Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. В. Вандакуров

(Ленинград)

Задача устойчивости удерживаемого магнитным полем цилиндрического плазменного шнура в приближении идеальной проводимости плазмы рассматривалась в работах [1-7] и ряде других работ. Изучались как конфигурации с поверхностными токами [1-2], так и некоторые случаи распределенных токов (на модели несжимаемого цилиндра) [2-5]. Критерий устойчивости относительно возмущений локального типа был получен Сайдемом [6] на основании энергетического принципа. Как показано в работе [5], выполнение этого критерия еще не обеспечивает устойчивости относительно всех типов возмущений. Локальные возмущения изучались также Розенблютом [7] и др.

Более сложной является задача устойчивости с учетом конечной проводимости среды. Сравнительно просто может быть изучен случай плохо проводящего цилиндра. Для цилиндра с однородной проводимостью расчеты проводились в работах [8-10].

В настоящей работе на модели полого несжимаемого цилиндра изучается устойчивость плазменного шнура в форме трубы, находящегося в вакууме или несжимаемой среде. Предполагается, что в равновесном состоянии в проводящем слое имеются обе (азимутальная и осевая) компоненты магнитного поля. Исследование устойчивости производится на основе линеаризированных уравнений магнитной гидродинамики методом нормальных колебаний. Рассматриваются предельные случаи бесконечно большой и плохой проводимости полого цилиндра. В первом случае дисперсионное уравнение выражается в квадратурах для длинноволновых возмущений, приводящих к винтовому искривлению цилиндра, при условии, что продольное магнитное поле близко к однородному. В частности, для сплошного проводящего цилиндра критерий устойчивости оказывается не зависящим от распределения продольного тока. В случае плохой проводимости собственные колебания отсутствуют, если плотность объемного тока распределена непрерывно. Они возникают только при наличии разрывов в распределении проводимости.

В § 1 излагается постановка задачи для случая произвольной величины проводимости среды. Параграфы 2—3 посвящены изучению устойчивости в приближении идеальной проводимости жидкости. Устойчивость плохо проводящего цилиндра рассматривается в § 4.

§ 1. Постановка задачи. Обозначим внутренний и внешний радиусы (фигура) проводящего слоя *O* через r_1 и r_2. Считаем, что внутри трубы имеется идеальный проводник *3* радиуса $\alpha_1 r_1$, по которому протекает ток, с внешней стороны рассматриваемая область ограничена идеально проводящим цилиндром *4* радиуса $\alpha_2 r_2$ (слои *1* и *2* — непроводники).

Пусть в равновесном состоянии скорость $\mathbf{v} = 0$, а распределение магнитного поля имеет вид

$$\frac{\mathbf{H}}{H_0} = \begin{cases} \mathbf{i}_\varphi \dfrac{r_1^2 g_1}{r_0 r} + \mathbf{i}_z h_1 & (\alpha_1 r_1 \leqslant r \leqslant r_1) \\ \mathbf{i}_\varphi \dfrac{r}{r_0} g(r) + \mathbf{i}_z h(r) & (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \\ \mathbf{i}_\varphi \dfrac{r_2^2 g_2}{r_0 r} + \mathbf{i}_z h_2 & (r_2 \leqslant r \leqslant \alpha_2 r_2) \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$g = \frac{r_0 H_\varphi}{r H_0}, \qquad h = \frac{H_z}{H_0}, \qquad g_j = g(r_j), \qquad h_j = h(r_j), \qquad H_0 = (H_\varphi)_{r=r_0}$$

Здесь $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z$ — орты цилиндрической системы координат; g и h — произвольные функции r (для среды конечной проводимости в области $r_1 < r < r_2$ функции $g, h, g' = dg / dr, h' = dh / dr$ нужно принять непрерывными); r_0 — некоторый промежуточный радиус (в дальнейшем обычно принимаем $r_0 = r_2$). В области $r_1 < r < r_2$ проводимость и плотность среды равны σ и ρ ($\rho = \mathrm{const}$), а давление

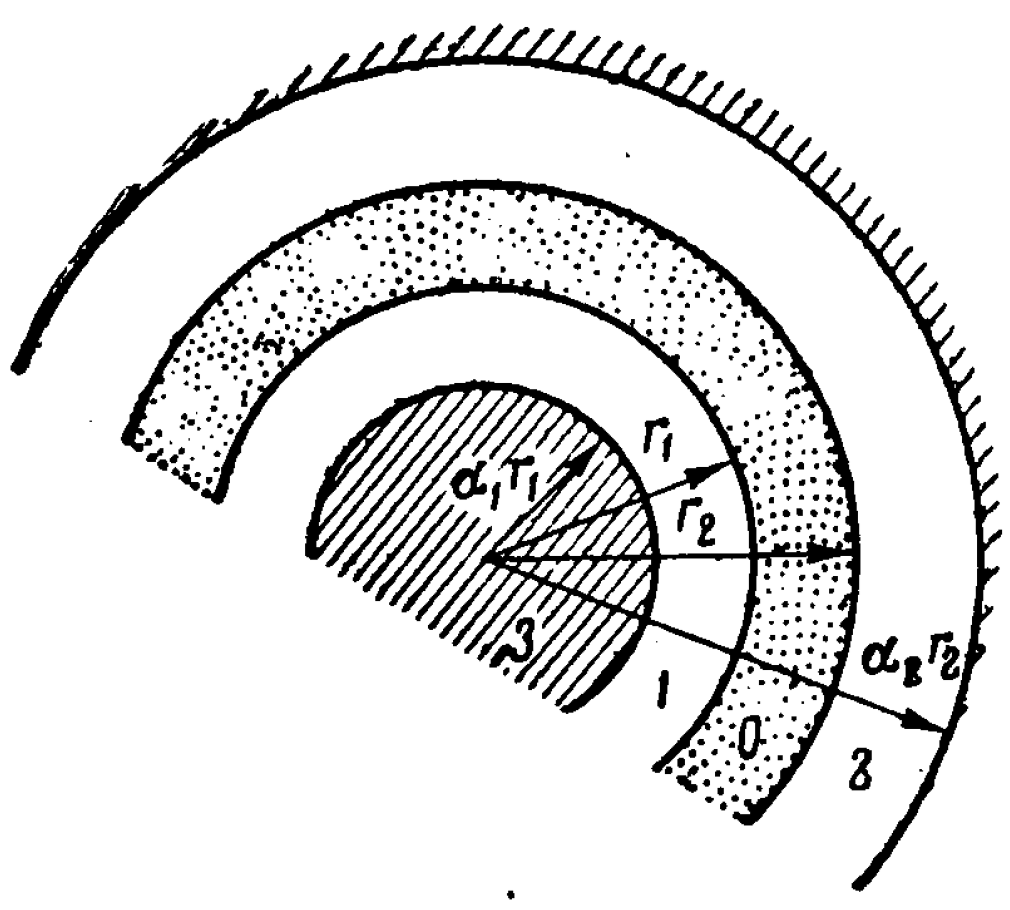
$$p(r) = p_1 + \frac{H_0^2}{8\pi}\left\{\frac{r_1^2 g_1^2 - r^2 g^2}{r_0^2} + h_1^2 - h^2 - \frac{2}{r_0^2}\int_{r_1}^{r} r g^2\, dr\right\} \tag{1.2}$$

Плотность и давление вне проводящего слоя пусть будут $\chi_j \rho$ и p_j, где $j = 1$, если $r < r_1$, и $j = 2$, если $r > r_2$, при этом χ_j, $p_j = \mathrm{const}$.

Проводимость $\sigma(r)$ связана с распределением поля $\mathbf{H}(r)$ соотношением

$$\frac{4\pi\sigma}{cH_0}\mathbf{E} = -\mathbf{i}_\varphi \frac{dh}{dr} + \mathbf{i}_z \frac{1}{r_0 r}\frac{dr^2 g}{dr} \qquad \left(\mathbf{E} = \mathbf{i}_\varphi \frac{r_0 E_{\varphi 0}}{r} + \mathbf{i}_z E_{z0},\ E_{\varphi 0}, E_{z0} = \mathrm{const}\right) \tag{1.3}$$

При исследовании устойчивости медленно движущегося цилиндра, или в случае медленного изменения магнитного поля в равенстве (1.3) электрическое поле $\mathbf{E}$ может быть более сложной функцией r.



Пусть на заданное равновесное распределение наложено малое возмущение, так что полные величины будут: $\mathbf{H} + \mathbf{H}^*$, $p + p^*$, $\mathbf{v}^*$, где звездочкой отмечены возмущения, зависящие от времени и координат φ, z, как $\exp[i(\omega t + kz + m\varphi)]$.

Будем считать $m \geqslant 0$, что может быть достигнуто выбором направления оси z. При этом знак постоянной H_0 будет зависеть от изучаемого типа колебаний. Ввиду того что существен лишь знак произведения kh, можно еще выбрать $k \geqslant 0$, тогда вместо возмущений с отрицательными k нужно рассмотреть устойчивость для распределения с измененным знаком перед h.

Полагая $\mathbf{v}^* = i\omega\boldsymbol{\xi}$ из исходной линеаризированной системы уравнений магнитной гидродинамики

$$-4\pi\rho\omega^2\boldsymbol{\xi} = -\nabla(4\pi p^* + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*) + (\mathbf{H}^*\cdot\nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}^* \tag{1.4}$$

$$\mathbf{H}^* = \mathrm{rot}(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}) - \frac{c^2}{4\pi i\omega}\,\mathrm{rot}\,\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^*, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H}^* = 0$$

получим

$$\frac{\Omega^2 H_0}{r_0}\boldsymbol{\xi} = -\nabla Q + is\mathbf{H}^* - 2\mathbf{i}_r g H_\varphi^* + [\mathbf{i}_\varphi(rg' + 2g) + \mathbf{i}_z r_0 h']\, H_r^* \tag{1.5}$$

$$\mathbf{H}^* = \frac{isH_0}{r_0}\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{i}_\varphi r g' + \mathbf{i}_z r_0 h')\frac{H_0 \xi_r}{r_0} + \frac{r_0^2}{\Omega q^2}\left\{\nabla^2\mathbf{H}^* + \frac{\sigma'}{\sigma}\,\mathbf{i}_r \times \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^*\right\} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{1.7}$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по r,

$$Q = \frac{r_0}{H_0} (4\pi p^* + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*), \qquad \operatorname{div} \mathbf{H}^* = 0$$

$$\Omega = \frac{i\omega r_0 \sqrt{4\pi\rho}}{|H_0|}, \qquad q^2 = \frac{r_0\sigma |H_0|}{c^2} \sqrt{\frac{4\pi}{\rho}}, \qquad s = mg + kr_0h$$

Для определения граничных условий рассмотрим область вне проводящего слоя. Здесь возмущение магнитного поля

$$\mathbf{H}^{*(j)} = \nabla\psi^{(j)} \qquad \left(\nabla^2\psi^{(j)} = 0, \ \left(\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial r}\right)_{r=\alpha_j r_j} = 0\right) \qquad (j = 1,2)$$

Отсюда следует:

$$(\mathbf{i}_\varphi \nabla\psi^{(j)})_{r=r_j} = \frac{m}{kr_j} (\mathbf{i}_z \nabla\psi^{(j)})_{r=r_j} = \frac{i}{T_j} \left(\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial r}\right)_{r=r_j}$$

Здесь

$$T_j = \frac{r_j}{m} \left(\frac{d \ln \psi^{(j)}}{dr}\right)_{r=r_j} = \frac{kr_j \left[I_m'(kr_j) K_m'(k\alpha_j r_j) - K_m'(kr_j) I_m'(k\alpha_j r_j)\right]}{m \left[I_m(kr_j) K_m'(k\alpha_j r_j) - K_m(kr_j) I_m'(k\alpha_j r_j)\right]}$$

$$I_m'(z) = \frac{dI_m(z)}{dz} \qquad \left\{T_j \approx \frac{1-\alpha_j^2}{1+\alpha_j^2}\right\}$$

В фигурных скобках указано выражение для T_j при малых kr_j, $k\alpha_j r_j$, а также при α_2, близких к бесконечности.

Из уравнения

$$\chi_j \rho\omega^2 \xi^{(j)} = \nabla p^{*(j)}$$

найдем

$$(p^{*(j)})_{r=r_j} = \frac{\omega^2\rho_0\chi_j r_j}{mT_j} (\xi_r)_{r=r_j}$$

На границе $r = r_j$ должны быть непрерывными поле и давление

$$\mathbf{H}(r_j) + \left(\xi_r \frac{d\mathbf{H}}{dr} + \mathbf{H}^*\right)_{r=r_j}, \qquad p(r_j) + \left(\xi_r \frac{dp}{dr} + p^*\right)_{r=r_j}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial r}\right)_{r=r_j} = (H_r^*)_{r=r_j} = H_{rj}^*$$

Три другие условия дают

$$mQ_j + \frac{r_j}{T_j} \left(\Omega^2\chi_j \frac{H_0\xi_{rj}}{r_0} - is_j H_{rj}^*\right) = 0 \tag{1.8}$$

$$H_{\varphi j}^* - \frac{i}{T_j} H_{rj}^* + (r_j g_j' + 2g_j) \frac{H_0\xi_{rj}}{r_0} = 0 \tag{1.9}$$

$$H_{zj}^* + h_j' H_0 \xi_{rj} - \frac{ikr_j}{mT_j} H_{rj}^* = 0 \tag{1.10}$$

$$\left(g_j' = \left(\frac{dg}{dr}\right)_{r=r_j}, \ \xi_{rj} = (\xi_r)_{r=r_j} \text{ и т. д.}\right)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению корней Ω определителя системы (1.8) — (1.10), в которую подставлены соответствующие решения уравнений (1.5) — (1.7). Для неустойчивых колебаний действительная часть Ω положительна ($\operatorname{Re} \Omega > 0$).

§ 2. Приближение идеальной проводимости. При $q = \infty$, т. е. в приближении идеальной проводимости среды, из (1.5) — (1.6) нетрудно получить

$$-\frac{H_0}{r_0} x\xi = \mathbf{i}_r\left(Q' + \frac{m\beta}{r} Q\right) + \mathbf{i}_\varphi i\left[\beta Q' + \frac{m(1-\delta^2)}{r} Q\right] + \mathbf{i}_z ik\,(1-\beta^2-\delta^2)Q \tag{2.1}$$

Здесь

$$\beta = \frac{2sg}{s^2+\Omega^2}, \qquad \delta^2 = \frac{2rgg'}{s^2+\Omega^2}, \qquad x = (1-\beta^2-\delta^2)(s^2+\Omega^2)$$

Подстановка (2.1) в уравнение (1.7) приводит к уравнению, полученному в работе [4]

$$Q'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{x'}{x}\right)Q' - \left\{k^2(1-\beta^2-\delta^2) + \frac{m\beta x'}{rx} - \frac{m\beta'}{r} + \frac{m^2(1-\delta^2)}{r^2}\right\} Q = 0 \tag{2.2}$$

При помощи подстановок

$$-\frac{r_0 Q}{H_0\xi_r} = \frac{xQ}{Q' + \dfrac{m\beta}{r} Q} = \frac{x\Psi}{\Psi'} = \Phi = \frac{r^2(s^2+\Omega^2)}{m^2+k^2r^2}\,\frac{\Lambda'}{\Lambda} \tag{2.3}$$

уравнение (2.2) можно свести к следующим:

$$\Psi'' + \left(\frac{1-2m\beta}{r} - \frac{x'}{x}\right)\Psi' - \frac{x(m^2+k^2r^2)}{r^2(s^2+\Omega^2)}\Psi = 0 \tag{2.4}$$

$$\Phi' + \frac{m^2+k^2r^2}{r^2(s^2+\Omega^2)}\Phi^2 - \frac{1-2m\beta}{r}\Phi - x = 0 \tag{2.5}$$

$$\Lambda'' + \left[\frac{2ss'}{s^2+\Omega^2} + \frac{2m\beta}{r} + \frac{m^2-k^2r^2}{r(m^2+k^2r^2)}\right]\Lambda' - \frac{x(m^2+k^2r^2)}{r^2(s^2+\Omega^2)}\Lambda = 0 \tag{2.6}$$

Граничные условия вытекают из условий непрерывности полного давления (гидродинамического плюс магнитного) на поверхностях $r = r_j$.

Если на границах поле $\mathbf{H}(r)$ не имеет разрывов, то остается в силе формула (1.8), или

$$mQ_j + \frac{r_j}{T_j}(\Omega^2\chi_j + s_j^2)\frac{H_0\xi_{rj}}{r_0} = 0 \tag{2.7}$$

Для исследования устойчивости цилиндра с поверхностными токами рассмотрим такое распределение, когда в тонком слое у границы $g(r)$ и $h(r)$ меняются резко, так что $g' \gg g / r$ и т. д.

В предположении, что $s^2 + \Omega^2$ не близко к нулю, уравнение (2.5) легко интегрируется. Очевидно, что $\Phi(r)$ не может быть настолько быстро меняющейся функцией r, что второй член в левой части (2.5) будет существенным, поэтому в области токового слоя

$$\Phi + rg^2 = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

Интегрируя еще r-ю компоненту (2.1) и учитывая (2.8), найдем

$$\xi_r = \mathrm{const} \tag{2.9}$$

Полученные равенства, конечно, согласуются с результатами обычного метода исследования устойчивости шнура с поверхностными токами [1-2], при котором уравнения магнитной гидродинамики в области токового слоя не решаются, скачок же касательных компонент стационарного поля учитывается в граничных условиях. В особом изучении нуждается случай наличия нулей функции $s^2 + \Omega^2$ (см. работу [7]). Например, остается неясным вопрос, почему равенства (2.8), (2.9) не могут быть аналитически продолжены в область любых значений $s^2 + \Omega^2$.

Равенства (2.8), (2.9) остаются справедливыми также для сжимаемой среды, когда вместо (1.7) используются уравнения непрерывности и изэнтропичности движения.

§ 3. Приближение идеальной проводимости. Длинноволновые возмущения. Рассмотрим возмущения $m \neq 0$, длина волны которых велика по сравнению с радиусом r_2, так что $k^2 r_2^2 \ll 1$. Из формулы (2.1) вытекает, что ξ_z порядка $kr_0\xi_r$, поэтому с точностью до величин k^2r^2 будет[1]

$$\xi_\varphi = \frac{i}{m}\frac{\partial r\xi_r}{\partial r}$$

Система (1.5), (1.6) для переменной $R = rH_0\xi_r / r_0$ позволяет получить (при $q = \infty$)

$$r^2(s^2 + \Omega^2)R'' + r(s^2 + \Omega^2 + 2rss')R' -$$
$$- m^2\left[s^2 + \Omega^2 - 2rgg' + \frac{2r}{m}(sg' + gs')\right]R = 0 \qquad (3.1)$$

При этом

$$Q = -\frac{r(s^2 + \Omega^2)}{m^2}R' + \frac{2sg}{m}R, \quad H_r{}^* = \frac{is}{r}R, \quad H_\varphi{}^* = -\frac{s}{m}R' - g'R \qquad (3.2)$$

Два примера, для которых решение (3.1) может быть представлено в известных функциях, были исследованы в работе [5]. Здесь рассматривается устойчивость конфигурации с приблизительно однородным продольным магнитным полем, причем ограничимся изучением наиболее опасных возмущений, приводящих к винтовому искривлению цилиндра.

Именно примем, что $m = 1$, а $H_z{}'$ по порядку меньше kH_0. Считаем еще, что распределение поля $\mathbf{H}(r)$ в стационарном состоянии является непрерывным. Учитывая, что $s' \approx g'$, из (3.1) получим

$$R = r\left\{C_1 + C_2\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r^3(s^2 + \Omega^2)}\right\}, \qquad C_n = \text{const} \qquad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в (2.7) приводит к дисперсионному уравнению

$$r_1r_2S_1S_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3(s^2 + \Omega^2)} + \frac{r_1}{r_2}S_1 - \frac{r_2}{r_1}S_2 = 0 \qquad (3.4)$$

$$S_j = s_j{}^2 + \Omega^2 - 2s_jg_j - (s_j{}^2 + \Omega^2\chi_j)\frac{1 + \alpha_j{}^2}{1 - \alpha_j{}^2}$$

Для сплошного цилиндра $r_1 = 0$ и $S_1 = 0$. Значит, полагая $r_0 = r_2$, будем иметь $g_2 = 1$, $s_2 = 1 + kr_0h$

$$\Omega^2\left(1 + \chi_2\frac{\alpha_2{}^2 + 1}{\alpha_2{}^2 - 1}\right) = 2s_2\left(1 - \frac{\alpha_2{}^2 s_2}{\alpha_2{}^2 - 1}\right) \qquad (3.5)$$

Частота колебаний не зависит от распределения полей H_φ и H_z по сечению цилиндра, существенна лишь величина продольного магнитного

[1] Здесь не изучается случай, когда в рассматриваемом интервале имеются точки, где $s^2 + \Omega^2 = 0$. Вблизи такой точки могут быть существенными различные малые члены, отброшенные в исходных уравнениях магнитной гидродинамики.

поля (если последнее достаточно велико, так что kr_0h порядка единицы). Значениям $\Omega^2 > 0$ соответствует полоса неустойчивости

$$0 < 1 + kr_0h < 1 - \frac{1}{\alpha_2^2}$$

Для случая $g(r) \equiv 1$, $h = \text{const}$, $\chi_2 = 0$ этот результат может быть получен из формул работы [3].

Для сплошного цилиндра однородной плотности, внутренняя часть которого $0 < r < r_1$ является непроводящей, при отсутствии внутреннего проводника будет

$$\chi_1 = 1, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad g_1 = 0$$

Так как $S_1 = 0$, то дисперсионное уравнение (3.4) вновь сводится к формуле (3.5).

Рассмотрим еще устойчивость окруженного вакуумом трубчатого цилиндра в случае однородного по сечению продольного тока, когда (при $r_0 = r_2$) будет

$$\chi_1 = \chi_2 = 0, \quad g = 1, \quad s = 1 + kr_0h \approx \text{const}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \infty$$

Условия равновесия будут удовлетворяться, если $8\pi p \leqslant H_z^2$, а $H_z(r)$ будет медленно убывающей функцией r. Из уравнения (3.4) получим

$$\Omega^2 = -\frac{2s}{r_2^2 - r_1^2}\{sr_2^2 \pm \sqrt{(r_2^2 - r_1^2)^2 + r_1^2r_2^2s^2}\} \tag{3.6}$$

Одно из решений неустойчиво в полосе

$$-\frac{1}{r_2}\sqrt{r_2^2 - r_1^2} < 1 + kr_0h < 0$$

а другое — в полосе

$$0 < 1 + kr_0h < \frac{1}{r_2}\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

В соответствии с увеличением числа границ получим две полосы неустойчивости.

§ 4. Приближение плохой проводимости. В случае плохой проводимости среды, когда $q \leqslant 1$, вместо уравнения (1.6) будет

$$\nabla^2\mathbf{H}^* + \frac{\sigma'}{\sigma}\,\mathbf{i}_r \times \text{rot}\,\mathbf{H}^* = 0 \tag{4.2}$$

Для компонент $\mathbf{H}^*$ получим систему

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) imH_r^* + \frac{2m^2}{r^2}H_\varphi^* = 0$$

$$\left(\frac{2}{r^2} + \frac{\sigma'}{r\sigma}\right) imH_r^* = -\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)H_\varphi^* + \frac{\sigma'}{r\sigma}\frac{\partial rH_\varphi^*}{\partial r} \tag{4.2}$$

$$krH_z^* = i\,\frac{\partial rH_r^*}{\partial r} - mH_\varphi^* \tag{4.3}$$

Рассмотрим устойчивость относительно длинноволновых возмущений ($k^2r^2 \leqslant 1$). Пусть еще $m \neq 0$ и h' порядка k.

Из системы (4.2) найдем

$$rH_r^* = -i(D_1r^m - D_2r^{-m}), \qquad rH_\varphi^* = D_1r^m + D_2r^{-m}$$

$$D_n = \text{const} \tag{4.4}$$

Далее получим

$$\nabla^2 Q = \frac{2g'}{r} \left[(m-1) D_1 r^m - (m+1) D_2 r^{-m}\right]$$

$$Q = 2(m-1) D_1 r^{-m} \int_{r_1}^{r} g r^{2m-1} dr - 2(m+1) D_2 r^m \int_{r_1}^{r} g r^{-2m-1} dr + $$

$$+ D_3 r^m + D_4 r^{-m} \tag{4.5}$$

$$\frac{\Omega^2 H_0 r \xi_r}{r_0} = 2m(m-1) D_1 r^{-m} \int_{r_1}^{r} g r^{2m-1} dr + D_1 (s - 2mg) r^m + \tag{4.6}$$

$$+ 2m(m+1) D_2 r^m \int_{r_1}^{r} g r^{-2m-1} dr - D_2 (s - 2mg) r^{-m} - m D_3 r^m + m D_4 r^{-m}$$

Подстановка решений в условия (1.8), (1.9) приводит к системе, равенство нулю определителя которой дает дисперсионное уравнение. Условия (1.10) служит при этом для определения произвольных постоянных D_5 и D_6, появляющихся в следующем приближении по малому параметру $k^2 r^2$ в выражении для H_z^*. (Если бы H_z^* было порядка H_r^* / kr_0, то дисперсионное уравнение вытекало бы из граничных условий (1.10). Оно, однако, не имеет решений.)

Выпишем дисперсионное уравнение для случая сплошного шнура однородной плотности, во внутренней части которого ($r < r_1$) поле $H_\varphi =$ и $\sigma = 0$. Тогда $\chi_1 = 1$, $T_1 = 1$, $g_1 = 0$. При $\chi_2 = 0$, $T_2 = -1$ будем иметь

$$2\Omega^4 - \{r_1 g_1' \left[s_1 + \frac{r_1^{2m}}{r_2^{2m}} (d_m + s_2)\right] - 2(r_2 g_2' + 2g_2)(d_{-m} + s_2 - mg_2)\} \Omega^2 -$$

$$- r_1 g_1' (r_2 g_2' + 2g_2) \{s_1 (d_{-m} + s_2 - mg_2) + \frac{r_1^{2m}}{r_2^{2m}} [(mg_2 -$$

$$- s_2)(d_{-m} + s_2 + s_1) + (d_m + s_2)(d_{-m} + s_2 - mg_2)]\} = 0 \tag{4.7}$$

где

$$d_n = 2n(n+1) r_2^{2n} \int_{r}^{r_2} g r^{-2n-1} dr, \qquad n = \pm m$$

При отсутствии скачка плотности тока на внутренней границе $g_1' = 0$ и вместо (4.7) получим

$$\Omega^2 = -(r_2 g_2' + 2g_2) \{kr_0 h_2 + 2m(m-1) r_2^{-2m} \int_{r_1}^{r_2} g r^{2m-1} dr\} \tag{4.8}$$

Отсюда видно, насколько важным является предположение о непрерывности первых производных от функций $H_\varphi(r)$ и $H_z(r)$. При наличии разрывов в распределении плотности тока появляются дополнительные собственные колебания, которые могут быть неустойчивыми.

Вопрос об отсутствии собственных колебаний для цилиндра с всюду непрерывными g, h, g' и h' может быть рассмотрен в более общем виде.

Так как из соотношений (1.9), (1.10) члены с ξ_r выпадают, то дисперсионным уравнением будет равенство нулю определителя системы (1.9), (1.10), в которую подставлены решения уравнений (4.2), (4.3). Из физических соображений очевидно, что решением будет $\mathbf{H}^* = 0$. Иначе из условия (1.8) можно было бы при произвольной частоте колебаний определить оставшиеся две неизвестные постоянные, появляющиеся при решении уравнения для Q, и существовали бы колебания любой заданной частоты. При $E(r_j) \neq 0$ ввиду $\sigma(r_j) = 0$ из (4.1) вытекают дополнительные условия

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r H_\varphi^*}{\partial r} - \frac{im}{r} H_r^*\right)_{r=r_j} = 0, \quad \left(\frac{\partial H_z^*}{\partial r} - ikH_r^*\right)_{r=r_j} = 0$$

Решение будет $\mathbf{H}^* = 0$.

При $\mathbf{H}^* = 0$ из уравнения (1.5) с учетом (1.8) получим $Q = 0$, $\xi_r = 0$. В этом случае собственные колебания жидкого цилиндра не имеют места.

Равновесную конфигурацию с разрывом в распределении плотности тока можно получить предельным переходом от непрерывного распределения. Тогда собственные колебания будут отсутствовать при любом распределении плотности тока, что противоречит полученным выше выводам. Следует, однако, заметить, что при достаточно большой величине градиента поля магнитогидродинамические уравнения становятся непригодными, поэтому указанный предельный переход является незаконным. При наличии сил поверхностного натяжения более реальной является, по-видимому, конфигурация со скачком проводимости на границе.

Поступила 7 VII 62

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. Атомная энергия, 1956, № 5, стр. 38.
2. Tayler R. J. The Influence of an Axial Magnetic Field on the Stability of a Constricted Gac Disclarge. Proc. Phys. Soc., 1957, B. 70, p. — 1049. (Русск. пер. Сб. Управляемые термоядерные реакции, Атомиздат, 1960, стр. 74.)
3. Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. АН СССР, 1958, т. IV, стр. 61.
4. Вандакуров Ю. В. и Лурье К. А. Об устойчивости цилиндрического плазменного проводника с объемными токами. ЖТФ, 1959, т. 29, стр. 1170.
5. Вандакуров Ю. В. К вопросу об устойчивости плазменного цилиндра в случае неоднородного распределения тока по сечению. ДАН СССР, 1962, т. 143, стр. 1078.
6. Suydam B. R. Proceedings of the Second United Nations Conference on the Placeful Uses of Atomic Energy (United Nations, Geneva, 1958), vol. 31, p. 157. (Русск. пер. Сб. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции, Атомиздат, 1959, стр. 89.)
7. Rosenbluth M. N. Теория самосжатого разряда, устойчивость и нагрев. Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Сб. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции, Атомиздат, 1959, стр. 55.
8. Tayler R. J. Stability of twisted magnetic fields in a fluid of finite electrical conductivity. Rev. Mod. Phys., 1960, 32, 907.
9. Бреус С. Н. Об устойчивости жидкого цилиндра с током при конечной проводимости. ЖТФ, 1960, т. 30, стр. 1030.
10. Murty G. S. Instability of a conducting fluid cylinder in the presence of an axial current, a longitudinal magnetic field and a coaxial conducting cylinder, Arkiv för Fysik, 1961, 19, 483.