво, т. е. по A и t_0 найдется $\lambda > 0$ такое, что во всяком возмущенном движении с начальными условиями (1.3) для $t \geqslant t_0$ будет

$$\| x(t, x_0, t_0) \| < A < H$$

При условиях (1.3) согласно п. 1 найдутся x_0^*, t_0 такие, что

$$V(x_0^*, t_0) > 0$$

Рассмотрим возмущенное движение $x(t) = x(t, x_0^*, t_0)$ и его свойства.

(а) Если $\rho(x(t), x(\tau)) \geqslant r$ при $t > \tau$, то $t - \tau \geqslant r / X \sqrt{n}$.

(б) Для всех $t > t_0$ будет $\alpha < \| x(t) \| < A$, где α — некоторое положительное число.

Действительно согласно нашему предположению $\| x(t) \| < A$, но при этом $\dot V \geqslant 0$, т. е. $V(t) \geqslant V(x_0^*, t_0) > 0$. Так как $V(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, то для числа $V(x_0^*, t_0) > 0$ найдется число $\alpha > 0$ такое, что при всех $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant \alpha$ будет $V(x, t) < V(x_0^*, t_0)$, следовательно, не может быть $\| x(t) \| \leqslant \alpha$.

Согласно п. 4° найдется число $r_1(\alpha, A)$ $(0 < r_1 < \alpha)$ и непрерывная функция $\xi_\alpha(t)$, удовлетворяющая условиям (1.4) такие, что при $\rho(x(t), E(V' = 0)) < r_1$ будет

$$| \dot W(t) | \geqslant \xi_\alpha(t).$$

(в) Если $\rho(x(\tau), E(V'=0)) < r_1$, то найдется $\tau^* > \tau$ такое, что

$$\rho(x(\tau^*), E(V'=0)) = r_1$$

При $\rho(x(\tau), E(V'=0)) < r_1$ для $x(t)\ (t > \tau)$

$$W(t) - W(\tau) = \int_\tau^t \dot W\, dt$$

и пока $\rho(x(t), E(V'=0)) < r_1$ производная $\dot W(t)$ не меняет знака, поэтому

$$|W(t)| + |W(\tau)| \geqslant \int_\tau^t |\dot W|\, dt \geqslant \int_\tau^t \xi_\alpha(t)\, dt$$

Но в силу (1.4) и ограниченности $W(x, t)$ это не может быть при всех $t > t_0$.

(г) Если $\rho(x(\tau), E(V'=0)) < r_1/2$, то при $t = \tau^*$, когда $\rho(x(\tau^*), E(V'=0)) = r_1$,

$$V(\tau^*) \geqslant V(\tau) + \varepsilon' \int_{\tau^{**}}^{\tau^*} \varphi_\alpha(t)\, dt \qquad \left(\tau \leqslant \tau^{**} = \tau^* - \frac{r_1}{2X\sqrt{n}}\right)$$

$$\varepsilon' = \inf\, [V'(x),\ \alpha < \|x\| < A,\ \rho(x, E(V'=0)) \geqslant r_1/2] > 0$$

В самом деле при названном условии найдется $\tau < \tau_* < \tau^*$ такое, что

$$\rho(x(\tau_*), E(V'=0)) = r_1/2$$

а при $\tau_* \leqslant t \leqslant \tau^*$ будет

$$r_1/2 \leqslant \rho(x(t), E(V'=0)) \leqslant r_1$$

т. е. согласно п. 2°

$$\dot V(t) \geqslant \varphi_\alpha(t) V'(x(t)) \geqslant \varepsilon' \varphi_\alpha(t)$$

Поэтому

$$V(\tau^*) - V(\tau) \geqslant \varepsilon' \int_{\tau_*}^{\tau^*} \varphi_\alpha(t)\, dt$$

Но, как легко заметить, $\rho(x(\tau^*), x(\tau_*)) \geqslant r_1/2$, откуда согласно (а)

$$\tau^* - \tau \geqslant \tau^* - \tau_* \geqslant \frac{r_1}{2X\sqrt{n}}$$

(д) Не существует числа $\tau^\circ \geqslant t_0$ такого, чтобы при любом $t > \tau^\circ$ было

$$\rho(x(t), E(V'=0)) \geqslant r_1/2$$

Действительно, если бы такое τ° существовало, то при всех $t > \tau^\circ$ было бы

$$V(t) = V(\tau^\circ) + \int_{\tau^\circ}^t \dot V\, dt \geqslant V(\tau^\circ) + \varepsilon' \int_{\tau^\circ}^t \varphi_\alpha(t)\, dt$$

и согласно п. 2° имеем $V(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, что несовместимо с условием ограниченности $V(t)$, вытекающим из п. 1° и (б).

Согласно (д) для любого τ_i^* найдется $\tau_{i+1} > \tau_i^*$ такое, что

$$\rho(x(\tau_{i+1}), E(V'=0)) < r_1/2$$

Согласно (в) ему соответствует $\tau_{i+1}^* > \tau_{i+1}$ такое, что

$$\rho(x(\tau_{i+1}^*), E(V'=0)) = r_1$$

Рассмотрим бесконечную последовательность чисел

$$t_0 < \tau_1 < \tau_1^* < \ldots < \tau_i < \tau_i^* < \ldots$$

Согласно п. 2° и (г)

$$V(\tau_i^*) \geqslant V(t_0) + \varepsilon' \sum_{j=1}^{i} \int_{\tau_j^{**}}^{\tau_j^*} \varphi_\alpha(t)\, dt \qquad \left(\tau_j \leqslant \tau_j^{**} = \tau_j^* - \frac{r_1}{2X\sqrt{n}}\right)$$

Бесконечная система отрезков $[\tau_i^{**}, \tau_i^{*}]$ удовлетворяет условию п. 2° для системы S, поэтому последняя сумма безгранично возрастает вместе с i, т. е. $V(\tau_i^*) \to \infty$ при $i \to \infty$. Но это несовместно с условием ограниченности функции V. Противоречие показывает, что предположение об устойчивости неверно, что и доказывает теорему.

Теорема 2.2. Пусть существуют функции $V(x, t)$, $W(x, t,)$ обладающие в Г следующими свойствами:

1°. Функция $V(x, t)$ такова, что при любом $t \geqslant 0$ можно указать точки x, лежащие в сколь угодно малой окрестности невозмущенного движения, в которых $V(x, t) > 0$.

2°. Производная $\dot{V}(x, t) \geqslant 0$, а частные производные $\partial V / \partial x_i$, $\partial V / \partial t$, $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j$, $\partial^2 V / \partial x_i \partial t$, $\partial^2 V / \partial t^2$ непрерывны и ограничены.

3°. Функция $W(x, t)$ ограничена.

4°. Строго $\dot{W}(x, t) \neq 0$ в множествах $E_t(\dot{V} = 0)$.

Тогда невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство является модификацией предыдущего.

Невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) называется абсолютно неустойчивым, если по любым A, x_0, t_0, удовлетворяющим условиям $0 < A < H$, $0 < \|x_0\| < A$, $t_0 \geqslant 0$, найдется положительное число T такое, что $\|x(t_0 + T, x_0, t_0)\| = A$. Нетрудно доказать следующее обобщение критерия Г. Н. Дубошина [10]. Если выполнены условия теорем 2.1 или 2.2 и $V(x, t) > 0$ при всех $t \geqslant 0$, $0 < \|x\| < H$, то невозмущенное движение (1.2) системы (1.1) абсолютно неустойчиво.

§ 3. **Рассмотрим некоторые приложения. А.** Симметричное тяжелое твердое тело с одной закрепленной точкой при наличии сил сопротивления среды.

При обычных обозначениях уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)qr = Pz_0\gamma_2 - \partial R / \partial p, && \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3\\
&A\dot{q} + (A - C)pr = -Pz_0\gamma_1 - \partial R / \partial q, && \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1\\
&C\dot{r} = M_z(t, r), && \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2
\end{aligned}$$

Здесь R — однородная определенно положительная функция p, q степени $m \geqslant 2$, коэффициенты которой непрерывные и ограниченные функции t. Момент M_z относительно оси симметрии z пусть состоит из момента сил сопротивления, зависящего от r, t и момента двигателя, заданного как функция t.

Третье уравнение определяет r как функцию времени $r(t, r_0, t_0)$, которую предположим непрерывной и ограниченной. Уравнения движения допускают решение

$$p = 0,\ q = 0,\ r = r(t, r_0, t_0),\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1 \tag{3.1}$$

описывающее неравномерное вращение тела вокруг вертикальной оси симметрии.

Функции

$$V = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) - \frac{1}{2}Pz_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^4),\quad W = A(p\gamma_2 - q\gamma_1) \qquad (\gamma^2 = 1 - \gamma_3 \geqslant 0)$$

имеют в силу уравнений возмущенного движения (с учетом тригонометрического соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$) производные по времени

$$\dot{V} = -mR \leqslant 0,$$

$$\dot{W} = \frac{1}{2}Pz_0[\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2(2 - \gamma^2)] - \gamma_1\left(Cpr - \frac{\partial R}{\partial q}\right) - \gamma_2\left(Cqr + \frac{\partial R}{\partial p}\right) + A\gamma_3(p^2 + q^2)$$

Множество $E(\dot V = 0)$ соответствует $p = 0,\ q = 0$. В нем

$$\dot W = \frac{1}{2} P z_0 [\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2 (2 - \gamma^2)]$$

Если $z_0 \neq 0$, то

$$|\dot W| > \frac{1}{2} P |z_0| \alpha^2 \text{ при } p = 0,\ q = 0,\ 0 < \alpha^2 < \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2 < A^2 < H^2$$

Поэтому в силу непрерывности $\dot W$ и ограниченности коэффициентов найдется $r_1 > 0$ такое, что

$$|\dot W| > \frac{1}{4} P |z_0| \alpha^2 \text{ при } t \geqslant 0,\ \alpha^2 < \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2 < A^2,\ p^2 + q^2 < r_1^2$$

т. е. определенно $\dot W \neq 0$ в множестве $E(\dot V = 0)$.

Если $z_0 < 0$ (центр тяжести ниже точки опоры), то выполнены условия теоремы 1.1, на основании которой заключаем об асимптотической устойчивости (равномерной по $p_0,\ q_0,\ \gamma_{10},\ \gamma_{20},\ \gamma_0,\ t_0$) невозмущенного движения (3.1).

Если же $z_0 > 0$, то удовлетворяются условия теоремы 2.1 и невозмущенное движение (3.1) неустойчиво.

Б. Нестационарная механическая система при действии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot q_j + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Здесь $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $\dot q = (\dot q_1, \ldots, \dot q_n)$ — совокупности обобщенных координат и скоростей; T — определенно положительная квадратичная форма скоростей, $g_{ij}(q, t) = -g_{ji}(q, t)$ — гироскопические коэффициенты; R — функция рассеяния, определенно положительная квадратичная форма $\dot q$ (диссипация полная), $U(q)$ — силовая функция, которую предположим голоморфной функцией q

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot q_i \dot q_j, \qquad R = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\dot q_i \dot q_j \qquad \begin{pmatrix} a_{ij}(q) = a_{ji}(q) \\ b_{ij}(q, t) = b_{ji}(q, t) \end{pmatrix}$$

$$R \geqslant \frac{1}{2}\beta \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2 \qquad (\beta > 0),\ U(q) = \sum_{k=m}^{\infty} U_k \ (m \geqslant 2)$$

где $U_k(q)$ — однородная функция степени k.

При этом g_{ij}, b_{ij} предполагаются голоморфными функциями q с непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Система (3.2) допускает решение

$$q_1 = 0, \ldots, q_n = 0,\ \dot q_1 = 0, \ldots, \dot q_n = 0 \tag{3.3}$$

Взяв $V = T - U$, имеем в силу (3.2)

$$\dot V = -2R \leqslant -\beta(\dot q_1^2 + \ldots + \dot q_n^2) \leqslant 0$$

Примем

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} q_i$$

В силу (3.2)

$$\dot W = 2T + \sum_{i,\,j=1}^{n} g_{ij} q_i \dot q_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right)$$

Множество $E(\beta(\dot{q}_1^2+\ldots+\dot{q}_n^2)=0)$ определяется так:

$$\dot{q}_1=0,\ldots,\dot{q}_n=0,\ q_1^2+\ldots+q_n^2<H^2$$

В нем

$$\dot{W}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}\,q_i=\sum_{k=m}^{\infty}kU_k$$

Если эта функция знакоопределенна, то по любым α и $A\,(0<\alpha<A<H)$ найдется число $\xi>0$ такое, что

$$|\dot{W}|>2\xi>0 \text{ при } \dot{q}_1=0,\ \dot{q}_2=0,\ldots,\dot{q}_n=0,\ \alpha^2<\sum_{i=1}^{n}q_i^2<A^2$$

Но в силу непрерывности $\dot{W}$ и ограниченности коэффициентов для ξ найдется $r_1>0$ такое, что будет $|\dot{W}|>\xi>0$ при

$$\alpha^2<\sum_{i=1}^{n}(q_i^2+\dot{q}_i^2)<A^2,\ \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2<r_1^2,\ t\geqslant 0$$

т. е. определенно $\dot{W}\neq 0$ в множестве $E(\beta(\dot{q}_1^2+\ldots+\dot{q}_n^2(=0))$

Если функции

$$U(q),\ \sum_{k=m}^{\infty}kU_k(q)$$

определенно отрицательны, то удовлетворяются условия теоремы 1.1, на основании которой невозмущенное движение (3.3) асимптотически устойчиво равномерно по переменным q_0, $\dot{q}_0$, t_0.

Если же $U(q)$ может принимать положительные значения при сколь угодно малых $|q_1|,\ldots,|q_n|$, а функция

$$\sum_{k=m}^{\infty}kU_k(q)$$

знакоопределенна, то удовлетворяются условия теоремы 2.1 и по этой теореме невозмущенное движение (3.3) неустойчиво.

Автор благодарен П. А. Кузьмину за полезное обсуждение работы.

Поступила 21 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, АН СССР, 1956.
2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952, т. 36, № 3.
3. Тузов А. П. Вопросы устойчивости для одной системы регулирования. Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
5. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, Математика, 1938, кн. 9, т. 98, вып. 3.
6. Красовский Н. Н. К теории второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. ДАН СССР, 1956, т. 109, № 3.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, 1959.
8. Рейсиг Р. Критерий асимптотической устойчивости. Изд-во иностр. лит-ры, Сб. пер., Механика, 1961, 3 (67).
9. Малкин И. Г. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
10. Дубошин Г. Н. Основы теории устойчивости движения. Изд-во Московск. ун-та, 1952.