

## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ПРОВОДИМОСТИ

Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Изучаются переходные режимы, возникающие при движении ионизованного вязкого газа между параллельными проводящими пластинами при наличии поперечного магнитного поля.

Вопросы магнитной гидродинамики, относящиеся к нестационарному течению несжимаемой проводящей среды в плоском канале, за последние годы служили предметом многих исследований. Первой работой этого направления явилась, по-видимому, статья С. А. Регирера [1], в которой поперечное магнитное поле считается однородным, стенки канала — непроводящими, а движение вызывается продольным перепадом давления. При этом скорость и индуцированное магнитное поле имеют только одну составляющую в направлении приложенного градиента давления, зависящую от поперечной координаты и времени, и уравнения магнитной гидродинамики сводятся к линейной системе уравнений в частных производных. Аналогичная задача для случая движущихся стенок рассмотрена в работе [2] (см. также статью [3], в которой стенки канала считаются идеально проводящими). Совсем недавно опубликован еще ряд сходных исследований, из которых укажем на статьи А. К. Мусина [4] и Иена и Ченга [5]. Обсуждаемые проблемы получили дальнейшее развитие в работах [6,7], в которых показано, что на неустановившиеся течения рассмотренного типа существенное влияние оказывает проводимость стенок канала.

**§ 1. Постановка задачи.** Во всех упомянутых выше исследованиях предполагалось, что произведение циклотронной частоты заряженных частиц  $\omega$  на среднее время между столкновениями  $\tau$  есть величина малая, что позволило считать проводимость и вязкость скалярами и применить обычную форму закона Ома. Однако при достаточно сильных магнитных полях, либо для разреженного газа условие  $\omega\tau \ll 1$  может оказаться нарушенным, в связи с чем приходится использовать различные усложненные формы закона Ома [8]. Если предположить, что степень ионизации газа мала и для ионов соотношение  $\omega_i\tau_i \ll 1$  выполняется, т. е. пренебрегается скольжением ионов относительно газа, то коэффициент вязкости  $\eta$  можно считать скалярной величиной, а также применять закон Ома в следующей форме [8,9]

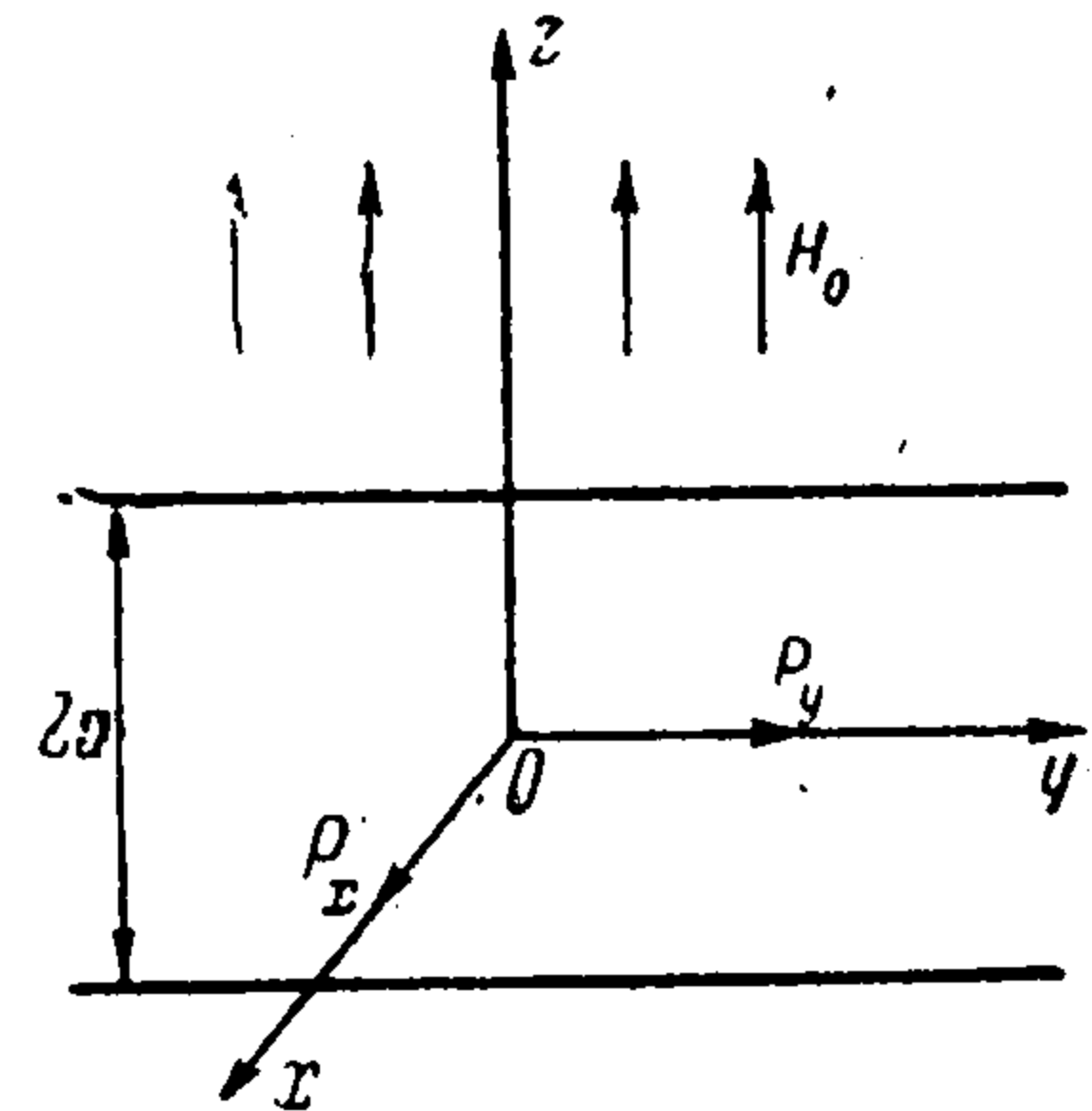
$$\mathbf{j} + \frac{\omega_e \tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (1.1)$$

где  $\omega_e$  — циклотронная частота электронов,  $\tau^*$  — среднее время между столкновениями электронов с ионами и нейтральными частицами,  $\sigma$  — проводимость,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  — магнитное и электрическое поля,  $\mathbf{v}$  — скорость среды. При таких условиях задача о течении в плоском канале по-прежнему остается линейной (эффектами сжимаемости пренебрегается), но в связи с учетом холловского тока характер переходного

режима усложняется, в первую очередь за счет появления поперечных потоков и полей.

В статье [9] рассмотрено нестационарное движение слабо ионизованного вязкого газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости по указанной выше схеме, причем движение вызывается постоянным продольным градиентом давления.

В настоящей работе исследуется аналогичное течение вязкого газа между параллельными стенками в предположении, что вдоль осей  $x$  и  $y$  приложены заданные перепады давления  $P_x(t)$  и  $P_y(t)$ , причем однородное магнитное поле направлено перпендикулярно стенкам (фиг. 1). Точное решение задачи, полученное для стенок конечной проводимости в виде комплексных интегралов (§ 2), преобразуется к простому вещественному виду в случае слабо проводящей среды (§ 3). Показано, что переходные режимы такого типа имеют характер затухающих колебаний, и изучено влияние вязкости на их форму. Таким образом, имеет место качественное различие между рассмотренными течениями с анизотропной проводимостью и обычным изотропным случаем, для которого движение слабо проводящей среды носит аperiодический характер.



Фиг. 1

§ 2. Общее решение задачи. При сделанных предположениях система уравнений магнитной гидродинамики имеет вид

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \eta \Delta \mathbf{v} - \nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$4\pi\sigma \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} \right] = 4\pi\sigma (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} + \Delta \mathbf{H} + \frac{e\tau^*}{m} (\text{rot } \mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \nabla) \text{rot } \mathbf{H}$$

где  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона (принята система CGSM,  $\mu = 1$ ).

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче скорость и индуцированное магнитное поле направлены параллельно стенкам канала ( $z = \pm a$ ) и зависят только от поперечной координаты  $z$  и времени  $t$ . Если ввести безразмерные величины

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad h = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \quad q_x = \frac{P_x a^2}{v_0 \eta}, \quad q_y = \frac{P_y a^2}{v_0 \eta}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{v_0 t}{a} \quad (2.2)$$

$$M = H_0 a \sqrt{\sigma/\eta}, \quad R = \frac{\rho}{\eta} v_0 a, \quad R_m = 4\pi\sigma v_0 a, \quad \beta = \frac{e H_0 \tau^*}{m}$$

( $v_0$  — некоторая характерная скорость), то уравнения (2.1) будут удовлетворены, если найти величины  $u_x(\zeta, \tau)$ ,  $u_y(\zeta, \tau)$ ,  $h_x(\zeta, \tau)$ ,  $h_y(\zeta, \tau)$  в результате решения системы

$$R \frac{\partial u_x}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta^2} + \frac{M^2}{R_m} \frac{\partial h_x}{\partial \zeta} + q_x, \quad R \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta^2} + \frac{M^2}{R_m} \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} + q_y \quad (2.3)$$

$$R_m \frac{\partial h_x}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h_x}{\partial \zeta^2} + \beta \frac{\partial^2 h_y}{\partial \zeta^2} + R_m \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}, \quad R_m \frac{\partial h_y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h_y}{\partial \zeta^2} - \beta \frac{\partial^2 h_x}{\partial \zeta^2} + R_m \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}$$

и определить составляющие градиента давления формулами

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = P_x(t), \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = P_y(t), \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial z} \quad (2.4)$$

При этом для составляющих электрического поля имеем

$$e_x = \frac{1}{R_m} \left( \beta \frac{\partial h_x}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} \right) - u_y, \quad e_y = \frac{1}{R_m} \left( \beta \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} + \frac{\partial h_x}{\partial \zeta} \right) + u_x \quad (2.5)$$

$$e_z = u_y h_x - u_x h_y - \frac{\beta}{2R_m} \frac{\partial h^2}{\partial \zeta}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{v_0 H_0}$$

После введения комплексных величин

$$h_x - ih_y = \varphi, \quad u_x - iu_y = f + \frac{1}{R} \int_0^\tau q(s) ds, \quad q_x - iq_y = q \quad (2.6)$$

основная система (2.3) записывается в более компактном виде

$$R \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{M^2}{R_m} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad R_m \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = (1 + i\beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + R_m \frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad (2.7)$$

Применяя к (2.7) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях и вводя обозначение

$$\Omega(\zeta, p) = \int_0^\infty \omega(\zeta, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (2.8)$$

приходим к системе

$$RpF = \frac{d^2 F}{d\zeta^2} + \frac{M^2}{R_m} \frac{d\Phi}{d\zeta}, \quad R_m p\Phi = (1 + i\beta) \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + R_m \frac{dF}{d\zeta} \quad (2.9)$$

общее решение которой в рассматриваемом случае симметричного течения может быть представлено в следующем виде:

$$F = -\frac{Q}{Rp} (A_1 \operatorname{ch} \gamma_1 \zeta + A_2 \operatorname{ch} \gamma_2 \zeta) \quad (2.10)$$

$$\Phi = -\frac{QR_m}{M^2 Rp} \left[ A_1 (Rp - \gamma_1^2) \frac{\operatorname{sh} \gamma_1 \zeta}{\zeta} + A_2 (Rp - \gamma_2^2) \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 \zeta}{\zeta} \right] \quad (2.11)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left[ \sqrt{M^2 + p(\sqrt{R\alpha} + \sqrt{R_m})^2} \pm \sqrt{M^2 + p(\sqrt{R\alpha} - \sqrt{R_m})^2} \right] \\ (\alpha = 1 + i\beta)$$

Величины  $A_1$  и  $A_2$  должны быть найдены из граничных условий на стенках канала, заключающихся, во-первых, в совпадении скорости среды со скоростью ограничивающих ее пластин и, во-вторых, в требовании непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей при переходе из области газа в область стенок канала. Для упрощения выкладок в дальнейшем пластины  $z = \pm a$  считаются неподвижными, так что одно из граничных условий имеет вид

$$F|_{\zeta=1} = -\frac{Q}{Rp} \quad (2.12)$$

Для получения второго условия необходимо рассмотреть уравнения Максвелла в области  $\zeta > 1$ , которые в преобразованном по Лапласу виде имеют форму

$$\frac{d\Phi^*}{d\zeta} = R_m^* (E_y^* + iE_x^*), \quad \frac{d}{d\zeta} (E_y^* + iE_x^*) = p\Phi^* \quad (2.13)$$

(током смещения пренебрегается, индекс \* относится к области стенок). Решая эти уравнения при условии ограниченности полей при  $\zeta \rightarrow \infty$ , находим связь между электрическим и магнитным полями

$$E_y^* + iE_x^* = -\sqrt{\frac{p}{R_m^*}} \Phi^* \quad (\zeta > 1) \quad (2.14)$$

Учитывая непрерывность величин  $E_x$ ,  $E_y$  и  $\Phi$ , а также формулы (2.5), получим второе краевое условие

$$\left[ \alpha \frac{d\Phi}{d\zeta} + R_m \sqrt{\frac{p}{R_m^*}} \Phi \right]_{\zeta=1} = 0 \quad (\alpha = 1 + i\beta) \quad (2.15)$$

Подставляя (2.10) в (2.12) и (2.15) и решая полученную алгебраическую систему, находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Rp - \gamma_2^2}{D} \left[ \alpha \operatorname{ch} \gamma_2 + R_m \sqrt{\frac{p}{R_m^*}} \frac{\operatorname{sh} \gamma_2}{\gamma_2} \right] \\ A_2 &= -\frac{Rp - \gamma_1^2}{D} \left[ \alpha \operatorname{ch} \gamma_1 + R_m \sqrt{\frac{p}{R_m^*}} \frac{\operatorname{sh} \gamma_1}{\gamma_1} \right] \\ D &= \alpha (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 + R_m \sqrt{\frac{p}{R_m^*}} \left[ \frac{Rp - \gamma_2^2}{\gamma_2} \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Rp - \gamma_1^2}{\gamma_1} \operatorname{ch} \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким образом, общее решение поставленной задачи дается следующими комплексными интегралами:

$$\begin{aligned} u_x - iu_y &= \frac{1}{R} \int_0^\tau q(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(\zeta, p) \exp(p\tau) dp \\ h_x - ih_y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Phi(\zeta, p) \exp(p\tau) dp \end{aligned} \quad (2.17)$$

причем подынтегральные функции определяются формулами (2.10) и (2.16).

При  $\omega\tau^* = 0$  ( $\alpha = 1$ ) найденное решение соответствует течению с изотропной проводимостью [6].

Приведение полученного решения к вещественному виду может быть осуществлено путем представления комплексных интегралов (2.17) в виде суммы вычетов в полюсах, соответствующих корням уравнения  $D(p) = 0$ , дополненной интегралами по разрезу  $\operatorname{Re} p < 0$ ,  $\operatorname{Im} p = 0$ , который необходимо провести в связи с наличием точки разветвления  $p = 0$ . Таким образом, соответствующие рассматриваемому случаю краевые задачи математической физики имеют так же, как в изотропном случае [7], смешанный спектр собственных значений.

Ввиду сложности указанных выкладок в дальнейшем рассматривается частный случай движения, когда проводимость газа невелика.

**§ 3. Случай слабо проводящего газа.** Предположим, что проводимость газа  $\sigma$  мала по сравнению с проводимостью стенок канала  $\sigma^*$  и, кроме того, вязкое число Рейнольдса значительно превышает магнитное число Рейнольдса. Считая выполненными условия

$$R_m \ll \sqrt{R_m^*}, \quad \sqrt{R_m} \ll \sqrt{R} \quad (3.1)$$

разлагая полученное точное решение в ряды по степеням малых параметров и ограничиваясь их первыми членами, получим приближенное решение задачи в виде комплексных интегралов такого вида:

$$\begin{aligned} u_x - iu_y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{Q}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\operatorname{ch} \gamma} \right) \exp(p\tau) dp \\ h_x - ih_y &= \frac{R_m}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{Q}{\gamma^2} \left( \frac{\operatorname{sh} \gamma \zeta}{\gamma \operatorname{ch} \gamma} - \zeta \right) \exp(p\tau) dp \end{aligned} \quad \left( \gamma = \sqrt{Rp + \frac{M^2}{\alpha}} \right) \quad (3.2)$$

Полученные интегралы для произвольного закона изменения градиента давления  $q(\tau)$  могут быть найдены при помощи теоремы свертывания.

Например, для скорости среды имеем

$$u_x - iu_y = \int_0^\tau q(\tau - u) \omega(u) du \quad (3.3)$$

где функция

$$\omega(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\exp(p\tau)}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\operatorname{ch} \gamma}\right) dp \quad (3.4)$$

легко находится при помощи теоремы о вычетах

$$\omega(\tau) = \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \exp\left[-\left(\lambda_n^2 + \frac{M^2}{\alpha}\right) \frac{\tau}{R}\right] \cos \lambda_n \zeta, \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (3.5)$$

Дальнейшие вычисления проводятся в предположении, что постоянный градиент давления  $P$  приложен в направлении оси  $x$ . Так как при этом

$$q(\tau) = \frac{Pa^2}{U_0 \eta} = q = \text{const}$$

то

$$u_x - iu_y = 2q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \lambda_n \zeta}{\lambda_n \left(\lambda_n^2 + \frac{M^2}{\alpha}\right)} \left\{1 - \exp\left[-\left(\lambda_n^2 + \frac{M^2}{\alpha}\right) \frac{\tau}{R}\right]\right\} \quad (3.6)$$

Суммируя входящий сюда ряд по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \lambda_n \zeta}{\lambda_n (\lambda_n^2 + c^2)} = \frac{\operatorname{ch} c - \operatorname{ch} c \zeta}{2c^2 \operatorname{ch} c} \quad (0 < \zeta < 1) \quad (3.7)$$

получаем следующее выражение:

$$u_x - iu_y = \frac{q(1+i\beta)}{M^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(M\zeta/\sqrt{1+i\beta})}{\operatorname{ch}(M/\sqrt{1+i\beta})}\right] - \\ - 2q \exp\left[-\frac{M^2 \tau}{R(1+i\beta)}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \lambda_n \zeta}{\lambda_n^2 [\lambda_n^2 + M^2/(1+i\beta)]} \exp\left(-\frac{\lambda_n^2 \tau}{R}\right) \quad (3.8)$$

первый член которого представляет собой стационарный режим для рассматриваемого течения, ранее найденный в работе [10].

Сходные формулы могут быть получены и для индуцированных магнитных полей.

Рассмотрение выражения (3.8) показывает, что при  $\beta \neq 0$  (анизотропная проводимость) переходный режим содержит периодические функции времени с частотой  $M^2 \beta / R(1+\beta^2)$ , в то время как при  $\beta = 0$  (изотропная проводимость) стремление к стационарному состоянию носит аперiodический характер.

На фиг. 2 приведены значения расходов газа  $W_x$  и  $W_y$  в направлении осей  $x$  и  $y$ , отнесенных к соответствующим стационарным значениям  $W_x^\circ$  и  $W_y^\circ$  и вычисленных по формулам

$$\Phi_x = \frac{W_x}{W_x^\circ} = 1 - \frac{\exp(-\lambda\theta)}{\sigma_1(0)} [\sigma_1(\theta) \cos \lambda\beta\theta - \sigma_2(\theta) \sin \lambda\beta\theta] \quad (3.9) \\ \Phi_y = \frac{W_y}{W_y^\circ} = 1 - \frac{\exp(-\lambda\theta)}{\sigma_2(0)} [\sigma_1(\theta) \sin \lambda\beta\theta + \sigma_2(\theta) \cos \lambda\beta\theta]$$

где

$$\sigma_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 (1+\beta^2) + M^2}{[\lambda_n^2 (1+\beta^2) + M^2]^2 + M^4 \beta^2} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\theta}{M^2}\right) \quad (3.10) \\ \sigma_2(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta M^2}{[\lambda_n^2 (1+\beta^2) + M^2]^2 + M^4 \beta^2} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\theta}{M^2}\right)$$

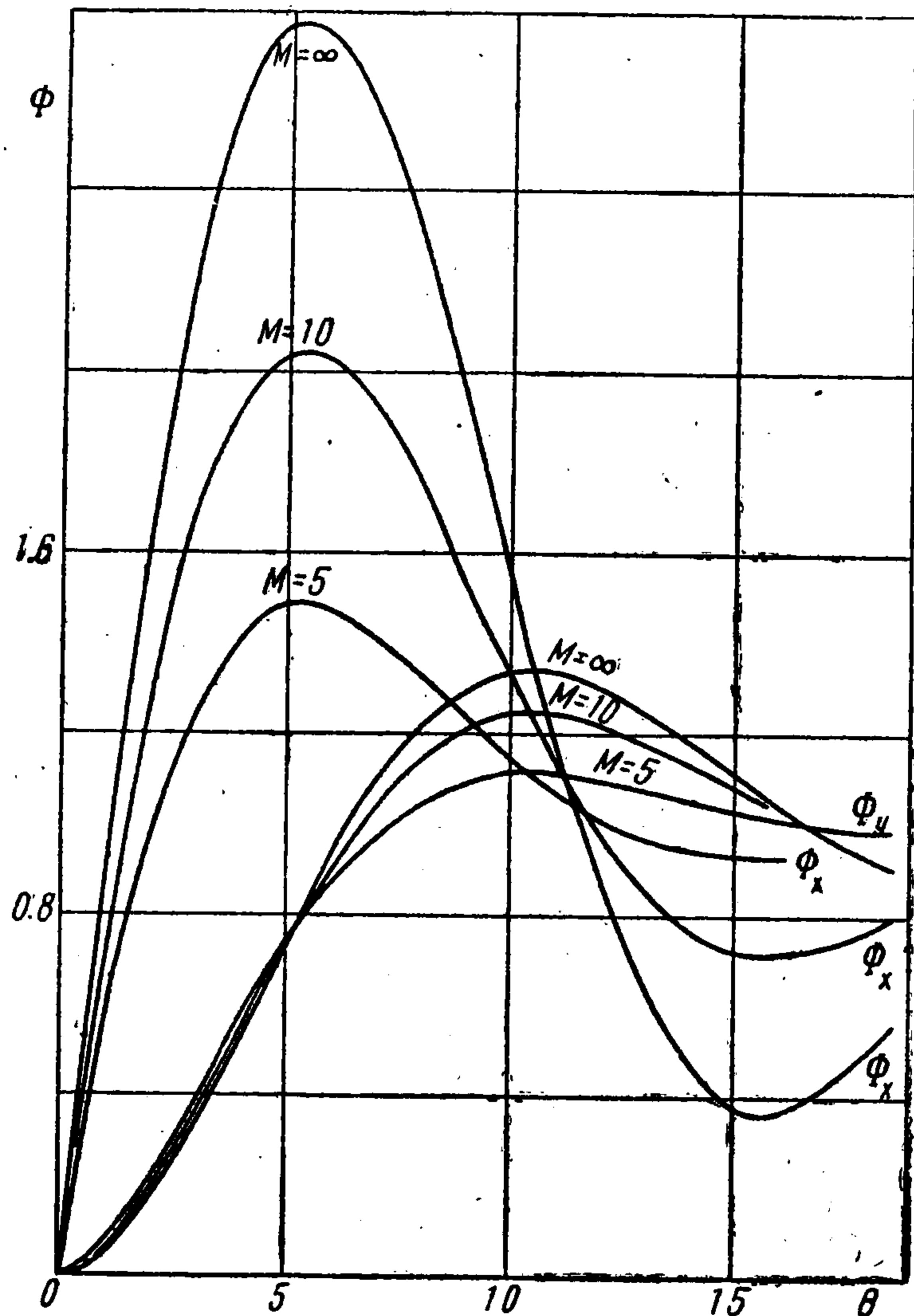
Здесь обозначено

$$\theta = \frac{M^2 \tau}{R}, \quad \lambda = \frac{1}{1 + \beta^2} \quad (3.11)$$

Расчеты производились для двух значений числа Гартмана  $M = 5$  и  $M = 10$ , причем параметр анизотропии  $\beta$  был принят равным трем. На той же фиг. 2 приведены результаты для случая  $M = \infty$ , относящегося к течению невязкого газа; при этом формулы (3.9) переходят в соответствующие формулы работы [9].

Полученные численные данные отчетливо иллюстрируют влияние вязкости на форму описывающих переходный режим затухающих колебаний: первые амплитудные максимумы достигаются примерно для одних и тех же значений времени, но их величина убывает с возрастанием коэффициента вязкости, причем последний эффект особенно значителен для расхода в направлении приложенного градиента давления.

Поступила 4 VI 1962



Фиг. 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р е г и р е р С. А. Неустановившееся течение электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля. Инж.-физ. ж., 1959, т. 2, № 8, стр. 43.
2. У ф л я н д Я. С., Ч е к м а р е в И. Б. О точном решении одной задачи магнитной гидродинамики. ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 11, стр. 1412.
3. L u d f o r d G. S. Rayleigh's Problem in Hydromagnetics: The Impulsive Motion of a Pole-piece. Arch. for Rat. Mech. and Anal., 1959, 3, 1, 14.
4. М у с и н А. К. О движении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 5, стр. 770.
5. Y e n J. T., C h a n g C. C. Magnetohydrodynamic Channel Flow under Time — Dependent Pressure Gradient. The Physics of Fluids, 1961, 4, 11, 1355.
6. Ч е к м а р е в И. Б. Нестационарное течение проводящей жидкости в плоской трубе при наличии поперечного магнитного поля. ЖТФ, 1960, т. 30, вып. 3, стр. 338.
7. У ф л я н д Я. С., Ч е к м а р е в И. Б. Исследование неустановившегося течения проводящей жидкости в плоском канале с движущимися границами. ЖТФ, 1960, т. 30, вып. 5, стр. 465.
8. Л ю б и м о в Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, стр. 611.
9. С а х н о в с к и й Э. Г., У ф л я н д Я. С. Влияние анизотропии проводимости на неустановившееся движение проводящего газа в плоском канале. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 540.
10. Ч е к м а р е в И. Б. Установившееся течение слабо ионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, стр. 473.