Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОТРАЖЕНИИ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН

Л. Я. Косачевский

(Донецк)

Решается задача об отражении магнитозвуковых волн от плоской границы раздела электропроводящих жидкой и упругой сред. Получены выражения для амплитудных коэффициентов отражения и преломления. Рассматриваются поверхностные волны на свободной границе упругого полупространства. Найдена скорость этих волн в случае слабого магнитного поля.

§ 1. Магнитогидродинамические и магнитоупругие волны. Пусть жидкая и упругая электропроводящие среды находятся в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$. Для решения вопроса об отражении волн от границы раздела этих сред необходимо рассмотреть распространение возмущений в каждой из них в отдельности.

Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики в случае плоских волн с волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω сводятся к системе алгебраических уравнений [1]

$$-\omega\mathbf{h} = \mathbf{k}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + iu_0^2\eta_0 k^2\mathbf{h}$$
$$-\omega\mathbf{v} + \frac{u_0^2}{\omega}\mathbf{k}(\mathbf{kv}) = -\frac{1}{4\pi\rho_0}\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h}) \qquad (1.1)$$
$$\eta_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0 u_0^2}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, $\mathbf{h}$ — малое изменение напряженности магнитного поля в волне, ρ_0 и σ_0 — соответственно плотность и проводимость жидкой среды, u_0 — обычная скорость звука в жидкости, c — скорость света.

Плоскую границу раздела двух сред выбираем в качестве плоскости xy. Предполагая, что векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ лежат в плоскости xz, переписываем уравнения (1.1) в компонентах

$$-\omega h_x = k_z(v_x H_z - v_z H_x) + iu_0^2\eta_0 k^2 h_x$$
$$-\omega h_z = k_x(v_z H_x - v_x H_z) + iu_0^2\eta_0 k^2 h_z \qquad (1.2)$$
$$-\omega v_x + \frac{u_0^2}{\omega}k_x(\mathbf{kv}) = -\frac{H_z}{4\pi\rho_0}(k_x h_z - k_z h_x)$$
$$-\omega v_z + \frac{u_0^2}{\omega}k_z(\mathbf{kv}) = -\frac{H_x}{4\pi\rho_0}(k_z h_x - k_x h_z)$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$u^2 - (1+\psi_0)u + \psi_0(\mathbf{k}^\circ\mathbf{H}^\circ)^2 + i\omega\eta_0(u-1) = 0$$
$$u = \left(\frac{\omega}{ku_0}\right)^2, \qquad \psi_0 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0 u_0^2} \qquad (1.3)$$

Здесь u и ψ_0 — соответственно квадраты фазовой скорости и напряженности магнитного поля в безразмерной форме, $\mathbf{k}^\circ$ и $\mathbf{H}^\circ$ — орты векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$. Уравнение (1.3) при малых $\omega\eta_0$ имеет корни u_1 и u_2, соответствующие быстрой и медленной магнитозвуковым волнам. Согласно (1.2) для этих волн имеем

$$v_{\nu x} = M_\nu v_{\nu z}, \qquad M_\nu = -\frac{k_{\nu x}k_{\nu z}k_\nu^{-2} - \psi_\nu H_x H_z H^{-2}}{-u_\nu + k_{\nu x}^2 k_\nu^{-2} + \psi_\nu H_z^2 H^{-2}}$$
$$\psi_\nu = \psi_0\left(1 + i\,\frac{\omega\eta_0}{u_0}\right)^{-1} \qquad (\nu = 1,\, 2) \tag{1.4}$$

Уравнения для плоских волн в упругой среде [2]

$$-\,\omega\mathbf{h} = \mathbf{k}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + ia^2\eta k^2\mathbf{h}$$
$$-\,\frac{\omega^2}{a^2}\mathbf{v} = -\,\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{v}) + \xi\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{v}) - \frac{\omega\psi}{H^2}\,\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h}) \tag{1.5}$$
$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad \xi = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma a^2}, \qquad \psi = \frac{H^2}{4\pi\rho a^2}$$

Здесь a^2 и b^2 — квадраты скоростей чисто упругих продольных и поперечных волн соответственно; ρ, λ и μ — плотность и постоянные Ламэ упругой среды; σ — проводимость упругой среды.

Записываем уравнения (1.5) в компонентах:

$$-\,\omega h_x = k_z\,(v_x H_z - v_z H_x) + ia^2\eta k^2 h_x$$
$$-\,\omega h_z = k_x\,(v_z H_x - v_x H_z) + ia^2\eta k^2 h_z$$
$$\left(-\frac{\omega^2}{a^2} + k_x^2 + \xi k_z^2\right)v_x + (1-\xi)\,k_x k_z v_z = -\,\frac{\omega\psi H_z}{H^2}\,(k_x h_z - k_z h_x) \tag{1.6}$$
$$\left(-\frac{\omega^2}{a^2} + k_z^2 + \xi k_x^2\right)v_z + (1-\xi)\,k_x k_z v_x = -\,\frac{\omega\psi H_x}{H^2}\,(k_z h_x - k_x h_z)$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$u^2 - (1+\xi+\psi)\,u + \xi + \psi\,[(\mathbf{k}^\circ\mathbf{H}^\circ)^2 + \xi\,(\mathbf{k}^\circ\times\mathbf{H}^\circ)^2] + i\,\frac{\omega\eta}{u}\,(u-1)\,(u-\xi) = 0$$
$$u = \left(\frac{\omega}{ka}\right)^2 \tag{1.7}$$

При малых $\omega\eta$ два корня этого уравнения u_3 и u_4 соответствуют быстрой и медленной магнитоупругим волнам, а третий корень соответствует апериодическому процессу.

Из уравнений (1.6) получаем соотношения, связывающие компоненты скорости среды в магнитоупругих волнах

$$v_{\nu x} = M_\nu v_{\nu z}, \qquad M_\nu = -\frac{(1-\xi)\,k_{\nu x}k_{\nu z}\;{}_\nu^{-2} - \psi_\nu H_x H_z H^{-2}}{-u_\nu + (k_{\nu x}^2 + \xi k_{\nu z}^2)\,k_\nu^{-2} + \psi_\nu H_z^2 H^{-2}}$$
$$\psi_\nu = \psi\left(1 + i\,\frac{\omega\eta}{u_\nu}\right)^{-1} \qquad (\nu = 3,\, 4) \tag{1.8}$$

§ 2. Отражение магнитозвуковых волн. Будем предполагать, что обе среды обладают бесконечной проводимостью ($\eta_0 = \eta = 0$). На границе раздела сред должны быть непрерывными давление, нормальная компонента скорости среды, магнитное поле и тангенциальная компонента электрического поля. Из последнего условия при бесконечной проводимости вытекает непрерывность тангенциальной компоненты скорости среды.

Таким образом, граничные условия имеют вид:

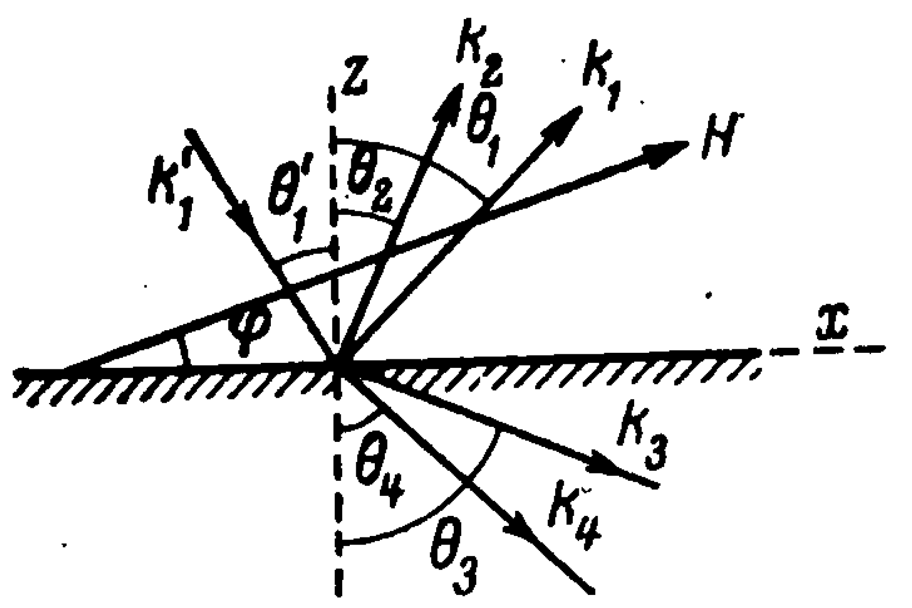
$$[v_z] = 0, \qquad [v_x] = 0, \qquad P_{zz} = -p, \qquad P_{xz} = 0 \tag{2.1}$$

где $[v_i]$ — скачок величины v_i на границе; P_{zz} и P_{xz} — компоненты тензора напряжений в упругой среде, p — давление в жидкости. Для случая монохроматических волн они выражаются через компоненты скоростей соответственно упругой и жидкой сред следующим образом:

$$P_{zz} = \frac{i}{\omega}\rho a^2\left(\operatorname{div} v + 2\xi\frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \qquad P_{xz} = 2\frac{i}{\omega}\rho b^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$p = -\frac{i}{\omega}\rho_0 u_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Пусть из жидкости на границу падает быстрая магнитозвуковая волна (фиг. 1). Величины, относящиеся к падающим возмущениям, будем обозначать штрихами. Для поля скоростей в жидкости согласно (1.4) имеем



Фиг. 1

$$v_z = v_{1z}' + v_{1z} + v_{2z}$$

$$v_x = M_1' v_{1z}' + M_1 v_{1z} + M_2 v_{2z} \tag{2.2}$$

$$M_1' = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta_1' + \psi_0 \sin 2\varphi}{-u_1' + \sin^2\theta_1' + \psi_0 \sin^2\varphi}$$

$$M_\nu = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta_\nu - \psi_0 \sin 2\varphi}{-u_\nu + \sin^2\theta_\nu + \psi_0 \sin^2\varphi} \qquad (\nu = 1, 2)$$

Для поля скоростей в упругой среде согласно (1.8) имеем:

$$v_z = v_{3z} + v_{4z}, \qquad v_x = M_3 v_{3z} + M_4 v_{4z}$$

$$M_\nu = \frac{1}{2}\frac{(1-\xi)\sin 2\theta_\nu + \psi \sin 2\varphi}{-u_\nu + \sin^2\theta_\nu + \xi\cos^2\theta_\nu + \psi\sin^2\varphi} \qquad (\nu = 3, 4) \tag{2.3}$$

Принимая во внимание, что

$$v_{1z}' = A_1' \cos\beta_1' \exp i\,[(\mathbf{k}_1'\mathbf{r}) - \omega t], \qquad \operatorname{tg}\beta_1' = M_1'$$

$$v_{\nu z} = A_1' W_\nu \cos\beta_\nu \exp i\,[(\mathbf{k}_\nu\mathbf{r}) - \omega t], \qquad \operatorname{tg}\beta_\nu = M_\nu \tag{2.4}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, 4)$$

где β_ν — угол между вектором смещения в волне индекса ν и осью z, из граничных условий (2.1) получаем систему четырех уравнений относительно амплитудных коэффициентов отражения и преломления W_ν.

Решение этой системы имеет вид

$$W_1 = -\frac{\cos\beta_1'}{\cos\beta_1}\frac{\rho a^2(M_2 - M_1')X + \rho_0 u_0^2 B}{\rho a^2(M_2 - M_1)X + \rho_0 u_0^2 D} \tag{2.5}$$

$$W_3 = \frac{M_4 \operatorname{ctg}\theta_4 - 1}{(M_2 Z - Y)\cos\beta_3}\left[(M_2 - M_1')\cos\beta_1' + (M_2 - M_1)W_1\cos\beta_1\right]$$

$$W_4 = \frac{\cos\beta_3}{\cos\beta_4}\frac{1 - M_3\operatorname{ctg}\theta_3}{M_4\operatorname{ctg}\theta_4 - 1}W_3$$

$$W_2 = \frac{\cos\beta_1' - W_1\cos\beta_1 - W_3\cos\beta_3 - W_4\cos\beta_4}{\cos\beta_2}$$

$$X = (M_4 \operatorname{ctg}\theta_4 - 1)[\operatorname{ctg}\theta_3 - (1-2\xi)M_3] + (1 - M_3\operatorname{ctg}\theta_3)[\operatorname{ctg}\theta_4 - (1-2\xi)M_4]$$

$$Y = M_4 - M_3 + M_3 M_4(\operatorname{ctg}\theta_4 - \operatorname{ctg}\theta_3)$$

$$Z = M_4\operatorname{ctg}\theta_4 - M_3\operatorname{ctg}\theta_3$$

$$B = Y(M_2 - M_1' + \operatorname{ctg}\theta_2 + \operatorname{ctg}\theta_1') - Z(M_2\operatorname{ctg}\theta_1' + M_1'\operatorname{ctg}\theta_2)$$

$$D = Y(M_2 - M_1' + \operatorname{ctg}\theta_2 - \operatorname{ctg}\theta_1') + Z(M_2\operatorname{ctg}\theta_1' - M_1'\operatorname{ctg}\theta_2)$$

Если положить $\psi_0 = \psi = 0$ и учесть, что при этом

$$u_1' = u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = \xi$$

$$M_1' = -M_1 = -\operatorname{tg}\theta_1, \quad M_2 = -\operatorname{ctg}\theta_2, \quad M_3 = -\operatorname{tg}\theta_3, \quad M_4 = \operatorname{ctg}\theta_4$$

$$\beta_1' = \pi - \theta_1, \quad \beta_1 = \theta_1, \quad \beta_3 = \pi - \theta_3, \quad \beta_4 = \frac{\pi}{2} - \theta_4$$

формулы (2.5) дадут выражения для амплитудных коэффициентов отражения и преломления в отсутствие магнитного поля (см. [3], стр. 31).

Устремляя ψ_0 и ψ к бесконечности, имеем

$$u_1' = u_1 = \psi_0, \quad u_3 = \psi, \quad \theta_2 = \theta_4 = 0$$

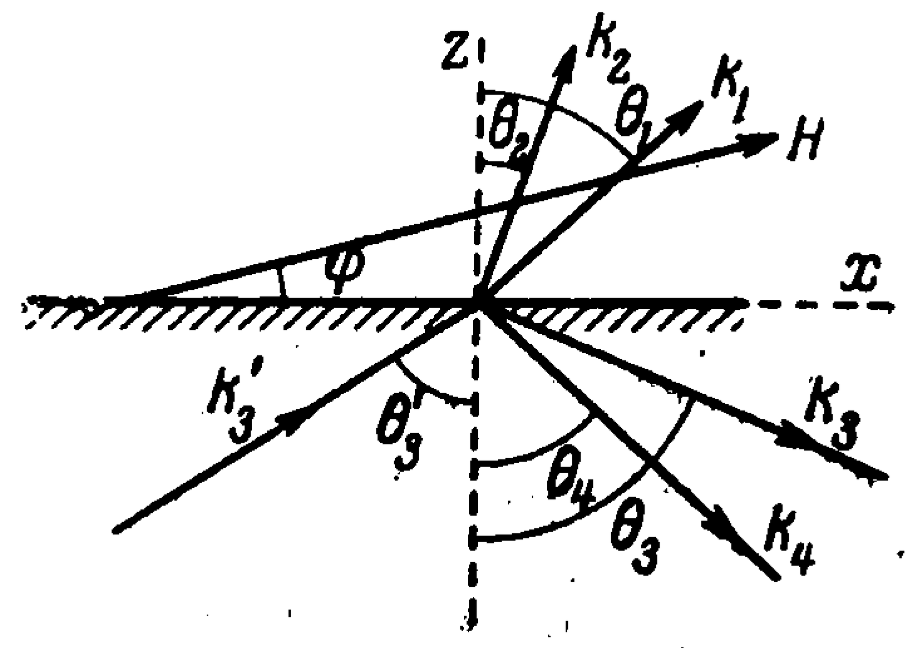
$$M_1' = M_1 = M_3 = -\operatorname{tg}\varphi$$

$$M_2 = M_4 = \operatorname{ctg}\varphi$$

$$\beta_1' = \beta_1 = \beta_3 = \pi - \varphi$$

$$W_1 = -1, \qquad W_2 = W_3 = W_4 = 0$$

т. е. в этом предельном случае отражение будет полным.



Фиг. 2

Пусть теперь из упругой среды на границу падает быстрая магнитоупругая волна (фиг. 2).

Поле скоростей в жидкости

$$v_z = v_{1z} + v_{2z}, \qquad v_x = M_1 v_{1z} + M_2 v_{2z}$$

Поле скоростей в упругой среде

$$v_z = v_{3z}' + v_{3z} + v_{4z}, \qquad v_x = M_3' v_{3z}' + M_3 v_{3z} + M_4 v_{4z}$$

$$M_3' = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-\xi)\sin 2\theta_3' - \psi \sin 2\varphi}{-u_3' + \sin^2\theta_3' + \xi\cos^2\theta_3' + \psi\sin^2\varphi}$$

Аналогично предыдущему находим

$$W_3 = -\frac{\cos\beta_3'}{\cos\beta_3}\,\frac{\rho a^2 (M_2 - M_1) F + \rho_0 u_0^2 E}{\rho a^2 (M_2 - M_1) X + \rho_0 u_0^2 \Phi} \tag{2.6}$$

$$W_4 = \frac{(1 + M_3' \operatorname{ctg}\theta_3')\cos\beta_3' + (1 - M_3 \operatorname{ctg}\theta_3) W_3 \cos\beta_3}{(M_4 \operatorname{ctg}\theta_4 - 1)\cos\beta_4}$$

$$W_1 = \frac{(M_2 - M_3')\cos\beta_3' + (M_2 - M_3) W_3 \cos\beta_3 + (M_2 - M_4) W_4 \cos\beta_4}{(M_2 - M_1)\cos\beta_1}$$

$$W_2 = \frac{\cos\beta_3' - W_1\cos\beta_1 + W_3\cos\beta_3 + W_4\cos\beta_4}{\cos\beta_2}$$

$$F = (1 + M_3' \operatorname{ctg}\theta_3')\,[\operatorname{ctg}\theta_4 - (1 - 2\xi) M_4] - (M_4 \operatorname{ctg}\theta_4 - 1)\,[\operatorname{ctg}\theta_3' + (1 - 2\xi) M_3']$$

$$L = M_4 - M_3' + M_3' M_4 (\operatorname{ctg}\theta_4 + \operatorname{ctg}\theta_3')$$

$$N = M_4 \operatorname{ctg}\theta_4 + M_3' \operatorname{ctg}\theta_3'$$

$$E = L\,(M_2 - M_1 + \operatorname{ctg}\theta_2 - \operatorname{ctg}\theta_1) + N\,(M_2 \operatorname{ctg}\theta_1 - M_1 \operatorname{ctg}\theta_2)$$

$$\Phi = Y\,(M_2 - M_1 + \operatorname{ctg}\theta_2 - \operatorname{ctg}\theta_1) + Z\,(M_2 \operatorname{ctg}\theta_1 - M_1 \operatorname{ctg}\theta_2)$$

При $\psi_0 = \psi = 0$ из (2.6) получаем известные формулы для коэффициентов W_ν (см. [3], стр. 34).

Если же ψ_0 и ψ стремятся к бесконечности, имеем, как и выше, случай полного отражения

$$M_3' = M_3 = M_1 = -\operatorname{tg}\varphi, \qquad \beta_3' = \beta_3 = \beta_1 = \pi - \varphi$$

$$W_3 = -1, \qquad W_1 = W_2 = W_4 = 0$$

§ 3. Поверхностные волны (Релея). Исследуем влияние магнитного поля на поверхностные волны в случае, когда упругая среда граничит с достаточно разреженной газообразной средой ($\rho_0 = 0$). Как известно, уравнение для поверхностной волны можно получить, устремив к бесконечности коэффициент отражения плоских волн [3]. Таким образом из (2.6) получаем

$$X = 0 \tag{3.1}$$

Рассмотрим слабое магнитное поле ($\psi \ll 1$). С точностью до членов первой степени относительно ψ имеем

$$u_3 = 1 + \psi\cos^2(\theta_3 - \varphi), \qquad u_4 = \xi + \psi\sin^2(\theta_4 - \varphi)$$

$$M_3 = -\operatorname{tg}\theta_3\left[1 + \frac{\psi}{1-\xi}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta_3} - \frac{\cos^2(\theta_3-\varphi) - \sin^2\varphi}{\cos^2\theta_3}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$M_4 = \operatorname{ctg}\theta_4\left[1 + \frac{\psi}{1-\xi}\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\theta_4} + \frac{\sin^2(\theta_4-\varphi) - \sin^2\varphi}{\sin^2\theta_4}\right)\right]$$

Введем обозначения

$$q = \frac{u_4}{u_3}, \qquad S = \sin^2\theta_4 \tag{3.3}$$

Учитывая равенство

$$\sin\theta_3 = (\sin\theta_4) / \sqrt{q}$$

приводим (3.1) к виду (3.4)

$$1 + \frac{(1-2S)^2}{4S\sqrt{1-S}\sqrt{\xi - S}} = \frac{\psi}{4\xi(1-\xi)(1-2S_0)}\left\{\left[2\alpha + \frac{\xi^2 - (1-2\xi)(1-2S_0)}{\xi - S_0}\beta\right]\cos 2\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{S_0(1-S_0)}}\left[\alpha(1-2S_0) + 2\beta S_0(1-S_0)\left(\frac{1-\xi}{\xi - S_0} - \frac{2\xi}{1-2S_0}\right)\right]\sin 2\varphi + \frac{\beta(1-\xi)^2}{\xi - S_0}\right\}$$

Здесь $S_0 > 1$ — вещественный корень этого уравнения при $\psi = 0$,

$$\alpha = 1 - 2S_0(1-\xi), \quad \beta = \xi - 2S_0(1-\xi)$$

Решением уравнения (3.4) будет

$$S = S_0\left[1 + \frac{(1-S_0)(\xi - S_0)A\psi}{2\xi(1-\xi)[2(\xi - S_0) - S_0(\alpha - \xi)]}\right] \tag{3.5}$$

где A обозначает выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части (3.4).

Фазовая скорость поверхностной волны вдоль границы определится формулой

$$v = a\sqrt{\frac{u_4}{S}} = v_0\left\{1 + \frac{\psi}{4\xi}\left[1 - (1-2S_0)\cos 2\varphi - 2\sqrt{S_0(1-S_0)}\sin 2\varphi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(1-S_0)(\xi - S_0)A}{(1-\xi)[2(\xi - S_0) - S_0(\alpha - \xi)]}\right]\right\} \qquad \left(v_0 = \frac{b}{\sqrt{S_0}}\right)$$

Как следует из (3.6), v имеет вещественное значение лишь при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi / 2$. Это указывает на то, что поверхностная волна распространяется без затухания в случаях, когда магнитное поле параллельно или перпендикулярно к границе. При других углах наклона магнитного поля v будет комплексной величиной и поверхностная волна затухает. Это затухание можно объяснить тем, что при $0 < \varphi < \pi / 2$ возбуждается электромагнитная волна, которая непрерывно уносит часть энергии поверхностной волны. Коэффициент затухания равен $\varkappa = \operatorname{Im}(\omega / v)$.

Выпишем выражения для v в следующих случаях:

при $\varphi = 0$

$$v = v_0\left\{1 + \frac{\psi S_0}{2\xi}\left[1 - \frac{1 - S_0}{1 - \xi}\,\frac{(1-\xi)(\xi - S_0) + (1 + \xi - 2S_0)\xi\beta}{S_0[2(\xi - S_0) - S_0(\alpha - \xi)]}\right]\right\}$$

при $\varphi = \pi / 2$

$$v = v_0\left\{1 + \frac{\psi(1 - S_0)}{2\xi}\left[1 + \frac{(1-\xi)(\xi - S_0) - (1 - 3\xi + 2S_0\xi)\beta}{(1-\xi)[2(\xi - S_0) - S_0(\alpha - \xi)]}\right]\right\}$$

при $\varphi = \pi / 4$

$$v = v_0\left\{1 + \frac{\psi[\xi - S_0 + \xi(1 - S_0)\beta]}{4\xi[2(\xi - S_0) - S_0(\alpha - \xi)]}\right. \times$$

$$\left.\times\left[1 + \frac{i(\xi - S_0)\sqrt{S_0(S_0 - 1)}\,[(1 - 2S_0)^2 - 4S_0(1 - S_0)(\alpha - \xi + \xi\beta)]}{S_0(1-\xi)(1 - 2S_0)[\xi - S_0 + \xi(1 - S_0)\beta]}\right]\right\}$$

Приводим некоторые значения v / v_0 при двух значениях ξ

$\varphi = 0$	$\pi / 2$	$\pi / 4$	
$v / v_0 = 1 + 1.87\psi$	1	$1 + (0.93 - i0.32)\psi$	при $\xi = 1/3$
$v / v_0 = 1 + 1.26\psi$	1	$1 + (0.61 - i0.28)\psi$	при $\xi = 1/2$

Таким образом, магнитное поле, параллельное границе, несколько увеличивает скорость поверхностной волны, а поле, перпендикулярное к границе, практически не влияет на эту скорость.

Коэффициент затухания $\varkappa$ в случае $\varphi = \pi / 4$ равен

$$\varkappa = 0.32\omega\psi / v_0 \qquad \text{при } \xi = 1/3$$

$$\varkappa = 0.28\omega\psi / v_0 \qquad \text{при } \xi = 1/2$$

Автор благодарит К. П. Станюковича, предложившего тему настоящей работы.

Поступила 17 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
2. Кейлис-Борок В. И., Монин А. С. Магнитоупругие волны и граница земного ядра. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 11.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР. М., 1957.