

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ,
 ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО ПРИ ДВИЖЕНИИ
 В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Карымов
 (Ленинград)

Одним из факторов, влияющих на движение какого-либо объекта в околосолнечном космическом пространстве, является сила давления солнечного излучения. За последние годы опубликован ряд работ [1-5], в которых рассматриваются системы, использующие эффект давления солнечного излучения либо для создания силы, перемещающей центр масс спутника (солнечный парус), либо для создания моментов, регулирующих угловое положение спутника (солнечный руль). В этих работах обычно предполагается, что световое давление воздействует на плоскости, входящие в систему двигательной установки или систему регулирования углового положения космического летательного аппарата. Ниже на основе более общего описания делается попытка получить интегральные характеристики для оценки силового воздействия светового потока на корпус летательного аппарата.

Если в пустоте в определенном направлении распространяется световой поток и энергия, приходящаяся на единицу объема, равна w , то количество движения, соответствующее единице объема, равно K

$$K = \frac{w}{c} \quad (1)$$

где c — скорость света в пустоте. Вектор количества движения K направлен в сторону распространения света. При взаимодействии света с каким-либо телом происходит изменение вектора количества движения, в результате чего на тело действует импульс силы $f \Delta t$, связанный с изменением количества движения ΔK обычным соотношением

$$f \Delta t = \Delta K \quad (2)$$

где Δt — время, в течение которого происходит изменение вектора количества движения на величину ΔK .

Рассмотрим взаимодействие света с элементарной площадкой ΔS (фиг. 1). При этом будем предполагать, что угол падения светового потока равен углу отражения, падающий и отраженный световые потоки, а также перпендикуляр к площадке лежат в одной плоскости и величина энергии в единице объема отраженного потока составляет часть энергии, заключенной в единице объема падающего светового потока. Обозначим через ϑ — угол падения светового потока, K_1 и K_2 — векторы количества движения падающего и отраженного световых потоков соответственно. Величины векторов $|K_2|$ и $|K_1|$ связаны соотношением

$$|K_2| = \epsilon |K_1| \quad (3)$$

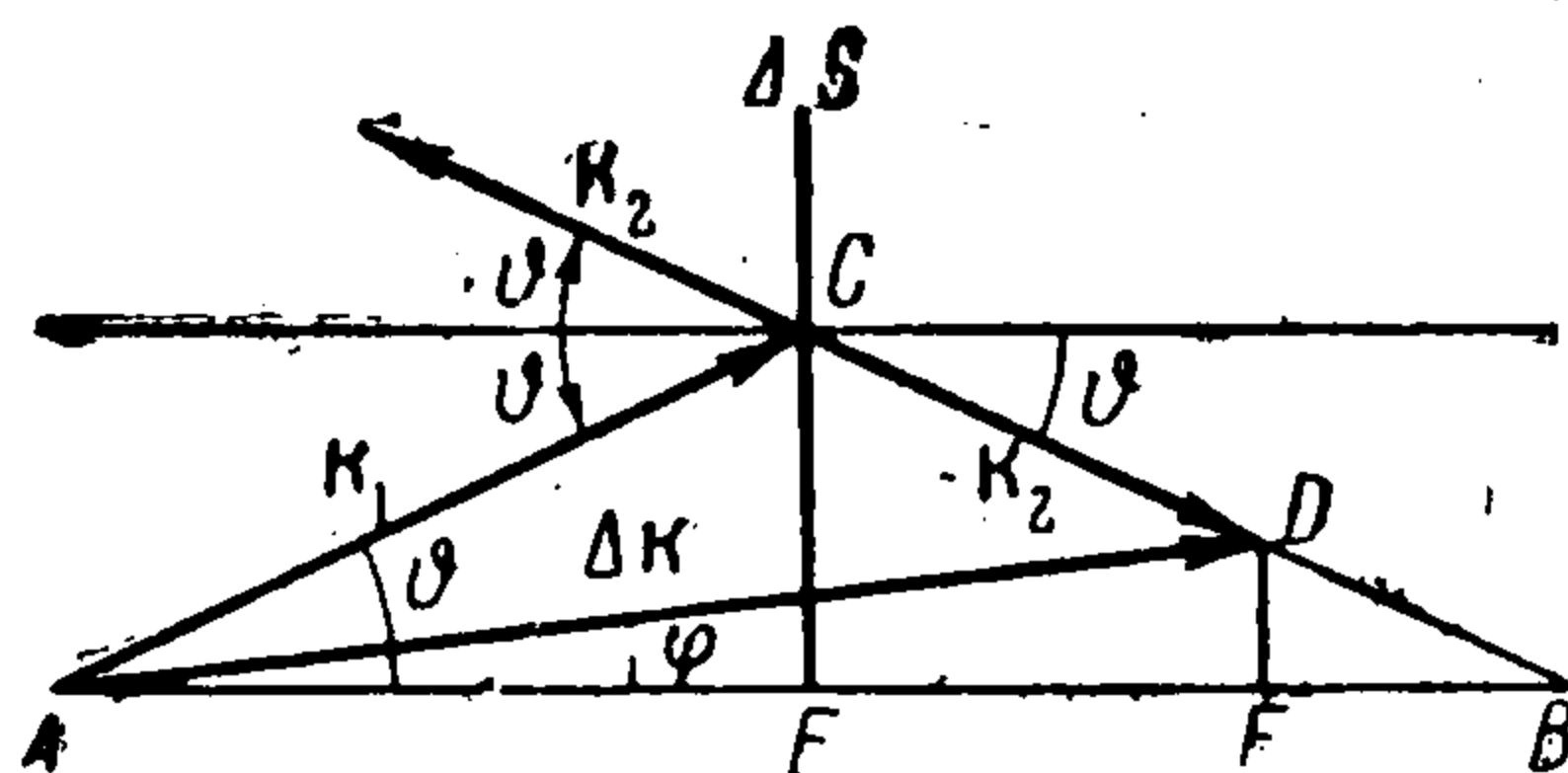


Рис. 1

где ε — коэффициент отражения, т. е. отношение плотности энергии отраженного светового потока к плотности энергии падающего светового потока. При полном отражении $\varepsilon = 1$, при полном поглощении $\varepsilon = 0$.

При сделанных предположениях из треугольника ACD имеем

$$|\Delta K|^2 = |K_1|^2 + |K_2|^2 - 2|K_1||K_2|\cos(180^\circ - 2\vartheta)$$

или с учетом (3)

$$|\Delta K| = |K_1| \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2\vartheta} \quad (4)$$

Далее, из треугольников ACE и ADF получим

$$CE = |K_1| \sin \vartheta, \quad DF = |\Delta K| \sin \varphi$$

Здесь φ — угол между вектором ΔK , а следовательно, и силой f и перпендикуляром к площадке.

Так как треугольники DBF и BCE подобны, то

$$\frac{DF}{CE} = \frac{DB}{CB} = \frac{|K_1| - |K_2|}{|K_1|} = 1 - \varepsilon$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{(1 - \varepsilon) |K_1| \sin \vartheta}{|\Delta K|} = \frac{(1 - \varepsilon) \sin \vartheta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2\vartheta}} \quad (5)$$

Определим теперь величину $|K_1|$. Эта величина равна количеству движения светового потока, приходящемуся на объем параллелепипеда с площадью основания ΔS и длиной стороны $c \Delta t$. Так как световой поток составляет с нормалью к площадке угол ϑ , объем этого параллелепипеда равен $\Delta S c \Delta t \cos \vartheta$. Приходящееся на этот объем количество движения равно

$$|K_1| = \frac{w}{c} c \Delta t \Delta S \cos \vartheta = w \Delta t \Delta S \cos \vartheta \quad (6)$$

Из соотношений (2), (4), (5) и (6) следует, что элементарная сила давления света df , действующая на элементарную площадку dS , равна по величине

$$df = w \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2\vartheta} \cos \vartheta ds \quad (7)$$

и составляет с перпендикуляром к площадке угол

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{(1 - \varepsilon) \sin \vartheta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2\vartheta}} \right] \quad (8)$$

При полном отражении $\varepsilon = 1$, $df = 2w \cos^2 \vartheta dS$ и $\varphi = 0$, т. е. сила светового давления направлена нормально к площадке.

При полном поглощении $\varepsilon = 0$, $df = w \cos \vartheta dS$ и $\varphi = \vartheta$, т. е. сила светового давления направлена по падающему световому потоку.

Плотность световой энергии w связана с потоком световой энергии E соотношением $E = wc$. В свою очередь, величина потока световой энергии, приходящаяся на единицу поверхности тела, обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света. Поэтому окончательно получим

$$df = \frac{E_0}{c} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2\vartheta} \cos \vartheta dS \quad (9)$$

где E_0 — величина потока световой энергии, приходящаяся на единицу поверхности тела, расположенного на расстоянии r_0 от источника света.

Величина потока световой энергии Солнца на расстоянии орбиты Земли [6]

$$E_c = 1200 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{час}} = 1.39 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{сек}}$$

$$\frac{E_c}{c} = 0.464 \cdot 10^{-4} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = 4.64 \cdot 10^{-5} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 4.72 \cdot 10^{-8} \frac{\text{г}}{\text{см}^2}$$

Следовательно, при $\varepsilon = 0$ и $\vartheta = 0$ необходима плоскость площадью 2120 м^2 (квадрат со стороной 46 м), чтобы получить силу в 1 г .

В качестве примера рассмотрим воздействие светового излучения на движение относительно центра масс космического летательного аппарата в форме прямого кругового однородного цилиндра радиусом R и длиной l , причем предположим, что диаметральной плоскость цилиндра перпендикулярна к направлению распространения света. Предположим также, что вращающий момент относительно оси цилиндра создается за счет того, что одна половина боковой поверхности цилиндра является абсолютно отражающей, а другая — поглощающей с коэффициентом отражения $\varepsilon < 1$. При этих предположениях задача сводится к плоскому случаю.

На фиг. 2 показано сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси. Оси η, ζ — неподвижные оси отсчета, оси x, y вращаются вместе с цилиндром, причем будем считать, что свет распространяется по отрицательному направлению оси η . Пусть контур раздела боковой поверхности цилиндра на две половины с различными отражающими свойствами лежит в плоскости $y = 0$ и поверхность $y > 0$ будет поглощающей, а $y < 0$ — абсолютно отражающей.

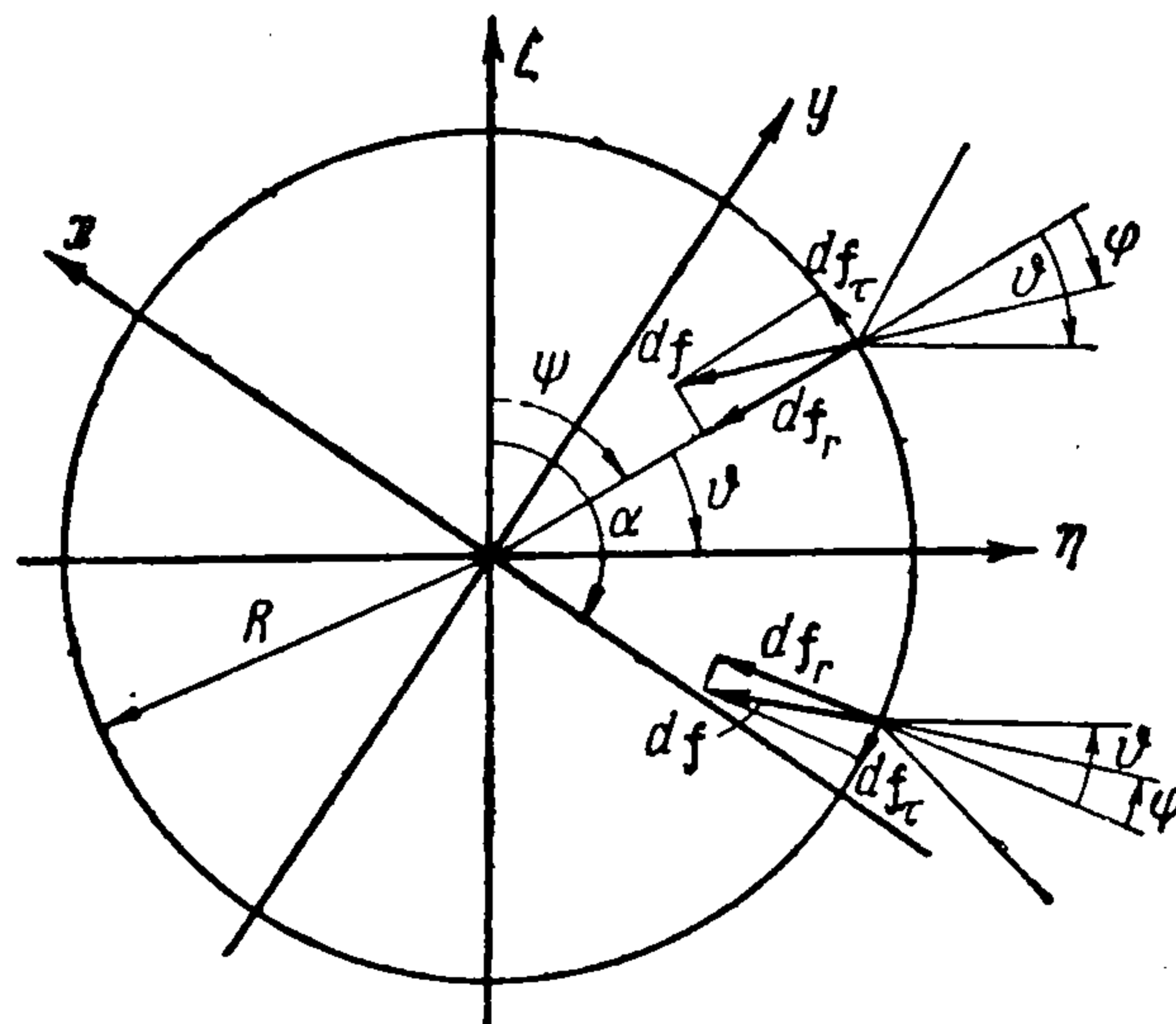


Рис. 2

Тогда уравнение движения цилиндра относительно его оси имеет вид

$$I \ddot{\alpha} + b_0 \sin^2 \alpha \operatorname{sign} \sin \alpha = 0 \quad (10)$$

$$\left(b_0 = \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 R^2 l (1 - \varepsilon) = \text{const} \right)$$

Здесь I — момент инерции цилиндра. Полученное уравнение аналогично уравнению математического маятника с той разницей, что восстанавливающий момент в рассматриваемом случае пропорционален функции $F(\alpha) = \sin^2 \alpha \operatorname{sign} \sin \alpha$ вместо $F'(\alpha) = |\sin \alpha| \operatorname{sign} \sin \alpha = \sin \alpha$ в случае математического маятника.

Уравнение фазовой траектории движения, описываемого уравнением (10), имеет вид

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \Pi(\alpha) = C \quad \left(\Pi(\alpha) = \omega_0^2 \int \sin^2 \alpha \operatorname{sign} \sin \alpha d\alpha, \omega_0^2 = \frac{b}{I} \right) \quad (11)$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ — потенциальная энергия цилиндра, C — постоянная интегрирования.

На фиг. 3 приведен примерный вид функций $\sin^2 \alpha \operatorname{sign} \sin \alpha$, $\Pi(\alpha)$ и примерная картина фазовых траекторий. Таким образом, при достаточно малой начальной угловой скорости цилиндр будет совершать неза-

тухающие колебания около положения устойчивого равновесия, которому соответствует поворот к свету идеально отражающей поверхности. Максимальная начальная угловая скорость цилиндра в этом режиме определяется как точка сепаратриссы ($\dot{\alpha}^{\circ}_{\max}$, $\alpha^{\circ} = 0$). Из уравнения сепаратриссы следует

$$|\dot{\alpha}^{\circ}_{\max}| = \omega_0 \sqrt{\pi} \quad (12)$$

Подставив в (12) выражение для момента инерции цилиндра, получим

$$|\dot{\alpha}^{\circ}_{\max}| = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{h_0(1-\varepsilon)}{\gamma}} \quad \left(h_0 = \frac{E_0}{c} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right)$$

где γ — плотность вещества цилиндра.

Предположим, что источником света является Солнце, а расстояние от Солнца до цилиндра равно расстоянию от Солнца до Земли, т. е. $h_0 = 4.64 \cdot 10^{-5}$ дин/см². Пусть $R = 100$ см, $\varepsilon = 0$, $\gamma = 1$ г/см³. Тогда $|\dot{\alpha}^{\circ}_{\max}| = 0.68 \cdot 10^{-4}$ 1/сек = 0.0039°/сек. Приведенные вычисления показывают, что стабилизирующий эффект солнечного давления очень мал для цилиндра, радиус которого равен 100 см. Однако если $R = 10$ см, то $|\dot{\alpha}^{\circ}_{\max}| = 0,039^\circ/\text{сек}$, что составляет уже ощутимую величину.

Составим выражение для сил и моментов сил светового давления, действующих на тело произвольной формы, которое меняет свою ориентацию относительно потока света. Для этого введем «неподвижную» систему координат $\xi\eta\zeta$ и систему координат xuz , связанную с телом. Направляющие косинусы системы xuz относительно системы $\xi\eta\zeta$ являются функциями времени. Обозначим орты осей x, y, z через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно, а орт внешней нормали в каждой точке поверхности тела через \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) \mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \mathbf{k} \quad (13)$$

Обозначим далее орт, противоположный направлению светового потока, через $\boldsymbol{\tau}$, а его направляющие косинусы в системе осей x, y, z через a_0, b_0, c_0 , так что

$$\boldsymbol{\tau} = a_0 \mathbf{i} + b_0 \mathbf{j} + c_0 \mathbf{k} \quad (14)$$

Величины a_0, b_0, c_0 будут также функциями времени.

Границу освещенной части поверхности (терминатор) определим, исходя из того, что в каждой точке терминатора вектор $\boldsymbol{\tau}$ лежит в касательной плоскости; следовательно, на границе

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (15)$$

В том случае, когда орт \mathbf{n} не будет непрерывной функцией координат на какой-либо части поверхности (куб, цилиндр), для определения терминатора должно служить соотношение

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (16)$$

Заметим, что произведение $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ есть не что иное, как косинус угла падения светового потока (см. (8) и (9)).

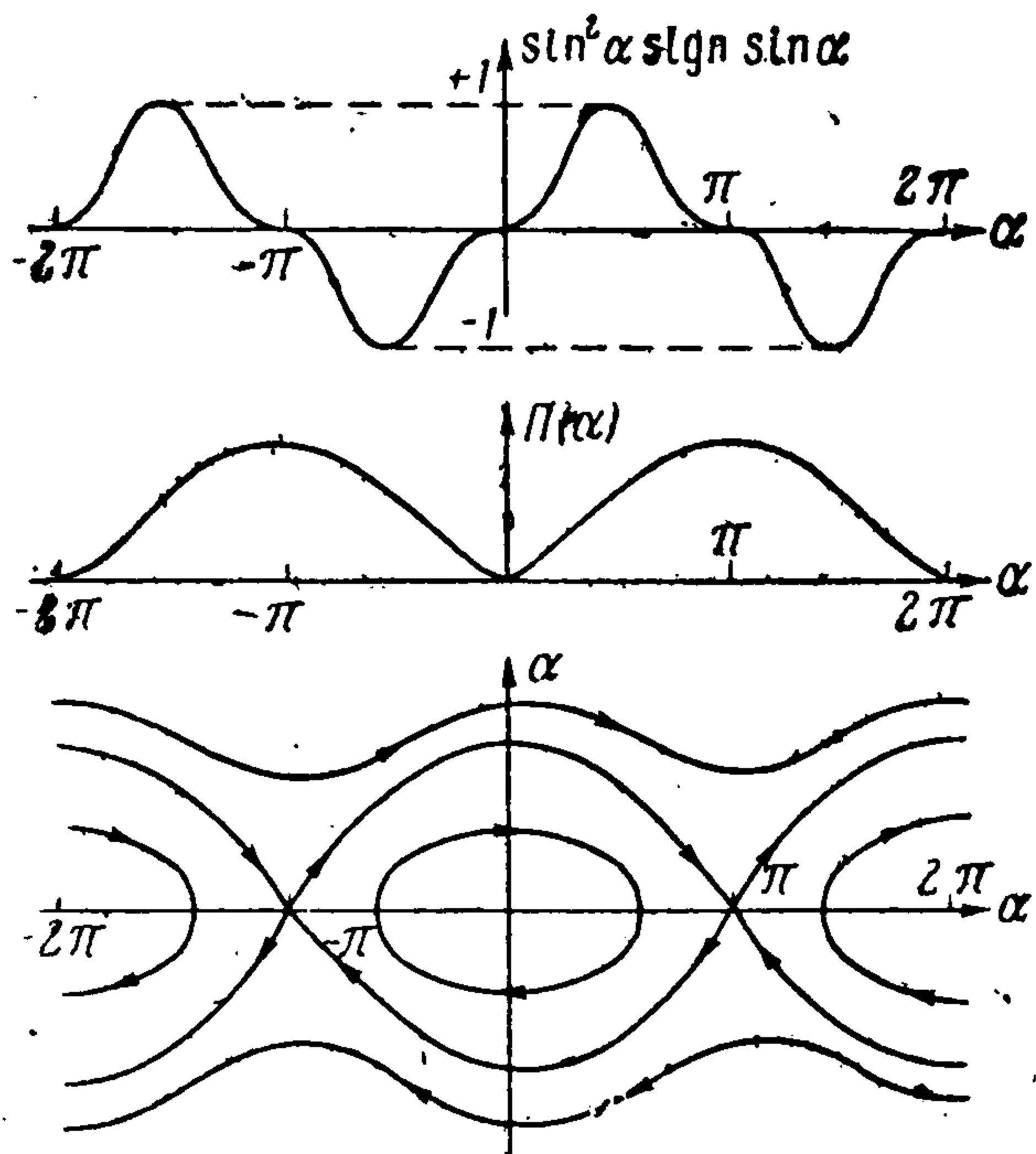


Рис. 3

Обозначим далее элементарную силу, действующую на элементарную площадку поверхности dS через df . При этом

$$df = fdf = df (pi + qj + rk) \quad (17)$$

где f — орт вектора df , а p, q, r — его направляющие косинусы в системе осей x, y, z .

Величина df может быть вычислена по (9). Для определения величин p, q, r необходимы три уравнения. Одно из них есть очевидное соотношение

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \quad (18)$$

Для составления второго уравнения воспользуемся предположением о том, что луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром к площадке. Это означает, что орты f, τ и n лежат в одной плоскости, т. е.

$$(n \times \tau) \cdot f = 0 \quad (19)$$

Третье уравнение получим, подставив в (8) величины

$$\sin \vartheta = |\tau \times n|, \quad \sin \varphi = |f \times n|$$

Нетрудно показать, что решение полученной при этом системы уравнений (18), (8) имеет вид

$$f = - \frac{(1 - \epsilon) \tau + 2\epsilon n (\tau \cdot n)}{\sqrt{(1 - \epsilon)^2 + 4\epsilon^2 (\tau \cdot n)^2}} \quad (20)$$

Из (20) следует, что в случае полностью поглощающей поверхности направление силы совпадает с направлением светового потока, т. е. противоположно направлению орта τ и

$$p = -a_0, \quad q = -b_0, \quad r = -c_0 \quad (21)$$

В случае полностью отражающей поверхности направление силы противоположно направлению орта внешней нормали n и

$$p = -\cos(n, i), \quad q = -\cos(n, j), \quad r = -\cos(n, k) \quad (22)$$

Полная сила F светового давления, действующая на тело произвольной формы, равна

$$F = \int_{(S_1)} df$$

где S_1 — освещенная часть поверхности, граница которой определяется неравенством (16).

Учитывая (21) и (22), а также вышесделанное замечание о равенстве косинуса угла падения произведение $\tau \cdot n$, получим выражения для силы F^+ , действующей на тело, ограниченное полностью поглощающей поверхностью, и для силы F^- , действующей на тело, ограниченное полностью отражающей поверхностью

$$F^+ = -h_0 \tau \int_{(S_1)} (\tau \cdot n) dS, \quad F^- = -2h_0 \int_{(S_1)} n (\tau \cdot n)^2 dS \quad \left(h_0 = \frac{E_0}{c} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \quad (23)$$

Здесь интегрирование проводится по области $\tau \cdot n \geq 0$.

Используя соотношения (9), (20), (23), получаем, что сила, действующая на тело, ограниченное поверхностью с произвольным коэффициентом отражения, определяется формулой

$$F = (1 - \epsilon) F^+ + \epsilon F^- = F^+ + \epsilon (F^- - F^+)$$

Пусть $\mathbf{R} = xi + yj + zk$ — радиус-вектор точки на рассматриваемой поверхности, причем координаты x, y, z связаны уравнением поверхности. Тогда элементарный момент силы светового давления будет равен $d\mathbf{M} = \mathbf{R} \times d\mathbf{f}$, а полный момент

$$\mathbf{M} = \int_{(\dot{S}_1)} \mathbf{R} \times d\mathbf{f}$$

Из предыдущего следует, что можно достаточно просто получить выражения для момента сил светового давления, действующего на тело с полностью поглощающей поверхностью \mathbf{M}^+ и на тело с полностью отражающей поверхностью \mathbf{M}^-

$$\mathbf{M}^+ = h_0 \boldsymbol{\tau} \times \int_{(\dot{S}_1)} \mathbf{R} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \mathbf{M}^- = 2h_0 \int_{(\dot{S}_1)} \mathbf{n} \times \mathbf{R} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})^2 dS \quad (24)$$

и для тела, ограниченного поверхностью с произвольным коэффициентом отражения

$$\mathbf{M} = (1 - \varepsilon) \mathbf{M}^+ + \varepsilon \mathbf{M}^- = \mathbf{M}^+ + \varepsilon (\mathbf{M}^- - \mathbf{M}^+)$$

Совокупность формул (23), (24) и (16) определяет силовое воздействие потока света на тело, помещенное в этот поток. Вычисление сил и моментов сил светового давления по (23), (24) даже для простых поверхностей достаточно сложно, так как и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят как от параметров поверхности, так и от ориентации светового потока относительно тела. Поэтому желательно упростить полученные выражения так, чтобы облегчить их вычисление. Оказывается, что это легко можно сделать для \mathbf{F}^+ и \mathbf{M}^+ .

Для этого дополним освещенную часть поверхности до замкнутой поверхности, состоящей из освещенной части поверхности тела, боковой цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна направлению

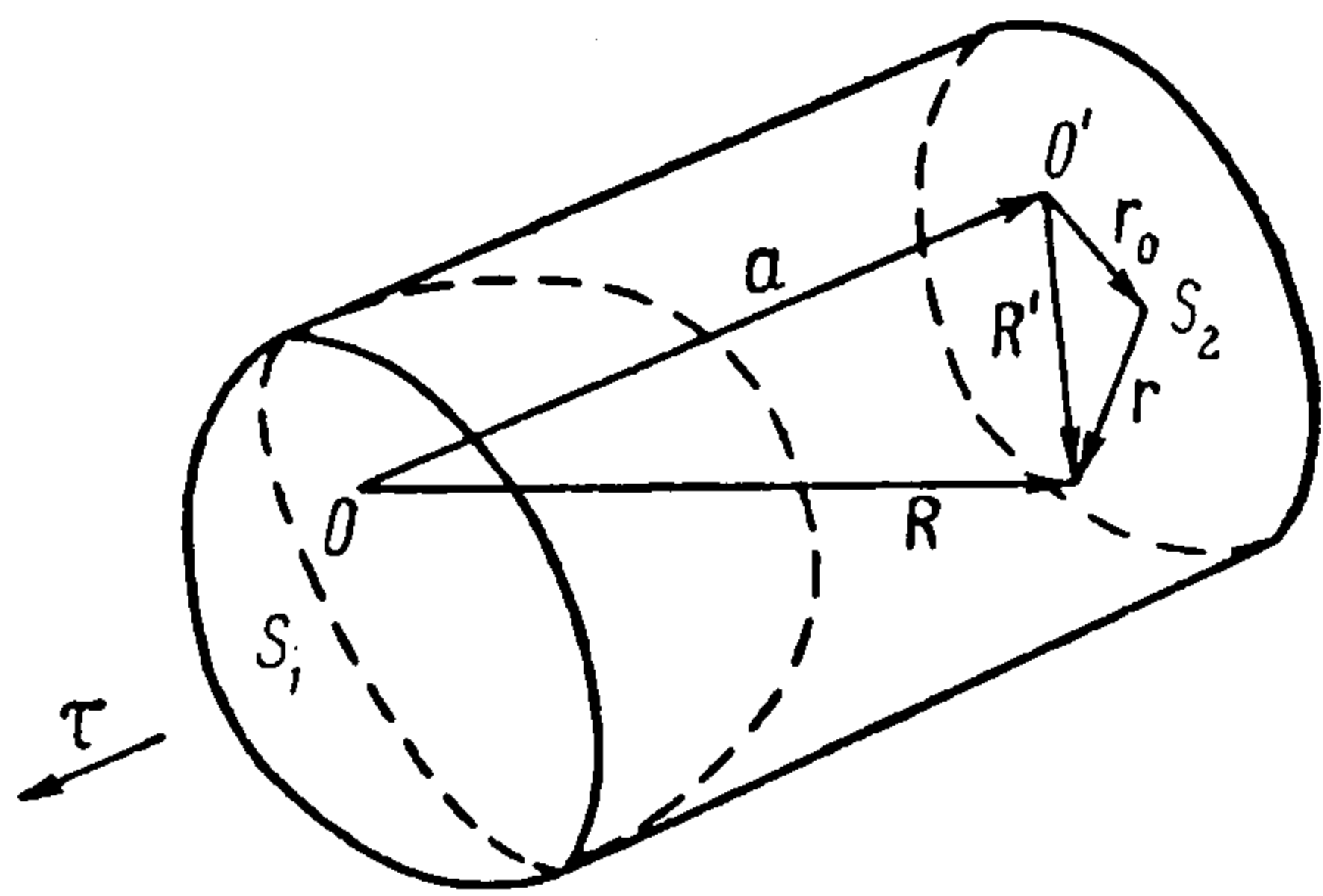


Рис. 4

потока света, а направляющей служит терминатор (фиг. 4), и плоского дна, перпендикулярного направлению потока света. Применим к этой замкнутой поверхности формулу Остроградского — Гаусса. В результате получим

$$\mathbf{F}^+ = h_0 \boldsymbol{\tau} S_2, \quad \mathbf{M}^+ = h_0 \boldsymbol{\tau} \times \int_{(\dot{S}_2)} \mathbf{R} dS \quad (25)$$

где S_2 — проекция освещенной части поверхности на плоскость, перпендикулярную световому потоку.

Обозначим точку, относительно которой вычисляется момент через O , а проекцию этой точки на плоскость (фиг. 4), перпендикулярную орту $\boldsymbol{\tau}$, через O' . Заменяя вектор \mathbf{R} на сумму $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{R}'$, получим

$$\mathbf{M}^+ = h_0 \boldsymbol{\tau} \times \int_{(\dot{S}_2)} \mathbf{R}' dS \quad (26)$$

где вектор \mathbf{R}' есть радиус-вектор точки области S_2 относительно точки O' .

Представим далее вектор \mathbf{R}' как сумму $\mathbf{R}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$, где \mathbf{r}_0 — вектор-радиус центра тяжести дна относительно начала вектор-радиуса \mathbf{R}' , а \mathbf{r} — текущий вектор-радиус точки относительно центра тяжести дна.

Подставив \mathbf{R}' в (26), получим

$$\mathbf{M}^+ = h_0 S_2 \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}_0 \quad (27)$$

Здесь \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра тяжести проекции освещенной части поверхности на плоскость S_2 относительно той точки, по отношению к которой отыскивается момент на ту же плоскость.

Что касается величин \mathbf{F}^- и \mathbf{M}^- , то получить существенное улучшение способа их вычисления не удалось; эти величины приходится определять прямым интегрированием,

В качестве примеров приведем результаты вычислений сил и моментов сил светового давления, действующие на тела, ограниченные различными конкретными поверхностями.

1. Эллипсоид

$$x^2 / A^2 + y^2 / B^2 + z^2 / C^2 = 1$$

В случае полностью поглощающей поверхности

$$\mathbf{F}^+ = -h_0 \tau \pi \sqrt{a_0^2 B^2 C^2 + b_0^2 A^2 C^2 + c_0^2 A^2 B^2} \quad (28)$$

где a_0, b_0, c_0 — направляющие косинусы орта $\boldsymbol{\tau}$ относительно осей x, y, z соответственно. Момент относительно центра эллипсоида, совпадающего с центром масс, равен нулю.

2. Прямой круговой цилиндр

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad |z| \leq a$$

В случае полностью поглощающей поверхности

$$\mathbf{F}^+ = -h_0 \tau \pi R^2 \left[|c_0| + \frac{4}{\pi} \frac{a}{R} \sqrt{1 - c_0^2} \right] \quad (29)$$

Момент относительно центра цилиндра равен нулю.

3. Прямой круговой конус

$$x^2 + y^2 = R^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2, \quad 0 \leq z \leq h$$

В случае полностью поглощающей поверхности

$$\mathbf{F}^+ = -h_0 \tau \pi R^2 |c_0| \quad (\Omega \leq 0) \quad (30)$$

$$\mathbf{F}^+ = -h_0 \tau \pi R^2 \left\{ \left[1 - \frac{f(|c_0|)}{2\pi} \right] |c_0| + \frac{h}{\pi R} \Omega^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - c_0^2} \right\} \quad (\Omega \geq 0)$$

Здесь

$$\Omega = 1 - \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{c_0^2}{1 - c_0^2}$$

$$f(|c_0|) = \arcsin \left[2 \left(\frac{R}{h} \right) \frac{|c_0|}{\sqrt{1 - c_0^2}} \Omega^{\frac{1}{2}} \right] - 2 \left(\frac{R}{h} \right) \frac{|c_0|}{\sqrt{1 - c_0^2}} \Omega^{\frac{1}{2}}$$

$$f(|c_0|) = 0 \quad \text{при } \Omega = 0, \quad f(|c_0|) = \pi \quad \text{при } c_0 = 0$$

Проекции момента относительно центра масс конуса на оси x', y', z (оси x', y' параллельны осям x, y , но проходят через центр масс конуса) равны:

при $\Omega \leq 0$

$$M_{x'} = -\frac{1}{4} h_0 b_0 h \pi R^2 |c_0|, \quad |M_{y'}| = \frac{1}{4} h_0 a_0 h \pi R^2 |c_0|, \quad M_z = 0 \quad (31)$$

при $\Omega \geq 0$

$$M_{x'} = -\frac{1}{4} h_0 b_0 h \pi R^2 \left\{ \left[1 - \frac{f(|c_0|)}{2\pi} \right] |c_0| - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \Omega \sqrt{1 - c_0^2} \right\}$$

$$M_{y'} = \frac{1}{4} h_0 a_0 h \pi R^2 \left\{ \left[1 - \frac{f(|c_0|)}{2\pi} \right] |c_0| - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \Omega \sqrt{1 - c_0^2} \right\}$$

$$M_z = 0$$

4. Полушфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$$

В случае полностью поглощающей поверхности

$$F^+ = -h_0 \tau \frac{\pi R^2}{2} (1 + |c_0|) \quad (32)$$

Проекции момента относительно центра масс полушферы на оси x' , y' , z' (оси x' , y' параллельны осям x , y , но проходят через центр масс полушферы) равны

$$\begin{aligned} M_{x'} &= -h_0 b_0 \frac{3}{16} \pi R^3 \left[1 + |c_0| - \frac{32}{9\pi} \sqrt{1 - c_0^2} \right], \\ M_{y'} &= h_0 a_0 \frac{3}{16} \pi R^3 \left[1 + |c_0| - \frac{32}{9\pi} \sqrt{1 - c_0^2} \right], \quad M_{z'} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Как видно из (33), момент обращается в нуль не при $c_0 = 0$, как это следовало бы ожидать (то же самое для предыдущего случая). Этот факт объясняется тем что центры тяжести тела вращения и сечения этого тела осевой плоскостью в общем случае не совпадают.

Как уже указывалось, вычисление сил и моментов сил светового давления, действующих на тело, ограниченное полностью отражающей поверхностью, значительно сложнее, чем в случае полностью поглощающей поверхности, а результаты представляют собой более сложные и громоздкие соотношения. Поэтому в случае полностью отражающей поверхности ограничимся лишь поверхностями шара и прямого кругового цилиндра.

5. Для шара в случае полностью отражающей поверхности

$$F^- = -h_0 \tau \pi R^2, \quad M^- = 0 \quad (34)$$

Если в выражении (28) положить $A = B = C = R$, т. е. рассмотреть частный случай эллипсоид — шар, то видно, что силовое воздействие светового потока на шар с полностью поглощающей и полностью отражающей поверхностями одинаково.

6. Для прямого кругового цилиндра в случае полностью отражающей поверхности

$$\begin{aligned} F_{x^-} &= -\frac{16}{3} h_0 a_0 R a \sqrt{1 - c_0^2}, & F_{y^-} &= -\frac{16}{3} h_0 b_0 R a \sqrt{1 - c_0^2} \\ F_{z^-} &= -2h_0 \tau R^2 c_0^2 \operatorname{sign} c_0, & M^- &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

7. Тело вращения

$$x^2 + y^2 = f(z) \quad (z \text{ — ось вращения}) \quad (36)$$

в случае полностью поглощающей поверхности,

Если поверхность вращения ограничена еще торцевой плоскостью, то к уравнению (36) следует добавить неравенство

$$z \leq z^* \quad (37)$$

где z^* — фиксированная величина. Обозначим, как и раньше, орты осей x , y , z через i , j , k соответственно и определим направляющие косинусы внешней нормали в каждой точке боковой поверхности

$$\cos(n, i) = \frac{x}{\sqrt{f(z) + \frac{1}{4}[f'(z)]^2}}, \quad \cos(n, j) = \frac{y}{\sqrt{f(z) + \frac{1}{4}[f'(z)]^2}} \quad (38)$$

$$\cos(n, k) = -\frac{\frac{1}{2}f'(z)}{\sqrt{f(z) + \frac{1}{4}[f'(z)]^2}} \quad \left(f'(z) = \frac{df}{dz} \right)$$

Подставив (38) в уравнение терминатора $\tau \cdot n = 0$, получим

$$a_0 x + b_0 y = \frac{1}{2} f'(z) c_0 \quad (39)$$

На торцевых поверхностях

$$\cos(n, i) = 0, \quad \cos(n, j) = 0, \quad \cos(n, k) = \mp 1$$

Введем новую систему координат x'' , y'' , z'' , образованную из старой поворотом на углы β и θ так, что табличка направляющих косинусов новой системы осей

относительно старой имеет вид (фиг. 5);

	x	y	z
x''	$\cos \beta$	$\sin \beta$	0
y''	$-\sin \beta \cos \vartheta$	$\cos \beta \cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
z''	$\sin \beta \sin \vartheta$	$-\cos \beta \sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

Здесь

$$\cos \beta = \frac{b_0}{\sqrt{1-c_0^2}}, \quad \sin \beta = -\frac{a_0}{\sqrt{1-c_0^2}}, \quad \cos \vartheta = \sqrt{1-c_0^2}, \quad \sin \vartheta = c_0$$

$$\left(0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Обозначим орты осей x'' , y'' , z'' через i'' , j'' , k'' соответственно. Тогда легко установить, что $j'' \cdot \tau = 1$ и $k'' \cdot \tau = 0$, т. е. плоскость $x'' z''$ перпендикулярна к направлению светового потока, а орт k лежит в плоскости $z'' y''$.

Выразив в (36) и (39) старые координаты через новые, получим

$$x''^2 + [y'' \sqrt{1-c_0^2} - z'' c_0]^2 = f(z) \quad \text{при } z = y'' c_0 + z'' \sqrt{1-c_0^2} \quad (40)$$

$$[y'' \sqrt{1-c_0^2} - z'' c_0] \sqrt{1-c_0^2} = \frac{1}{2} f'(z) \quad \text{при } z = y'' c_0 + z'' \sqrt{1-c_0^2}$$

Исключив из уравнений (40) координату y'' , получим уравнение связи между x'' и z'' , т. е. уравнение проекции терминатора на плоскость, перпендикулярную к потоку света. Для вычисления сил и моментов сил, действующих на тело с полностью поглощающей поверхностью, нужно определить величину площади этой проекции. Из общего вида уравнений (40) можно сделать следующие заключения: 1) величина этой площади зависит только от параметров самой поверхности и угла между осью симметрии тела и направлением светового потока; 2) кривая, ограничивающая проекцию, симметрична относительно оси z'' , т. е. центр тяжести площади проекции лежит на оси z'' .

При выводе уравнений (40) предполагалось, что терминатор целиком лежит на боковой поверхности тела и не проходит через торец. Чтобы учесть влияние торца, нужно получить условие пересечения терминатора плоскостью торца. Это условие записывается в виде

$$2R \geq f'(a) \sqrt{\frac{c_0^2}{1-c_0^2}} \quad (41)$$

где R — радиус торца, a — расстояние торца от начала координат. Если это условие выполнено, то, подставив в уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ и $z = a$ старые переменные через новые, получим уравнение проекции торца на плоскость $x'' z''$ в форме

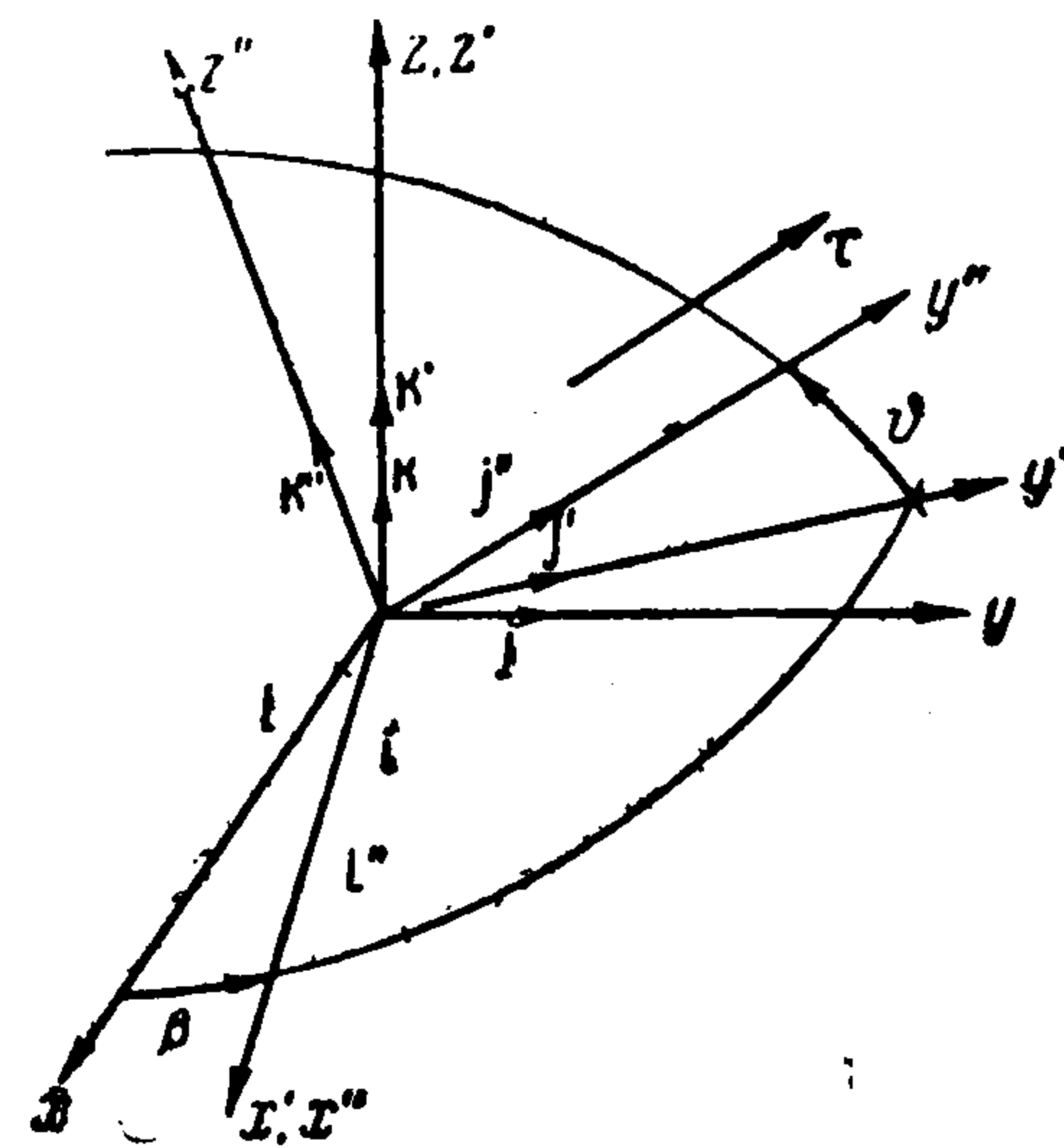
$$c_0^2 x''^2 + [a \sqrt{1-c_0^2} - z'']^2 = c_0^2 R^2 \quad (42)$$

Пересечение этой кривой с кривой, определяемой уравнениями (40), задает полную проекцию освещенной части поверхности на плоскость, перпендикулярную к потоку света. Как видно, учет влияния торца не изменяет ранее сделанных общих заключений. Следовательно, площадь проекции можно считать функцией направляющего косинуса c_0 , т. е. $S_2 = S_2(c_0)$.

Учитывая, что центр тяжести площади проекции лежит на оси z'' , запишем вектор r_0 в виде $r_0 = r_0 k''$ и выражение для момента сил, действующего на тело вращения с полностью поглощающей поверхностью, в виде

$$M^+ = h_0 S_2(c_0) r_0 [\tau \times k''] \quad (43)$$

Величина r_0 вектора r_0 также является функцией параметров поверхности и направляющего косинуса c_0 , т. е. $r_0 = r_0(c_0)$. Пользуясь табличкой направляющих



Фиг. 5

косинусов, находим проекции на оси

$$[\tau \times \mathbf{k}'']_x = \frac{b_0}{\sqrt{1-c_0^2}}, \quad [\tau \times \mathbf{k}'']_y = -\frac{a_0}{\sqrt{1-c_0^2}}, \quad [\tau \times \mathbf{k}'']_z = 0 \quad (44)$$

Тогда уравнение (43) с учетом (44) в проекциях на оси представим в виде

$$M_x^+ = \frac{b_0 h_0}{\sqrt{1-c_0^2}} S_2(c_0) r_0(c_0), \quad M_y^+ = -\frac{a_0 h_0}{\sqrt{1-c_0^2}} S_2(c_0) r_0(c_0) \\ M_z^+ = 0 \quad (45)$$

Величина полного момента сил светового давления будет равна

$$|M^+| = \sqrt{(M_x^+)^2 + (M_y^+)^2} = h_0 S_2(c_0) |r_0(c_0)| \quad (46)$$

Из (46) следует, что $|M^+| = 0$ при $c_0 = \mp 1$, так как при $c_0 = \mp 1$ проекция освещенной части поверхности есть круг с центром на оси симметрии. Однако M_x^+ и M_y^+ могут обращаться в нуль не только при $c_0 = \pm 1$, но и при некоторых значениях $c_0 = c_0^*$, когда $r_0(c_0^*) = 0$.

Если при определении момента нужно перейти от точки O , относительно которой вычисляется момент по (45), к точке C , лежащей на оси тела на расстоянии σ_z от точки O , то

$$M_{x'}^+(C) = \frac{b_0 h_0 S_2(c_0)}{\sqrt{1-c_0^2}} [r_0(c_0) + \sigma_z \sqrt{1-c_0^2}], \quad M_z^+(C) = 0 \quad (47) \\ M_{y'}^+(C) = -\frac{a_0 h_0 S_2(c_0)}{\sqrt{1-c_0^2}} [r_0(c_0) + \sigma_z \sqrt{1-c_0^2}]$$

Как и ранее, $M_{x'}^+(C) = M_{y'}^+(C) = 0$ при $|c_0| = 1$, $a_0 = b_0 = 0$; однако может оказаться, что эти составляющие согласно (46) будут равны нулю при некотором значении c_0^* , которое является корнем уравнения

$$r_0(c_0) + \sigma_z \sqrt{1-c_0^2} = 0 \quad (48)$$

Для тела вращения в случае полностью отражающей поверхности, уравнение которой записано в осях x, y, z , имеющих начало в точке O , проекции момента на оси x', y', z , имеющие начало в точке C , будет

$$M_{x'}^-(C) = 2h_0 \int_{(S_1)} (\tau \cdot \mathbf{n})^2 y \frac{z + 1/2 f'(z) + \sigma_z}{\sqrt{f(z) + 1/4 [f'(z)]^2}} dS, \quad M_z^-(C) = 0 \\ M_{y'}^-(C) = -2h_0 \int_{(S_1)} (\tau \cdot \mathbf{n})^2 x \frac{z + 1/2 f'(z) + \sigma_z}{\sqrt{f(z) + 1/4 [f'(z)]^2}} dS, \quad (49)$$

где σ_z — расстояние между точками O и C .

Поступила 18 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Robert L. Stafford. Preliminary Considerations for Attitude Control of Space Vehicles. Technical Session Preprint of A. A. S., 1960, № 78.
2. Newton Robert R. Stabilizing a Spherical Satellite by Radiation Pressure ARS Journal, 1960, 30, 12.
3. London H. S. Some Exact Solutions of the Equations of Motion of a Solar Sail with Constant Sail Setting. ARS Journal, 1960, 30, 2.
4. Sohn R. H. Attitude Stabilization by means of Solar Radiation Pressure. ARS Journal, 1959, 29, 5.
5. Robert R. Hibbard. Attitude Stabilization Using Focused Radiation Pressure ARS Journal, 1961, 31, 6.
6. Александров С. Г., Федоров Р. Е. Советские спутники и космическая ракета. АН СССР, 1959.