Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОГРЕССИВНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

В. М. Багин

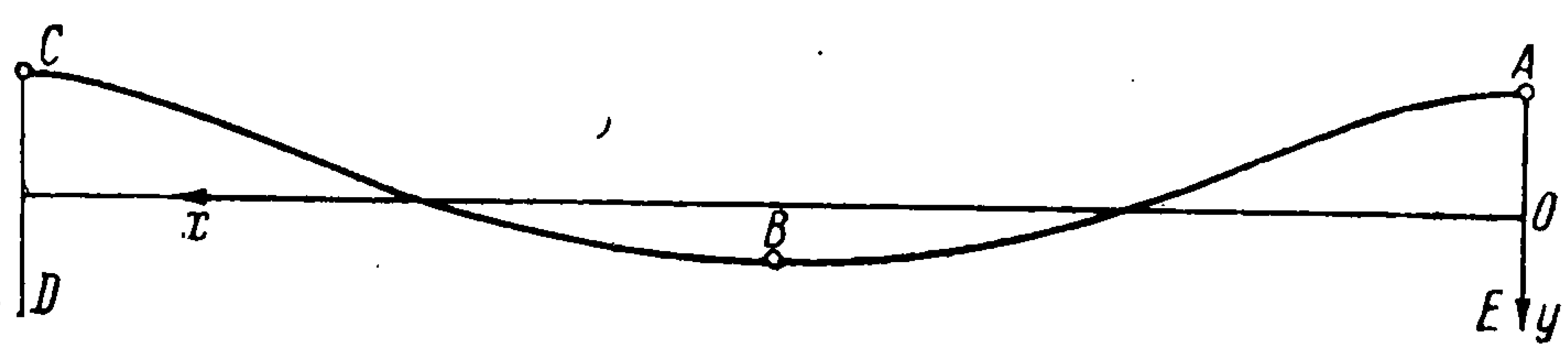
(Москва)

В теории установившихся прогрессивных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины известны различные способы использования граничного условия на профиле волны. Один из них, предложенный Дэвисом [1], заключается в преобразовании этого условия к мнимой части комплексного дифференциального уравнения. Недостаток метода Дэвиса состоит в том, что условие, выраженное в форме Леви-Чивита, используется не точно, а заменяется близким к нему условием. В предлагаемой статье дается метод сведения точного граничного условия к комплексному дифференциальному уравнению, которое позволяет исследовать волны до форм, близких к предельным.

1. Рассмотрим движение жидкости в системе координат $x0y$, неподвижной относительно профиля волны (фиг. 1). Для потенциала скорости и функции тока имеем следующие граничные условия:

$$\varphi = c\lambda, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \infty \quad \text{на } CD, \qquad \varphi = 0, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \infty \quad \text{на } AE$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda, \quad \psi = \infty \quad \text{на } DE, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda, \quad \psi = 0 \quad \text{на } AC \tag{1.1}$$

Отобразим рассматриваемую область в плоскости комплексного потен-



Фиг. 1

циала скоростей w на круг единичного радиуса во вспомогательной плоскости u при помощи функции

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.2}$$

Граничные условия для комплексно сопряженной скорости будут:

$$\operatorname{Im} \bar{v} = 0 \quad \text{на } CD, \qquad \operatorname{Im} \bar{v} = 0 \quad \text{на } AE, \qquad \bar{v} = c \quad \text{на } DE \tag{1.3}$$

Для модуля скорости q на AC имеем уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2} q^2 - gy = C \tag{1.4}$$

где C — постоянная. Дифференцируя по дуге профиля s и замечая, что

$$ds = \frac{d\varphi}{q}, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

получим

$$q^2 \frac{dq}{d\varphi} - g \sin\theta = 0 \tag{1.5}$$

где θ — угол наклона касательной профиля волны к оси $0x$.

2. Введем функцию

$$\zeta = \tau + i\theta = \ln \frac{c}{v} \tag{2.1}$$

где c — скорость распространения волны. Учитывая (1.3) и (1.5), для функции ζ получим следующие граничные условия:

$$\operatorname{Im} \zeta = 0 \quad \text{на } CD, \quad \operatorname{Im} \zeta = 0 \quad \text{на } AE, \quad \zeta = 0 \quad \text{на } DE \tag{2.2}$$

$$\frac{c^3}{g} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + e^{3\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{на} \quad AC \tag{2.3}$$

Разложим функции $e^{3\tau}$ и $\sin \theta$ в степенные ряды и перемножим их, отбрасывая члены выше пятой степени и группируя, получим

$$e^{3\tau} \sin \theta = \theta + \tfrac{3}{2} (2\tau\theta) + \tfrac{1}{6} (3\tau^2\theta - \theta^3) + \tfrac{1}{8} (4\tau^3\theta - 4\tau\theta^3) +$$
$$+ \tfrac{1}{120} (5\tau^4\theta - 10\tau^2\theta^3 + \theta^5) + 4\tau^2\theta + 4\tau^3\theta + \tfrac{10}{3} \tau^4\theta - \tfrac{2}{3} \tau^2\theta^3 \tag{2.4}$$

Выпишем мнимые части пяти степеней ζ

$$\operatorname{Im} \zeta = \theta, \quad \operatorname{Im} \zeta^2 = 2\tau\theta, \quad \operatorname{Im} \zeta^3 = 3\tau^2\theta - \theta^3$$
$$\operatorname{Im} \zeta^4 = 4\tau^3\theta - 4\tau\theta^3, \quad \operatorname{Im} \zeta^5 = 5\tau^4\theta - 10\tau^2\theta^3 + \theta^5 \tag{2.5}$$

Первые пять членов в правой части (2.4) можно представить как

$$\operatorname{Im} \left(\zeta + \tfrac{3}{2} \zeta^2 + \tfrac{1}{6} \zeta^3 + \tfrac{1}{8} \zeta^4 + \tfrac{1}{120} \zeta^5\right) \tag{2.6}$$

Остальные члены нельзя представить как мнимые части целых степеней ζ. Однако, как будет показано ниже, их можно представить как мнимую часть степенного ряда $F(\chi)$ от функции

$$\chi = \xi + i\eta = \frac{au}{1 - \mu au} \tag{2.7}$$

являющейся решением дифференциального уравнения

$$-u \frac{d\chi}{du} + \chi + \mu\chi^2 = 0 \tag{2.8}$$

где a и μ — некоторые действительные положительные постоянные.

Согласно (2.4) на DE должно быть $\operatorname{Im} F(\chi) = 0$. Не нарушая общности, положим $F(\chi) = 0$ на DE. Тогда, записав $\partial\tau / \partial\varphi$ в виде $\operatorname{Im} i\, d\zeta / dw$ условие (2.3) можно представить в виде

$$\operatorname{Im} \left[i \frac{c^3}{g} \frac{d\zeta}{dw} + \zeta + \tfrac{3}{2} \zeta^2 + \tfrac{1}{6} \zeta^3 + \tfrac{1}{8} \zeta^4 + \tfrac{1}{120} \zeta^5 + F(\chi)\right] = 0 \tag{2.9}$$

3. Функция (2.7) при $a\mu < 1$ отображает круг единичного радиуса в плоскости u на круг радиуса R в плоскости χ, смещенной относительно начала координат (фиг. 2) на величину e. Согласно (1.2) и (2.8) имеем

$$dw = \frac{\lambda c}{2\pi i} \frac{d\chi}{\chi + \mu\chi^2} \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.9), получим условие на контуре круга в плоскости χ

$$\operatorname{Im} \left[-\frac{2\pi c^2}{\lambda g} (\chi + \mu\chi^2) \frac{d\zeta}{d\chi} + \zeta + \tfrac{3}{2} \zeta^2 + \tfrac{1}{6} \zeta^3 + \tfrac{1}{8} \zeta^4 + \tfrac{1}{120} \zeta^5 + F(\chi)\right] = 0 \tag{3.2}$$

Из условия периодичности движения жидкости вдоль оси $0x$ функция ζ принимает одинаковые значения на обоих берегах разреза, взятого по отрезку действительной оси, лежащему внутри круга плоскости χ. Поэтому ее можно аналитически продолжить через эту ось. Тогда функция ζ будет голоморфной внутри круга.

Функция, стоящая в квадратных скобках в условии (3.2), также будет голоморфной внутри круга плоскости χ и имеет мнимую часть, равную нулю, на контуре круга. Поэтому ее можно аналитически продолжить на внешнюю часть круга, и в точках, симметричных внутренним точкам круга относительно контура круга, она будет принимать комплексно сопряженные значения. Так как эта функция голоморфна внутри круга, то после аналитического продолжения она будет голоморфной на всей плоскости χ. По теореме Лиувилля такая функция равна постоянной. Эту постоянную следует положить равной нулю, если учесть, что $F(\chi)=0$, $\zeta=0$ и $d\zeta/d\chi=0$ при $\chi = 0$. Таким образом, в плоскости χ получим уравнение

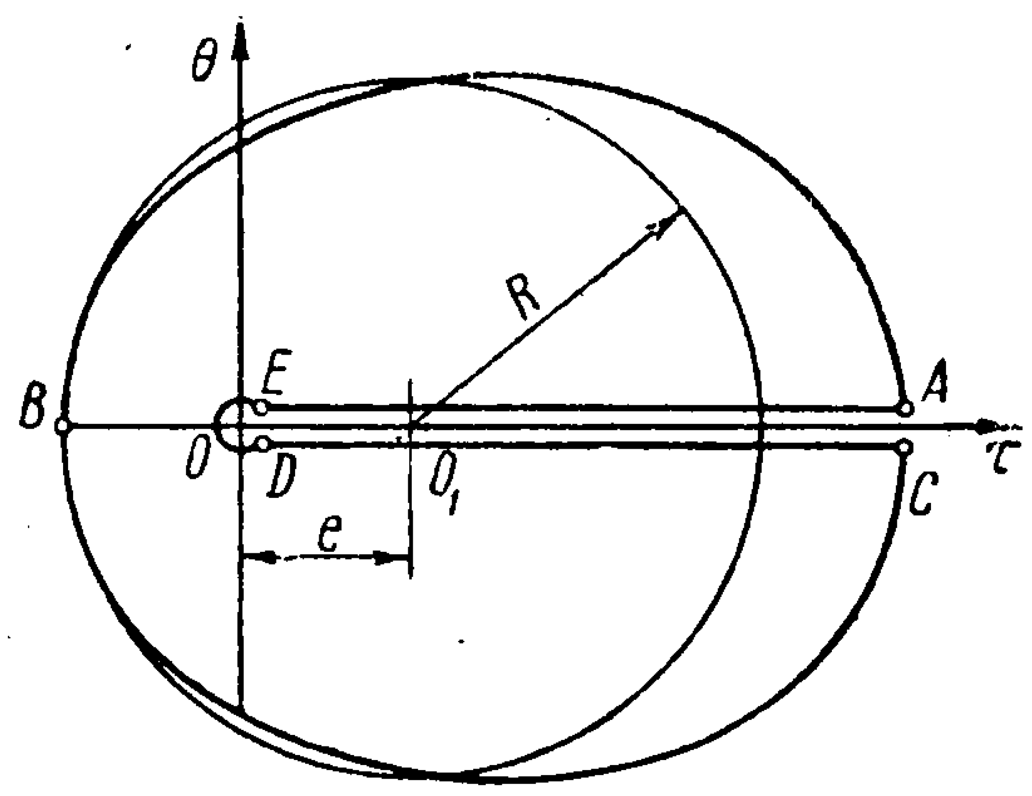


Рис. 2

$$-\frac{2\pi c^2}{\lambda g}(\chi+\mu\chi^2)\frac{d\zeta}{d\chi}+\zeta+\tfrac{3}{2}\zeta^2+\tfrac{1}{6}\zeta^3+\tfrac{1}{8}\zeta^4+\tfrac{1}{120}\zeta^5+F(\chi)=0 \qquad (3.3)$$

Дифференциальное уравнение (3.3) можно проинтегрировать, представив функцию ζ в виде ряда

$$\zeta = \chi + d_3\chi^3 + d_4\chi^4 + d_5\chi^5 + \ldots \qquad (3.4)$$

который согласно (2.7) удовлетворяет граничным условиям (2.2). Равенство $d_2 = 0$ получаем соответствующим выбором коэффициента μ.

Отделим в (3.4) действительные и мнимые части

$$\tau = \xi + d_3(\xi^3 - 3\xi\eta^2) + \ldots, \qquad \theta = \eta + d_3(3\xi^2\eta - \eta^3) + \ldots \qquad (3.5)$$

Отсюда, отбрасывая члены, выше пятой степени, найдем

$$\tau^2\theta = \xi^2\eta + 5d_3\xi^4\eta - 7d_3\xi^2\eta^3$$

$$\tau^3\theta = \xi^3\eta, \qquad \tau^4\theta = \xi^4\eta, \qquad \tau^2\theta^3 = \xi^2\eta^3 \qquad (3.6)$$

$$4\tau^2\theta + 4\tau^3\theta + \tfrac{10}{3}\tau^4\theta - \tfrac{2}{3}\tau^2\theta^3 =$$

$$= 4\xi^2\eta + 4\xi^3\eta + \left(\tfrac{10}{3} + 20d_3\right)\xi^4\eta - \left(\tfrac{2}{3} + 28d_3\right)\xi^2\eta^3 \qquad (3.7)$$

4. Чтобы представить правую часть равенства (3.7) как мнимую часть степенного ряда от χ, определим по формуле (2.7) величины R и e и напишем условие, связывающее функции ξ и η на контуре круга

$$(\xi - e)^2 + \eta^2 = R^2 \qquad (4.1)$$

Вводя обозначения $p = R^2 - e^2$, перепишем (4.1) в виде

$$\xi^2 = p + 2e\xi - \eta^2 \qquad (4.2)$$

Умножим равенство (4.2) на η; получим

$$\xi^2\eta = p\eta + 2e\xi\eta - \eta^3$$

Затем, используя (2.5), получим

$$4\xi^2\eta = \operatorname{Im}(p\chi + e\chi^2 + \chi^3) \tag{4.3}$$

Умножим равенство (4.2) на $\xi\eta$; получим

$$\xi^3\eta = p\xi\eta + 2e\xi^2\eta - \xi\eta^3$$

Затем, используя (2.5) и (4.3), найдем

$$4\xi^3\eta = \operatorname{Im}\left(ep\,\chi + R^2\chi^2 + e\chi^3 + \tfrac{1}{2}\chi^4\right) \tag{4.4}$$

Умножая равенство (4.2) по очереди на $\xi^2\eta$ и η^3

$$\xi^4\eta = p\xi^2\eta + 2e\xi^3\eta - \xi^2\eta^3, \quad \xi^2\eta^3 = p\xi^3 + 2e\xi\eta^3 - \eta^5$$

и учитывая (2.5), (4.3) и (4.4), получим (4.5)

$$16\xi^4\eta = \operatorname{Im}[p(2p+5e^2)\chi + e(2p+5R^2)\chi^2 + (3p+5e^2)\chi^3 + 3e\chi^4 + \chi^5$$

$$16\xi^2\eta^3 = \operatorname{Im}[p(2p+3e^2)\chi + e(2p+3R^2)\chi^2 + (p+3e^2)\chi^3 + e\chi^4 - \chi_5$$

Нетрудно видеть, что подобным образом на контуре круга можно представить произведения $\xi^n\eta^m$ любой степени.

Подставляя (4.3), (4.4) и (4.5) в (3.7), определим $F(\chi)$. Подставляя (3.4) в (3.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях χ, после несложных преобразований найдем

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}(1+K), \quad \mu = \frac{\frac{3}{2}+L}{1+K}, \quad d_3 = \frac{\frac{7}{6}+e+\frac{1}{12}(7p+11e^2)}{2-2p-e^2+3K}$$

$$d_4 = \frac{\frac{5}{8}+\frac{7}{12}e - d_3\left(\frac{3}{2}-2e+3L\right)}{3+4K}, \quad d_5 = \frac{\frac{31}{120}+\frac{7}{2}d_3 - d_4(3+4L)}{4+5K} \tag{4.6}$$

где

$$K = p\left[1 + e + \tfrac{1}{12}(4p+11e^2) - d_3(p-e^2)\right]$$

$$L = R^2 + e\left[1 + \tfrac{1}{12}(4p+11R^2) + d_3e^2\right] \tag{4.7}$$

$$\left(R = \frac{a}{1-a^2\mu^2}, \quad e = \frac{a^2\mu}{1-a^2\mu^2}, \quad p = \frac{a^2}{1-a^2\mu^2}\right)$$

Второе и третье уравнения (4.6) решаем относительно неизвестных μ и d_3 методом последовательных приближений. Сначала полагаем $\mu = {}^3/_2$ и по (4.7) вычисляем R, e и p. По ним, полагая $d_3 = 0$ и используя формулы (4.6), вычисляем новые значения μ и d_3 и повторяем процесс. По окончательно вычисленным μ и d_3 вычисляем все остальные величины.

Чтобы построить область функции ζ, положим в (3.4)

$$\chi = e + Re^{i\alpha}$$

В результате получим

$$\zeta = a_0 + a_1e^{i\alpha} + a_2e^{2i\alpha} + a_3e^{3i\alpha} + a_4e^{4i\alpha} \tag{4.8}$$

Здесь

$$a_0 = e\left[1 + e^2(d_3 + d_4e + d_5e^2)\right], \quad a_1 = R\left[1 + e^2(3d_3 + 4d_4e + 5d_5e^2)\right]$$

$$a_2 = R^2e(3d_3 + 6d_4e + 10d_5e^2), \quad a_3 = R^3(d_3 + 4d_4e + 10d_5e^2)$$

$$a_4 = R^4(d_4 + 5d_5e), \quad a_5 = R^5d_5$$

5. Из (1.2) и (2.1) имеем

$$dz = \frac{\lambda}{2\pi i}\, e^{\zeta}\, \frac{du}{u} \tag{5.1}$$

Учитывая (2.7) и (3.4) и отбрасывая члены выше пятой степени, разложим функции ζ и e^{ζ} в ряд по степеням u

$$\zeta = au + \mu a^2u^2 + (\mu^2 + d_3)a^3u^3 + (\mu^3 + 3\mu d_3 + d_4)\, a^4u^4 + {} \\ + (\mu^4 + 6\mu^2 d_3 + 4\mu d_4 + d_5)\, a^5u^5 \tag{5.2}$$

$$e^{\zeta} = b_1u + b_2u^2 + b_3u^3 + b_4u^4 + b_5u^5 \tag{5.3}$$

Здесь

$$b_1 = a, \qquad b_2 = \left(\mu + \tfrac{1}{2}\right) a^2, \qquad b_3 = \left(\mu^2 + \mu + \tfrac{1}{6} + d_3\right) a^3$$

$$b_4 = \left[\mu^3 + \tfrac{3}{2}\,\mu^2 + \left(3d_3 + \tfrac{1}{2}\right)\mu + d_3 + d_4 + \tfrac{1}{24}\right] a^4$$

$$b_5 = \left[\mu^4 + 2\mu^3 + (6d_3 + 1)\,\mu^2 + \left(4d_4 + 4d_3 + \tfrac{1}{6}\right)\mu + \tfrac{1}{2}\, d_3 + d_4 + d_5\right] a^5$$

Подставляя (5.3) в (5.1), интегрируя и отбрасывая произвольную постоянную, получим

$$z = \frac{\lambda}{2\pi i}\left[\ln u + b_1u + \tfrac{1}{2}\, b_2u^2 + \tfrac{1}{3}\, b_3u^3 + \tfrac{1}{4}\, b_4u^4 + \tfrac{1}{5}\, b_5u^5\right] \tag{5.4}$$

Полагая $u = e^{i\vartheta}$, можно найти уравнение профиля волны.

Комплексный потенциал скоростей в системе координат, неподвижной относительно жидкости на бесконечной глубине, определим по формуле

$$w_1 = w - cz \tag{5.5}$$

Подставляя в (5.5) выражения w и z из (1.2) и (5.4) и опуская индекс, получим

$$w = -\frac{\lambda c}{2\pi i}\left[b_1u + \tfrac{1}{2}\, b_2u^2 + \tfrac{1}{3}\, b_3u^3 + \tfrac{1}{4}\, b_4u^4 + \tfrac{1}{5}\, b_5u^5\right] \tag{5.6}$$

6. Полагая $w = \varphi + i\psi$ в (5.6) и плотность жидкости $\rho = 1$, вычислим количество движения в одном периоде волны по формуле

$$K = i \oint_L z\, d\varphi \tag{6.1}$$

Интегрируя (6.1) по частям и замечая, что $\varphi = 0$ на отрезках CD, DE и AE, получим

$$K = -i \oint_{L_0} \varphi\, dz, \quad \text{или} \quad K = -\tfrac{1}{2} i \oint_{L_0} (w + \overline{w})\, dz \tag{6.2}$$

где интегрирование выполним по контуру L_0 круга единичного радиуса в плоскости u. Используя формулы (5.4) и (5.6), найдем по (6.2)

$$K_y = 0, \qquad K_x = -\frac{\lambda^2 c}{2\pi}\left(b_1^2 + \tfrac{1}{2}\, b_2^2 + \tfrac{1}{3}\, b_3^2 + \tfrac{1}{4}\, b_4^2 + \tfrac{1}{5}\, b_5^2\right) \tag{6.3}$$

Вычислим кинетическую энергию одного периода волны по формуле

$$T = \tfrac{1}{2} \oint_L \varphi\, d\psi \tag{6.4}$$

Интегрируя (6.4) по частям, найдем другую формулу

$$T = -\frac{1}{2}\oint\limits_L \psi \, d\varphi \tag{6.5}$$

Складывая (6.4) и (6.5) и деля пополам, получим формулу

$$T = \operatorname{Im} \frac{1}{4}\oint\limits_L \bar{w} \, dw \tag{6.6}$$

Замечая, что $\varphi = 0$ на отрезках CD, DE и AE, окончательно получим

$$T = \operatorname{Im} \frac{1}{4}\oint\limits_{L_0} \bar{w} dw \tag{6.7}$$

где интегрирование выполним по контуру круга единичного радиуса в плоскости u. Используя (5.6), получим:

$$T = -\frac{Kc}{2} \tag{6.8}$$

Определим объем жидкости Q, переносимый одним периодом волны, и статический уровень жидкости y_0

$$Q = -\frac{K}{c}, \qquad y_0 = -\frac{Q}{\lambda} \tag{6.9}$$

Вычислим потенциальную энергию одного периода волны по формуле

$$V = \frac{1}{2} g \int\limits_0^\lambda (y - y_0)^2 \, dx \tag{6.10}$$

Используя формулу (5.4), получим

$$V = \frac{\lambda^3 g}{16\pi^2}\Big[b_1^2\left(1 + \frac{3}{2} b_2\right) + \frac{1}{4} b_2^2 (1 + b_4) + \frac{1}{9} b_3^2 + \frac{1}{16} b_4^2 + \frac{1}{25} b_5^2 + \\ + b_1\left(b_2 b_3 + \frac{2}{3} b_3 b_4 + \frac{1}{2} b_4 b_5\right) + \frac{1}{6} b_2 b_3 b_5\Big] - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\lambda} \tag{6.11}$$

Ввиду большой сложности выражений для коэффициентов ряда (3.4) не удалось доказать его сходимость. Численное решение показывает, что при $a = 0.3$, что соответствует отношению $H/\lambda = 0.116$, ряды (3.4) и (5.4) сходятся хорошо. На фиг. 1 и фиг. 2 построены вычисленные профиль волны и область функции ζ.

Поступила 18 VI 62

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория поверхностных волн. Сб. пер. под редакцией М. А. Красносельского и Н. Н. Моисеева. Изд-во иностр. лит-ры, 1959.
2. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., АН СССР, 1951.