Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ЭНЕРГИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

О. С. Рыжов, Г. М. Шефтер

(Москва)

Проблема затухания ударных волн на далеких расстояниях от места возникновения впервые рассматривалась Крюссаром, который нашел асимптотические законы их движения в прямой трубке с постоянной площадью поперечного сечения [1]. Законы распространения слабых цилиндрических и сферических ударных волн в однородной среде установлены разными методами в работах Л. Д. Ландау [2], С. А. Христиановича [3], Л. И. Седова [4], Уитэма [5] и ряда других авторов. Первое решение задачи о поведении ударных волн малой амплитуды в неоднородной среде содержится в статье Уитэма [6], где предполагалось, что распределение параметров газа как в состоянии равновесия, так и в возникающих волновых движениях обладает сферической симметрией. Оттерман [7] исследовал затухание ударных фронтов в слоистой покоящейся среде с постоянной температурой. Общей задаче о распространении ударных волн в движущейся неоднородной среде посвящены работы К. Е. Губкина [8], О. Ю. Полянского [9] и работа [10]; в них на характер начального распределения давления, плотности, температуры и скорости частиц газа не накладывалось никаких ограничений.

Асимптотические законы изменения параметров газа вдоль скачков уплотнения на больших расстояниях от тел, обтекаемых стационарным равномерным сверхзвуковым потоком, установлены Л. Д. Ландау [2] и Уитэмом [11, 12] в предположении, что течение является либо плоскопараллельным, либо обладает осевой симметрией. Взаимодействие скачков уплотнения с плоскопараллельным потоком, обладающим слоистой структурой, изучалось Райли [13]. Поведение ударных волн в произвольных сверхзвуковых течениях вдали от обтекаемых тел исследовано в работе [14], где указано также различие между рассматриваемыми нестационарными и стационарными задачами. В статье Фридрихса [15] развита теория второго приближения, которая позволяет установить с более высокой степенью точности законы затухания ударных волн в течениях, параметры которых определяются двумя независимыми переменными. В части, касающейся нестационарных движений, результаты Фридрихса совпадают с результатами Крюссара [1].

Необходимо отметить, что все перечисленные работы существенно опираются на предположение о том, что при переходе через ударный фронт энтропия частицы сохраняется прежней. Это предположение оправдано, так как изменение энтропии на ударной волне малой амплитуды пропорционально кубу изменения любой из остальных величин, описывающих состояние газа, а исследованию подлежат уравнения, содержащие бóльшие члены. В монографии Я. Б. Зельдовича [16] на примере одномерных движений, происходящих в цилиндрических трубках, показано, что к проблеме затухания ударных волн возможен иной подход, основанный на учете диссипации энергии на фронте. Величина диссипации полностью определяется изменением энтропии, которое во всех остальных методах оказывалось возможным не принимать во внимание. Аналогичная идея высказывалась Дю-Мондом, Коэном, Пановским и Дидсом [17]. В работе [18] указанный подход был применен к решению задачи о движении ударных волн малой амплитуды в неоднородных покоящихся средах. Оказалось, что и в этом случае отличие законов затухания слабых ударных волн от акустических целиком определяется величиной энергии, необратимо превращенной в тепло. Учет диссипации энергии при ударном сжатии газа лежит в основе работ Лайтхилла [19] и Фитиана [20], в которых исследовалась точность теории Фридрихса [15].

В настоящей работе, являющейся развитием работы [18], выводится уравнение, представляющее собой следствие закона сохранения энергии в применении к звуковым волнам, распространяющимся в произвольных неоднородных движущихся средах. На основе этого уравнения проводится все дальнейшее исследование при дополнительном предположении о том, что ширина области возмущенного движения газа мала по сравнению с радиусом кривизны ударного фронта и расстоянием, на котором существенно меняются параметры исходной среды. Оно позволяет значительно упростить указанное выше уравнение и, проинтегрировав его, получить формулу, определяющую изменение избыточного давления на фронте ударной волны в приближении геометрической акустики [21–23]. Дополнительное по сравнению с акустикой затухание амплитуды волны объясняется, как и прежде, диссипацией энергии, происходящей при ударных переходах. Обращая ход рассуждений, оказывается возможным свести задачу о распространении волн малой амплитуды в произвольных средах к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений для величины избыточного давления на фронте и длины волны звукового импульса.

§ 1. Акустическое приближение. Изменение энергии газа, движущегося в поле тяжести, определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)+\operatorname{div}\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\mathbf{v}-\rho\mathbf{v}\mathbf{g}=0 \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $\mathbf{v}$ — скорость частиц, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, ε — удельная внутренняя энергия, w — удельная энтальпия. Величина w связана с ε и давлением p формулой

$$\rho w=\rho\varepsilon+p$$

Рассмотрим распространение звуковой волны в неоднородной движущейся среде. Будем считать, что в невозмущенном состоянии скорость частиц $\mathbf{v}_0$, давление p_0, плотность ρ_0, удельная энтропия s_0, внутренняя энергия ε_0 и удельная энтальпия w_0 не меняются со временем и заданы как функции координат x_i. В этом случае уравнения газовой динамики, описывающие начальное состояние газа, примут вид

$$\operatorname{div}\rho_0\mathbf{v}_0=0,\qquad (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_0+\rho_0^{-1}\operatorname{grad}p_0=\mathbf{g},\qquad \mathbf{v}_0\operatorname{grad}s_0=0 \tag{1.2}$$

Упростим уравнение (1.1), используя малость амплитуды звуковой волны. Для этого разложим величину ρw в ряд, причем в качестве независимых термодинамических переменных выберем давление p и удельную энтропию s. Пусть T означает температуру вещества. Согласно известному термодинамическому соотношению

$$dw=T\,ds+\rho^{-1}\,dp$$

Используя это равенство, напишем искомое разложение для ρw, в котором сохраним члены первого и второго порядков малости

$$\begin{aligned}\rho w=\rho_0 w_0&+\left(1+\frac{w_0}{a_0^2}\right)p'+\left[\rho_0T_0+w_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_0}\right)_p\right]s'+\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho_0a_0^2}+w_0\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p_0^2}\right)_s\right]p'^2+\left(\frac{T_0}{a_0^2}+w_0\frac{\partial^2\rho}{\partial p_0\partial s_0}\right)p's'+\\&+\frac{1}{2}\left[2T_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_0}\right)_p+\frac{\rho_0T_0}{c_{p0}}+w_0\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial s_0^2}\right)_p\right]s'^2\end{aligned}$$

Здесь a — скорость звука, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, p' и s' — отклонения давления и энтропии от их начальных значений, нулевой индекс относится к величинам в невозмущенном состоянии.

Подставим написанное равенство в уравнение (1.1), выражающее закон сохранения энергии в движениях сплошных сред. Для упрощения полученного соотношения воспользуемся формулами (1.2), а также уравнениями неразрывности, Эйлера и сохранения энтропии в частице, в которых нужно оставить квадратичные члены. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\rho_0 v'^2+\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2}\right)+\operatorname{div}\left[p'\mathbf{v}'+\frac{1}{2}\left(\rho_0 v'^2+\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2}\right)\mathbf{v}_0\right]+$$
$$+\rho_0\mathbf{v}'\,(\mathbf{v}'\ \nabla)\,\mathbf{v}_0-\frac{m_0-1}{\rho_0^2 a_0^4}\,p/2\,\mathbf{v}_0\mathrm{grad}\ p_0-$$
$$-\,p's'\mathbf{v}_0\cdot\mathrm{grad}\left[\frac{1}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s_0}\right)_\rho\right]+\frac{1}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s_0}\right)_\rho s'\mathbf{v}'\cdot\mathrm{grad}\ p_0=0 \qquad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{v}'$ — вектор возмущенной скорости частиц среды, а безразмерный коэффициент m_0 определяется формулой

$$m_0=\frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_s$$

где через V обозначен удельный объем, равный $1\ /\ \rho$. Для идеального газа с $c_p = \mathrm{const}$ и показателем адиабаты Пуассона $\varkappa$ коэффициент m_0 равен $(\varkappa+1)\ /\ 2$, а величина

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s_0}\right)_\rho=\frac{1}{c_p}$$

Если в невозмущенном состоянии среда покоится ($\mathbf{v}_0 = 0$), то получим уравнение, выведенное в работе [18]; если, кроме того, в состоянии равновесия характеристики газа постоянны во всем пространстве, то уравнение, следующее из (1.3), выражает, как известно [22, 23], закон сохранения энергии в звуковых волнах, распространяющихся в однородной среде.

Рассмотрим теперь движение коротких звуковых волн, т. е. волн, в которых ширина зоны возмущенного течения λ_* мала по сравнению с главными радиусами кривизны ударного фронта и расстоянием, где существенно меняются параметры исходной среды. Амплитуда и направление таких волн почти не отклоняются от своих прежних значений на расстояниях порядка ширины возмущенной области λ_*. Когда $\lambda_* \to 0$, между параметрами газа в первом приближении справедливы зависимости, определяющие плоский бегущий импульс малой амплитуды

$$\mathbf{v}'=v'\mathbf{n},\qquad v'=\frac{p'}{\rho_0 a_0},\qquad s'=0 \qquad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к фронту волны. Формулы (1.4) верны и для слабых ударных переходов.

В коротких звуковых волнах плотность энергии e и плотность потока звуковой энергии $\mathbf{q}$ также должны быть связаны равенством, которое характеризует одномерный бегущий импульс

$$\mathbf{q}=e\,(a_0\mathbf{n}+\mathbf{v}_0) \qquad (1.5)$$

Подставляя формулы (1.4) в соотношение (1.3), получим основное уравнение геометрической акустики

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2} + \operatorname{div}\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2}(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0) + \frac{p'^2}{\rho_0 a_0^2}[\mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{v}_0 + (m_0 - 1)\operatorname{div}\mathbf{v}_0] = 0 \qquad (1.6)$$

Введем производную вдоль луча, по которому движется элемент волны

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\nabla$$

Координаты x_i луча и изменение вдоль него компонент n_i нормали $\mathbf{n}$ определяются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_0 n_i + v_{0i}, \qquad \frac{dn_i}{dt} = (n_i n_j - \delta_{ij})\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_j} + n_k\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_j}\right) \qquad (1.7)$$

$$(\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j)$$

Здесь использована обычная тензорная запись сумм по повторяющимся индексам j, k, которые принимают значения 1, 2, 3.

Записав второе из уравнений (1.7) в векторном виде и умножив его скалярно на $\mathbf{v}_0$, получим

$$\mathbf{v}_0\frac{d\mathbf{n}}{dt} = [(\mathbf{v}_0\mathbf{n})\,\mathbf{n} - \mathbf{v}_0]\quad \operatorname{grad} a_0 + (\mathbf{v}_0\mathbf{n})\,[\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{v}_0] - \mathbf{n}\,(\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_0$$

Воспользуемся этим соотношением и преобразуем в уравнении (1.6) коэффициент при свободном члене

$$\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{v}_0 + (m_0 - 1)\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = (a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\operatorname{grad}\,\ln\frac{a_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{n}}{a_0}$$

Теперь основное уравнение геометрической акустики приобретает вид

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\,e = 0, \qquad e = (a_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{n})\frac{p'^2}{\rho_0 a_0^3} \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.8) выражает закон сохранения энергии при распространении коротких волн малой амплитуды в движущихся средах. Оно показывает, что зависимость (1.5) между величинами e и $\mathbf{q}$ действительно имеет место. Указанное обстоятельство обусловлено тем фактом, что при прохождении короткого звукового импульса через данную точку пространства поток энергии через единичную площадку, расположенную в этой точке перпендикулярно к направлению лучевой скорости $a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0$, полностью определяется величиной переносимой вместе с волной энергии. Отметим, что значение плотности энергии e звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах, отличается на множитель $(a_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{n}) / a_0$ от значения плотности энергии волн, проходящих сквозь неподвижную однородную [22, 23] или неоднородную [18] среду. Когда $\mathbf{v}_0 = 0$, то

$$(a_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{n}) / a_0 = 1.$$

Уравнение, аналогичное (1.8), получено Д. И. Блохинцевым [23] при изучении звуковых колебаний, параметры которых даются произведениями вида $A \exp(i\psi)$. Здесь A является медленно меняющейся функцией координат и времени, а фаза волны $\psi(t, x_i)$ есть «почти линейная» функция.

Интегрирование уравнения (1.8) дает

$$e = e_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\, dt\right] \tag{1.9}$$

Здесь e_0 означает плотность звуковой энергии в начальный момент времени $t = t_0$.

Рассмотрим элементарную лучевую трубку, т. е. трубку с малой площадью поперечного сечения, образующими которой служат лучи. В том случае, когда $\mathbf{v}_0 \neq 0$, направление нормали $\mathbf{n}$ к фронту волны не совпадает с направлением луча. Обозначим через $u_0 = \sqrt{(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)^2}$ величину лучевой скорости, с которой волна перемещается в пространстве. Ее проекция u_{0n} на нормаль $\mathbf{n}$ будет $u_{0n} = a_0 + \mathbf{v}_0\mathbf{n}$. Площадь f элемента фронта звукового импульса, заключенного внутри лучевой трубки, связана с площадью σ ее поперечного сечения равенством

$$f = \frac{u_0}{u_{0n}}\sigma \tag{1.10}$$

Используя последнее соотношение, легко показать, что

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\, dt\right] = \frac{u_{0n}}{u_{00n}}\frac{f}{f_0}$$

Здесь u_{00n} и f_0 означают соответственно проекцию лучевой скорости на нормаль и площадь фронта рассматриваемого элементарного импульса в начальный момент времени $t = t_0$. В том случае, когда $\mathbf{v}_0 = 0$ во всем пространстве, отсюда имеем [21]

$$f = f_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_0 \operatorname{div}\mathbf{n}\, dt\right)$$

Равенство (1.9) приобретает теперь вид

$$e = e_0 \frac{u_{00n} f_0}{u_{0n} f} \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) справедливо для всего поля возмущенного течения, в том числе и для рассматриваемого в акустическом приближении ударного фронта. Оно определяет изменение интенсивности звука вдоль пути элемента волны. Пусть p_0', a_{00} и ρ_{00} означают соответственно избыточное давление, равновесную скорость звука и равновесную плотность в начальный момент времени $t = t_0$. Из формулы (1.11) следует закон изменения амплитуды звуковой волны

$$p' = p_0' \frac{a_0 u_{00n}}{a_{00} u_{0n}} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 f_0}{\rho_{00} a_{00} f}} \tag{1.12}$$

Если проинтегрировать уравнение (1.6) вдоль луча, то выражение для величины p' можно представить в следующем виде (из иных соображений оно получено Келлером [21])

$$p' = p_0' \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \frac{1}{L}, \qquad L = \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}[a_0 \operatorname{div}\mathbf{n} + k_0 \operatorname{div}\mathbf{v}_0 + \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{v}_0]dt\right\}$$

$$(k_0 = 2m_0 - 1) \tag{1.13}$$

Сравнение равенств (1.12) и (1.13) дает

$$L = \frac{a_{00} u_{0n}}{a_0 u_{00n}} \sqrt{\frac{f}{f_0}}$$

Приведем иной вывод формулы (1.12). Для этого рассмотрим движение звукового импульса вдоль элементарной лучевой трубки, причем будем считать, что длина трубки достаточно велика и волна во время движения не пересекает ее торцовых сечений σ_1 и σ_2. Примем, что все избыточные величины в звуковом импульсе с ударным фронтом имеют треугольные профили. Хотя это предположение и не существенно, оно позволяет упростить последующие вычисления.

Проинтегрируем уравнение (1.8) по фиксированному объему V_0, ограниченному поверхностью рассматриваемой лучевой трубки и ее торцовыми сечениями σ_1 и σ_2. Так как объем V_0 не меняется со временем, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} e dV = 0$$

Учитывая формулу (1.10) и сделанные выше предположения о характере распределения параметров газа в зоне возмущенного движения, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda f u_{0n} p'^2}{\rho_0 a_0^3} = 0 \tag{1.14}$$

Здесь λ означает длину волны в приближении геометрической акустики, а p' — избыточное давление на ударном фронте.

Величина

$$E = \frac{1}{3}\frac{\lambda f u_{0n} p'^2}{\rho_0 a_0^3}$$

есть полная энергия элементарного звукового импульса, заключенного внутри лучевой трубки с площадью поперечного сечения σ. Написанное уравнение показывает, таким образом, что полная энергия каждого элементарного импульса в указанном приближении остается постоянной. Аналогичный вывод содержится в работе [18] для волн, распространяющихся в покоящейся среде.

Заметим, что длина волны λ в акустическом приближении равна [9]

$$\lambda = \lambda_0 \frac{u_{0n}}{u_{00n}} \tag{1.15}$$

Интегрирование уравнения (1.14) с учетом последнего соотношения приводит к формуле (1.12).

Рассмотрим теперь движение ударных волн малой амплитуды в следующем за геометрической акустикой приближении. В этом приближении скорость ударного фронта отлична от скорости распространения звуковых волн, а его амплитуда затухает по иному закону, чем (1.12) или (1.13). Я. Б. Зельдович заметил [16], что затухание плоских ударных волн в прямых трубках целиком определяется диссипацией энергии, происходящей при ударных сжатиях. В работе [18] установлено, что законы затухания ударных волн любой формы, которые распространяются в неоднородных покоящихся средах, также непосредственно связаны с необратимо превращенной в тепло величиной звуковой энергии. Покажем, что этот факт является общим, а именно — нелинейные законы затухания ударных волн в произвольных движущихся средах объясняются тем, что при ударных переходах происходит диссипация энергии.

§ 2. Диссипация энергии на ударном фронте. Для упрощения вычислений будем считать по-прежнему, что избыточные величины в звуковом импульсе, ограниченном ударным фронтом, имеют треугольные профили. Пусть p_*' означает амплитуду ударной волны, а λ_* — длину импульса в следующем за геометрической акустикой приближении. Используя полученные результаты, можно показать, что амплитуда ударной волны p_*' определяется формулой [8-10]

$$p_*' = p'_0 \sqrt{\frac{\rho_0 a_0^3 f_0}{\rho_{00} a_{00}^3 f}} \frac{u_{00n}}{u_{0n}} \left(1 + \frac{p'_0 u_{00n}^2 \sqrt{f_0}}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0 \sqrt{a_0}\, dl}{u_0 u_{0n}^2 \sqrt{\rho_0 f}}\right)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Здесь dl — элемент длины луча, равный $u_0 dt$. Длина волны λ_* изменяется согласно равенству [9, 10]

$$\lambda_* = \lambda_0 \frac{u_{0n}}{u_{00n}} \left(1 + \frac{p'_0 u_{00n}^2 \sqrt{f_0}}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0 \sqrt{a_0}\, dl}{u_0 u_{0n}^2 \sqrt{\rho_0 f}}\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

Вычислим изменение в единицу времени полной энергии элементарного звукового импульса, заключенного внутри лучевой трубки с площадью поперечного сечения σ. Площадь f ударного фронта, ограниченного этой трубкой, связана с σ формулой (1.10), поэтому полная энергия E_* звукового импульса с треугольным профилем избыточного давления в соответствии с результатами предыдущего параграфа равна

$$E_* = \frac{1}{3} \frac{\lambda_* f u_{0n} p'^2_*}{\rho_0 a_0^3}$$

Согласно соотношениям (2.1) и (2.2) написанное выражение можно преобразовать к виду

$$E_* = \frac{1}{3} \frac{p'^2_0 \lambda_0 f_0 u_{00n}}{\rho_{00} a_{00}^3} \left(1 + \frac{p_0' u_{00n}^2 \sqrt{f_0}}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0 \sqrt{a_0}\, dl}{u_0 u_{0n}^2 \sqrt{\rho_0 f}}\right)^{-1/2}$$

Изменение энергии рассматриваемого импульса определяется производной dE_* / dt, значение которой легко вычислить, используя равенство (2.1). Окончательно имеем

$$\frac{dE_*}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{m_0 u_{0n}}{\rho_0^2 a_0^4} f p'^3_* \tag{2.3}$$

Покажем, что найденное изменение энергии элементарного звукового импульса пропорционально величине ее диссипации при ударном сжатии. Значение этой диссипации, вызванной вязкостью и теплопроводностью, можно вычислить в рамках идеальной жидкости по тому изменению энтропии s'_*, которое происходит на ударном фронте. Величина s'_* есть величина третьего порядка малости относительно избыточного давления p'_*, она определяется формулой

$$s'_* = \frac{1}{6}\frac{m_0}{\rho_0^3 a_0^4 T_0} p'^3_*$$

Используя написанное соотношение, найдем энергию, которая в единицу времени рассеивается в виде тепла на элементе ударного фронта с площадью f. Пусть Q_* означает диссипированную энергию. Ее изменение в единицу времени дается, очевидно, равенством

$$\frac{dQ_*}{dt} = \frac{1}{6}\frac{m_0}{\rho_0^2 a_0^3} f p'^3_* \tag{2.4}$$

которое совпадает с точностью до множителя u_{0n} / a_0 со взятым с обратным знаком выражением, находящимся в правой части уравнения (2.3). Как уже отмечалось выше, на этот множитель различаются значения плотности энергии e звуковых волн, распространяющихся в покоящихся и движущихся средах; в то же время формула (2.4) для dQ_* / dt сохраняет всегда одинаковый вид. Действительно, в выражение для потока массы вещества через ударный фронт входит нормальная составляющая вектора скорости частиц в системе координат, движущейся вместе с поверхностью разрыва. Для слабых ударных волн эта компонента скорости совпадает в первом приближении со скоростью звука a_0. Когда $\mathrm{v}_0 = 0$, то

$$dE_* / dt = - dQ_* / dt$$

Обратим теперь наши рассуждения с тем, чтобы непосредственно, минуя вычисление избыточного давления p'_* в приближении геометрической акустики, найти законы затухания ударных волн малой амплитуды, движущихся в неоднородной среде. Изменение энергии элементарного звукового импульса длины λ_*, заключенного внутри лучевой трубки с площадью поперечного сечения σ и имеющего на фронте избыточное давление p'_*, определяется на основании изложенного выше уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_* u_{0n} f}{\rho_0 a_0^3} p'^2_*\right) = -\frac{1}{2}\frac{m_0 u_{0n}}{\rho_0^2 a_0^4} f p'^3_* \tag{2.5}$$

Входящая сюда величина λ_* удовлетворяет соотношению [10]

$$\frac{d\lambda_*}{dt} = \frac{\lambda_*}{u_{0n}}\frac{du_{0n}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{m_0}{\rho_0 a_0} p'_* \tag{2.6}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6) должна быть проинтегрирована при начальных условиях

$$p'_* = p'_0, \qquad \lambda_* = \lambda_0 \quad \text{при } t = t_0 \tag{2.7}$$

Решение системы уравнений (2.5) и (2.6), удовлетворяющее условиям (2.7), может быть получено элементарным путем. Разделим первое из этих уравнений на величину $\lambda_* f u_{0n} p'^2_* / (\rho_0 a_0^3)$, а второе — на λ_*. Сложив полученные выражения, находим

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{f u_{0n} \lambda_*^2 p'^2_*}{\rho_0 a_0^3} = \frac{d}{dt}\ln u_{0n}$$

Интегрирование последнего уравнения с учетом начальных условий дает

$$\lambda_* p'_* = \lambda_0 p'_0 \sqrt{\frac{\rho_0 a_0^3 f_0}{\rho_{00} a_{00}^3 f}} \tag{2.8}$$

Написанное равенство выражает закон изменения импульса $J_* = \frac{1}{2}\lambda_* f p'_* / u_{0n}$ элемента положительной фазы волны при ее движении вдоль лучевой трубки.

Умножим теперь уравнение (2.6) на λ_*, причем вместо произведения $\lambda_* p'_*$ подставим найденное выражение (2.8). В результате приходим к линейному относительно λ_*^2 уравнению

$$\frac{d\lambda_*^2}{dt} = \frac{2\lambda_*^2}{u_{0n}}\frac{du_{0n}}{dt} + \frac{m_0 \lambda_0 p'_0 \sqrt{a_0 f_0}}{\sqrt{\rho_{00} a_{00}^3 \rho_0 f}}$$

Учитывая начальные условия, получим в качестве решения последнего уравнения формулу (2.2), определяющую длину волны λ_*. Избыточное давление на ударном фронте p'_* находится при помощи (2.8) в виде (2.1).

§ 3. Стационарные течения. Как показано в работе [14], полученные выше результаты для нестационарных ударных волн, распространяющихся в неоднородных средах, нельзя непосредственно применять для расчета стационарных сверхзвуковых движений газа. Для стационарных сверхзвуковых течений, которые по определению характеризуются условием $\partial / \partial t = 0$, имеем

$$a_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{n} = 0 \tag{3.1}$$

В этом случае лучи целиком лежат на характеристических поверхностях $\varphi(x_i) = 0$, в то время как при нестационарных процессах распространения волн лучи в пространстве x_i пересекают их фронты $\varphi(t, x_i) = 0$, нигде не касаясь этих поверхностей.

Обозначим через $\mathbf{n}_0$ единичный вектор нормали к характеристической поверхности, несущей нулевое значение избыточного давления. Уравнение, определяющее изменение ширины возмущенной области, которую по аналогии с нестационарными движениями будем называть также длиной волны и обозначать буквой λ, в рамках геометрической акустики имеет вид [14]

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda (\mathbf{n}_0 \nabla)(a_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{n}) \tag{3.2}$$

Значение лучевой скорости u_0 для установившихся течений будет $\sqrt{v_0^2 - a_0^2}$, поэтому в уравнении (3.2) время t связано с длиной луча l соотношением $dl = \sqrt{v_0^2 - a_0^2}\,dt$. Заметим, что решение этого уравнения, вообще говоря, нельзя представить формулой (1.15), определяющей длину волны в нестационарных процессах. Равенство (1.12), согласно которому в нестационарных процессах изменяется амплитуда звуковой волны, также нельзя непосредственно использовать для расчета установившихся сверхзвуковых течений. Действительно, в соответствии с формулой (3.1) обе величины u_{0n} и u_{00n} обращаются в рассматриваемом случае в нуль и равенство (1.12) теряет смысл.

Чтобы получить закон изменения избыточного давления p' вдоль скачков уплотнения вдали от обтекаемых стационарным сверхзвуковым потоком тел, обратимся снова к исходному уравнению (1.6). Используя соотношение (3.2), преобразуем его к виду

$$\operatorname{div}(a_0\mathbf{n} + \mathbf{v}_0)\, e = 0, \qquad e = \frac{a_{00}\lambda p'^2}{\lambda_0\rho_0 a_0{}^3} \tag{3.3}$$

Здесь e означает по-прежнему плотность звуковой энергии. Отметим, что с точностью до постоянного множителя a_{00} / u_{00n} плотность энергии $u_{0n}p'^2 / (\rho_0 a_0{}^3)$ нестационарных звуковых волн может быть представлена при помощи формулы (1.15) в таком же виде. От плотности энергии волн, распространяющихся в неподвижной среде, выражение для плотности энергии в рассматриваемом случае отличается на множитель $\lambda a_{00} / \lambda_0 a_0$.

Интегрирование уравнения (3.3) приводит к формуле (1.9), откуда следует закон изменения амплитуды волны p' в акустическом приближении

$$p' = p'_0 \frac{a_0}{a_{00}} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 u_{00}\lambda_0\sigma_0}{\rho_{00} a_{00} u_0 \lambda\sigma}} \tag{3.4}$$

Здесь, как и прежде, σ означает площадь поперечного сечения элементарной лучевой трубки.

Как и в случае нестационарных волновых движений, в дальнейшем для простоты будем считать, что все избыточные величины в возмущенной области, ограниченной ударным фронтом, имеют треугольные профили. Через p' будем ниже обозначать избыточное давление на скачке уплотнения. Возьмем теперь на характеристической поверхности, несущей невозмущенные значения параметров газа, произвольную точку, которую примем за начальную для проходящего через нее луча. Через выбранную точку проведем плоскость, перпендикулярную к направлению луча, и в этой плоскости построим малый замкнутый контур, состоящий из линий ее пересечения со скачком уплотнения и характеристической поверхностью, где $p' = 0$, а также из двух соседних нормалей к указанной поверхности. Рассмотрим лучевую трубку, образующие которой проходят через стороны прямоугольника, составляющие построенный нами контур. Очевидно, что поперечное сечение такой трубки в любом месте имеет форму параллелограмма; его площадь можно отождествить с величиной σ в формуле (3.4), так как ширина возмущенной области считается малой по сравнению с главными радиусами кривизны ударного фронта и расстоянием, на котором существенно меняются параметры основного потока. Проведем теперь на характеристической поверхности, несущей нулевое значение p', малый прямоугольник, одной из сторон которого служит сторона рассматривавшегося ранее замкнутого контура. Прямоугольный цилиндр с образующими, параллельными нормали к характеристической поверхности, ограничивает в рассматриваемой лучевой трубке некоторый элемент волны. Этот элемент как целое сносится вдоль луча в первом приближении со скоростью u_0, причем, деформируясь, он приобретает форму параллелепипеда. Размеры параллелепипеда в направлении луча изменяются пропорционально лучевой скорости u_0.

Если через f, как и прежде, обозначить площадь фронта элемента волны, то легко видеть, что имеет место равенство

$$\frac{u_0\sigma}{\lambda f} = \frac{u_{00}\sigma_0}{\lambda_0 f_0}$$

Используя его, формуле (3.4) можно придать вид

$$p' = p'_0 \frac{a_0 \lambda_0}{a_{00} \lambda} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 f_0}{\rho_{00} a_{00} f}} \tag{3.5}$$

Отметим, что при помощи формулы (1.15) выражение (1.12) преобразуется к такому же виду.

Покажем, что вид формулы (3.5) не связан с формой выбранного элемента волны. Действительно, рассмотрим элемент волны, ограниченный произвольной цилиндрической поверхностью с образующими, первоначально параллельными нормали к характеристической поверхности, несущей невозмущенные значения параметров газа. Проинтегрируем уравнение (3.3) по объему рассматриваемого элемента, который непрерывно деформируется при движении вдоль лучевой трубки. Учитывая сделанные выше предположения о характере распределения параметров среды в возмущенной области течения, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{a_{00} f \lambda^2 p'^2}{\lambda_0 \rho_0 a_0^3} = 0$$

Интегрирование полученного уравнения, которое аналогично уравнению (1.14), приводит к формуле (3.5).

Это показывает, таким образом, что и в случае стационарных движений газа лучевые трубки являются каналами передачи энергии в зоне возмущенного течения.

Множитель L, фигурирующий в равенстве Келлера (1.13), принимает вид

$$L = \frac{a_{00}}{a_0} \sqrt{\frac{\lambda u_0 \sigma}{\lambda_0 u_{00} \sigma_0}} = \frac{a_{00} \lambda}{a_0 \lambda_0} \sqrt{\frac{f}{f_0}}$$

Перейдем теперь к изучению законов затухания скачков уплотнения вдали от обтекаемых стационарным сверхзвуковым потоком тел в следующем за геометрической акустикой приближении.

Используя полученные результаты, имеем [14]

$$p'_* = p'_0 \frac{a_0 \lambda_0}{a_{00} \lambda} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 f_0}{\rho_0 a_{00} f_{00}}} \left(1 + \frac{p'_0 \lambda_0 \sqrt{f_0}}{\sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0 \sqrt{a_0} dl}{u_0 \lambda^2 \sqrt{\rho_0 f}}\right)^{-1/2} \tag{3.6}$$

$$\lambda_* = \lambda \left(1 + \frac{p'_0 \lambda_0 \sqrt{f_0}}{\sqrt{\rho_{00} a_{00}^3}} \int_{l_0}^{l} \frac{m_0 \sqrt{a_0} dl}{u_0 \lambda^2 \sqrt{\rho_0 f}}\right)^{1/2} \tag{3.7}$$

Здесь, как и в предыдущих параграфах, звездочкой отмечены значения параметров газа в следующем за акустикой приближении, λ означает длину волны в линейной теории, а $dl = u_0 dt$.

Полная энергия E_* элемента волны с треугольным профилем избыточного давления равна

$$E_* = \frac{1}{3} \frac{\lambda a_{00}}{\lambda_0} \frac{\lambda_* f p'^2_*}{\rho_0 a_0^3}$$

В соответствии с формулами (3.6) и (3.7) преобразуем написанное соотношение к виду

$$E_* = \frac{1}{3}\frac{p'_0{}^2\lambda_0 f_0}{\rho_{00}a_{00}^2}\left(1 + \frac{p'_0\lambda_0\sqrt{f_0}}{\sqrt{\rho_{00}a_{00}^3}}\int_{l_*}^{l}\frac{m_0\sqrt{a_0}dl}{u_0\lambda^2\sqrt{\rho_0 f}}\right)^{-1/2}$$

Изменение энергии в единицу времени рассматриваемого элемента волны дается производной

$$\frac{dE_*}{dt} = -\frac{1}{6}\frac{a_{00}\lambda m_0 f}{\lambda_0\rho_0{}^2a_0{}^4}p'_*{}^3 \tag{3.8}$$

Полученное выражение, взятое с обратным знаком, совпадает с точностью до множителя $\lambda a_{00} / \lambda_0 a_0$ со значением (2.4) производной dQ_* / dt, которая определяет диссипацию энергии на ударном фронте с площадью f. Как отмечалось выше, на этот множитель значение плотности энергии в стационарных потоках отличается от соответствующей величины, относящейся к проходящим сквозь неподвижную среду звуковым волнам. Когда набегающий поток однороден, то $\lambda a_{00} / \lambda_0 a_0 = 1$.

Обращая ход рассуждений тем же путем, что и в предыдущем параграфе, можно получить законы затухания скачков уплотнения вдали от обтекаемых тел без вычисления p' в приближении геометрической акустики. Подробно останавливаться на соответствующих выкладках мы не будем.

Рассмотрим в заключение обтекание тела сверхзвуковым потоком с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, остальные параметры которого зависят от координаты x_3, отсчитываемой вдоль одной из перпендикулярных к $\mathbf{v}_0$ осей. Такой случай может встретиться, например, когда тело движется в покоящейся атмосфере параллельно плоскости Земли, а плотность, давление и температура воздуха зависят только от высоты. Все явление в целом проще описать в системе координат, движущейся с телом, где течение стационарно, но при вычислении длины волны λ в приближении геометрической акустики удобней перейти к неподвижным координатам, связанным с Землей. Тогда λ дается формулой (1.15)

$$\lambda = \lambda_0\frac{u_{0n}(x_3)}{u_{00n}} \tag{3.9}$$

а не более сложным решением уравнения (3.2). Конечно, одно выражение для λ можно привести к другому, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. В данном случае уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{a_0}(a_0\mathbf{n}\nabla)a_0$$

Но оператор $(a_0\mathbf{n}\ \nabla)$, как указано в § 1, есть полная производная вдоль луча в системе координат, связанной с Землей.

Понимая теперь под d / dt производную в этой системе координат, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{a_0}\frac{da_0}{dt}$$

Отсюда и следует формула (3.9).

Формулу (1.15) для λ можно использовать всегда, если только переход к системе координат, в которой тело движется, не нарушает стационарности исходного потока. Однако доказательство, что эта формула дает решение уравнения (3.2), в общем случае является весьма сложным. Не приводя соответствующих рассуждений, укажем, что они существенно опираются на свойства уравнений бихарактеристик (1.7).

Авторы признательны Г. И. Баренблатту за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

Поступила 27 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Crussard L. Sur la propagation et l'altè'ration des ondes de chok. Compt. Rend., 1913, t. 156, № 8.
2. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
3. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., ГИТТЛ, 1954.
5. Whitham G. B. The propagation of spherical blast. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1950, vol. 203, № 1075.
6. Whitham G. B. The Propagation of Weak Spherical Shocks in Stars. Comm. Pure Appl. Mathem., 1953, vol. VI, № 3.
7. Otterman J. Finite-Amplitude Propagation Effect on Shock-Wave Travel Times from Explosions at High Altitudes. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, vol. 31, № 4.
8. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
9. Полянский О. Ю. О затухании ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
10. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
11. Whitham G. B. The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1950, vol. 201, № 1064.
12. Whitham G. B. The Flow Pattern of a Supersonic Projectile. Comm. Pure Appl. Mathem., 1952, vol. 5, № 3.
13. Riley N. Interaction of a shock wave with a mixing region. J. fluid mechan., 1960, vol. 7, part 3.
14. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в стационарных течениях. ПМТФ, 1961, № 6.
15. Friedrichs K. O. Formation and Decay of Shock Waves. Comm. Pure Appl. Mathem., 1948, vol. 1, № 3.
16. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. М.— Л., АН СССР, 1946.
17. DuMond J. W. H., Cohen E. K., Panofsky W. K. H., Deeds E. A Determination of the Wave Forms and Laws of Propagation and Dissipation of Ballistic Shock Waves. J. Acoust. Soc. Amer., 1946, vol. 18, № 1.
18. Рыжов О. С. Об энергии звуковых волн. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
19. Lighthill M. J. The Energy Distribution behind Decaying Shocks.— I. Plane Waves. Phil. Mag., 1950, ser. 7, vol. 41, № 322.
20. Phythian J. E. The Energy Distribution behind a Decaying Two-Dimensional Shock. Quart. J. Mechan. Appl. Mathem., 1952, vol. V, part 3.
21. Keller J. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, № 8.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
23. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.— Л., ГИТТЛ, 1946.