

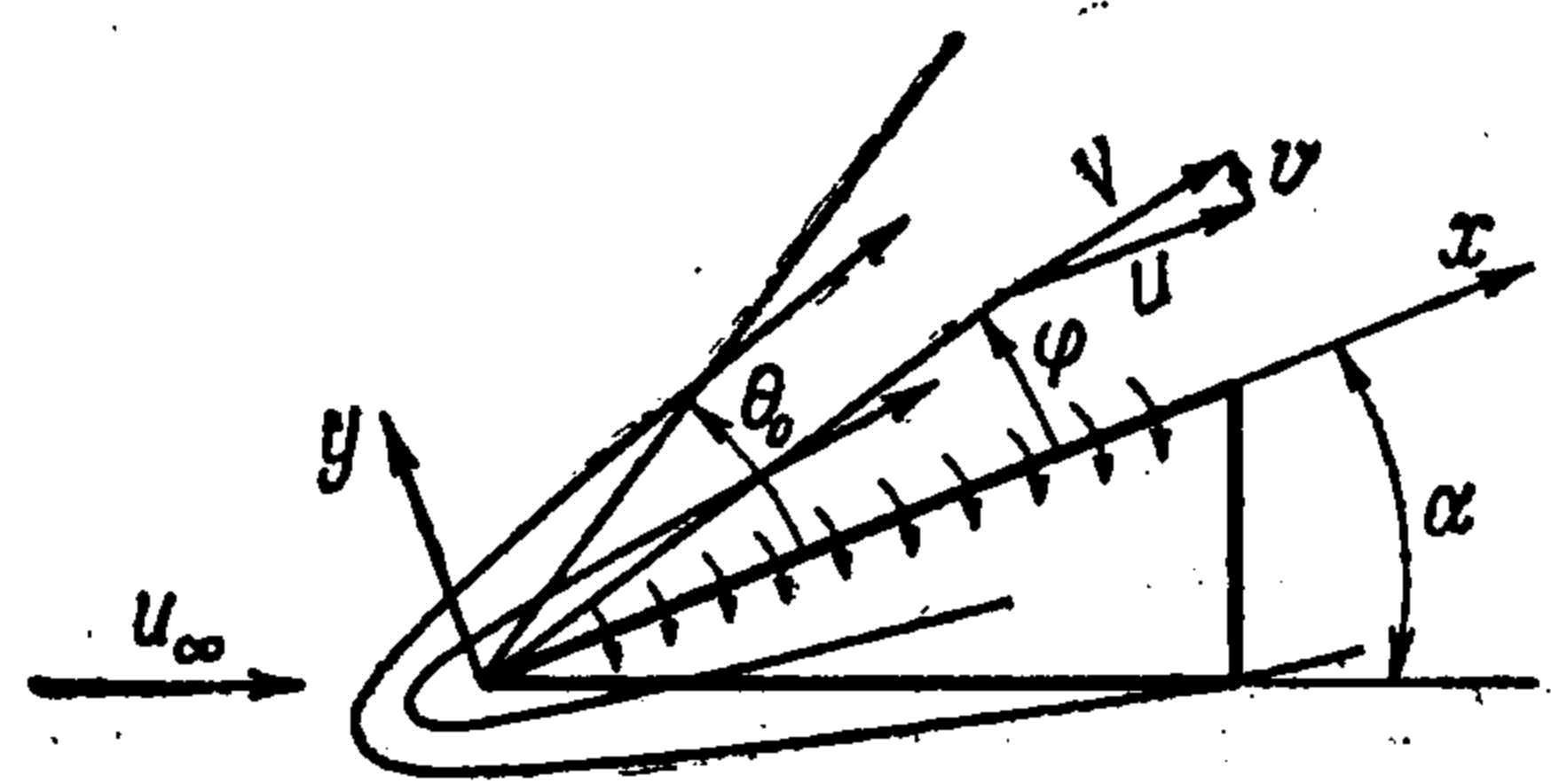
## ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А. А. Богачева, М. Д. Ладыженский

(Москва)

Рассматривается обтекание вязким плоским установившимся сверхзвуковым потоком клина, по поверхности которого перпендикулярно к плоскости течения текут поверхностные токи, квадрат интенсивности которых обратно пропорционален расстоянию от вершины клина. Постановка задачи аналогична [1]. Газ предполагается непроводящим перед ударной волной и имеющим конечную проводимость в области возмущенного потока, переход через ударную волну описывается теми же соотношениями, что и в отсутствие магнитного поля. В указанных предположениях существует автомодельное решение уравнений магнитной гидродинамики, описывающее течение вблизи вершины клина и являющееся обобщением известного точного решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком в отсутствие магнитного поля.

При заданной интенсивности магнитного поля имеются два решения I краевой задачи полученной системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих решений, переходящих при стремлении интенсивности поля к нулю в известные «немагнитные» решения задачи обтекания клина со слабым и сильным скачками, скорость газа на поверхности клина не равна нулю. Помимо этих решений, существует бесконечное множество решений II, для которых угол наклона скачка принимает любое значение в интервале между значениями, полученными из решения I.



Фиг. 1

Решения II характеризуются нулевой скоростью на поверхности клина и им нет аналога в «обычной» гидродинамике. Требование непрерывной зависимости решения от интенсивности поля заставляет считать, что практически будет реализоваться решение I, соответствующее слабому скачку. Для этого решения показано, что возможен переход от течения с присоединенной ударной волной в отсутствие поля к течению с отсоединенной ударной волной при достаточно сильном поле.

Приведены примеры расчета, выполненного при помощи быстродействующей вычислительной машины М-20.

1. Рассматривается обтекание вязким плоским установившимся сверхзвуковым потоком верхней поверхности клина, составляющей угол  $\alpha$  с направлением вектора скорости  $U_\infty$  невозмущенного потока, декартовы оси координат  $xu$  ориентированы, как показано на фиг. 1.

Предполагается, что по обтекаемой поверхности перпендикулярно плоскости течения текут поверхностные токи, плотность которых

$$j = -Ax^{-1/2}$$

где  $A$  — размерная постоянная величина. Длина щеки клина равна  $L$ .

Составляющие  $h_x$  и  $h_y$  вектора  $h$  магнитного поля, обусловленного заданным распределением  $j$ , даются соотношениями ( $c$  — скорость света

в вакууме)

$$h_x = \frac{\sqrt{2}A}{c\sqrt{x}} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \Lambda \right) f(\eta) - \frac{A \ln z}{c\sqrt{2x}} \varphi(\eta) \quad (1.1)$$

$$h_y = \frac{\sqrt{2}A}{c\sqrt{x}} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \Lambda \right) \varphi(\eta) - \frac{A \ln z}{c\sqrt{2x}} f(\eta) \quad (1.2)$$

$$z = \left| \frac{L + \sqrt{2L} \sqrt{(x^2 + y^2)^{1/2} + x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{L - \sqrt{2L} \sqrt{(x^2 + y^2)^{1/2} + x + \sqrt{x^2 + y^2}}} \right|, \quad \Lambda = \frac{L - (x^2 + y^2)^{1/2}}{\sqrt{2L} \sqrt{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}} \quad (1.3)$$

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{(1 + \eta^2)^{1/2} + 1}{1 + \eta^2}}, \quad \varphi(\eta) = \sqrt{\frac{(1 + \eta^2)^{1/2} - 1}{1 + \eta^2}}, \quad \eta = \frac{y}{x} \quad (1.4)$$

Перед ударной волной проводимость  $\sigma$  предполагается равной нулю, а за ударной волной проводимость газа, обусловленная термической ионизацией, конечна, так что магнитное число Рейнольдса  $R_m = 4\pi\sigma U_\infty L/c^2 \ll 1$ . Постановка задачи, таким образом, аналогична [1] (отличие заключается в выборе магнитного поля, которое предполагается в работе [1] постоянным, направленным перпендикулярно к поверхности тела). Решение строится для течения с присоединенной ударной волной, когда поток около верхней и нижней поверхностей клина можно рассчитывать независимо. Индуцированным магнитным полем, посредством которого могли бы взаимодействовать эти течения, как следует из дальнейшего, можно пренебречь.

Решение строится в окрестности вершины клина в области  $(x^2 + y^2)^{1/2} \leq l \ll L$ , в которой из уравнений (1.1) — (1.4) с относительной погрешностью порядка  $\sqrt{l/L}$  для заданного магнитного поля имеем

$$h_x = \frac{\sqrt{2}\pi A}{c\sqrt{x}} f(\eta), \quad h_y = \frac{\sqrt{2}\pi A}{c\sqrt{x}} \varphi(\eta) \quad (1.5)$$

Представим вектор суммарного магнитного поля в виде  $\mathbf{h} + \mathbf{h}'$ , где  $\mathbf{h}'$  — индуцированное магнитное поле. Для  $\mathbf{h}'$  из выражения для закона Ома с учетом отсутствия электрического поля получим зависимость

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}' = R_m \mathbf{V} \times (\mathbf{h} + \mathbf{h}')$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор скорости, отнесенный к  $U_\infty$ , независимые переменные  $x$  и  $y$  отнесены к  $L$ . Используя представление через ньютонов потенциал, можно показать, что величина  $\mathbf{h}'$ , конечная всюду, имеет порядок в области возмущенного потока  $R_m A / c\sqrt{L}$ . Таким образом, в рассматриваемой области вблизи вершины клина отношение  $\mathbf{h}' / \mathbf{h}$  индуцированного и наложенного полей имеет порядок  $\sqrt{l/L}$ . Отсюда следует, что влиянием конечности  $L$  и индуцированного магнитного поля можно пренебречь с одной и той же погрешностью порядка  $\sqrt{l/L}$ .

Уравнения магнитной гидродинамики за ударной волной имеют вид в размерных переменных (для простоты газ считается совершенным)

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma h_y}{\rho} (v h_x - u h_y) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\sigma h_x}{\rho} (u h_y - v h_x) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} \left[ 1 + \frac{2}{(\kappa - 1) M_\infty^2} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $u, v$  — составляющие вектора скорости вдоль осей  $x, y$  соответственно,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\sigma$  — удельная электропроводность,  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока. В дальнейшем предполагается, что  $\sigma$  — постоянная величина во всей области возмущенного потока и  $M_\infty = \infty$ . Следует отметить, что предположения ( $\sigma = \text{const}$ ,  $M_\infty = \infty$ , совершенный газ) не являются обязательными для существования автомодельного решения и сделаны лишь для упрощения исследования.

Предполагая, что магнитное поле задано уравнениями (1.5), а краевые условия для гидродинамических величин сводятся к условию непротекания на теле и обычным «немагнитным» соотношениям на ударной волне<sup>[1]</sup>, и используя анализ размерности<sup>[2]</sup>, легко убедиться в существовании автомодельного решения уравнений (1.6), в котором вектор скорости, давление и плотность постоянны на лучах, проходящих через вершину клина, т. е. зависят от  $\eta = \text{tg } \varphi = y/x$ , где  $\varphi$  — угол наклона луча с осью  $x$ . При этом угол  $\theta_0$  наклона косога скачка, исходящего из вершины клина (фиг. 1), определяется в процессе решения.

Исключим из уравнений (1.6) при помощи последнего уравнения давление и отнесем скорости и плотность к их значениям в невозмущенном потоке, сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных. В результате, переходя к независимой переменной  $\eta$ , получим систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ )

$$u' = \frac{q\gamma P_1}{\rho\beta\Delta}, \quad v' = \frac{q\gamma P_2}{\rho\beta\Delta}, \quad \rho' = \frac{q\gamma P_3}{\beta\Delta} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\gamma = fv - \varphi u, \quad \beta = v - \eta u, \quad \Delta = \beta^2 - (1 + \eta^2) a^2$$

$$P_1 = \mu (a^2 - v\beta) + \kappa\beta\gamma\eta \quad \left( a^2 = \frac{\kappa-1}{2} (1 - u^2 - v^2) \right)$$

$$P_2 = \mu (a^2\eta + u\beta) - \kappa\beta\gamma, \quad P_3 = -\mu (u + v\eta) + \kappa\gamma (1 + \eta^2) \quad (1.8)$$

$$q = \frac{2\sigma A^2 \pi^2}{c^4 \rho_\infty U_\infty} \quad \left( \mu = f\eta - \varphi = \sqrt{(1 + \eta^2)^{1/2} - 1} \right)$$

где  $f(\eta)$  и  $\varphi(\eta)$  определяются согласно (1.4), интенсивность магнитного поля характеризуется безразмерным параметром  $q > 0$ ,  $\rho_\infty$  — плотность невозмущенного потока.

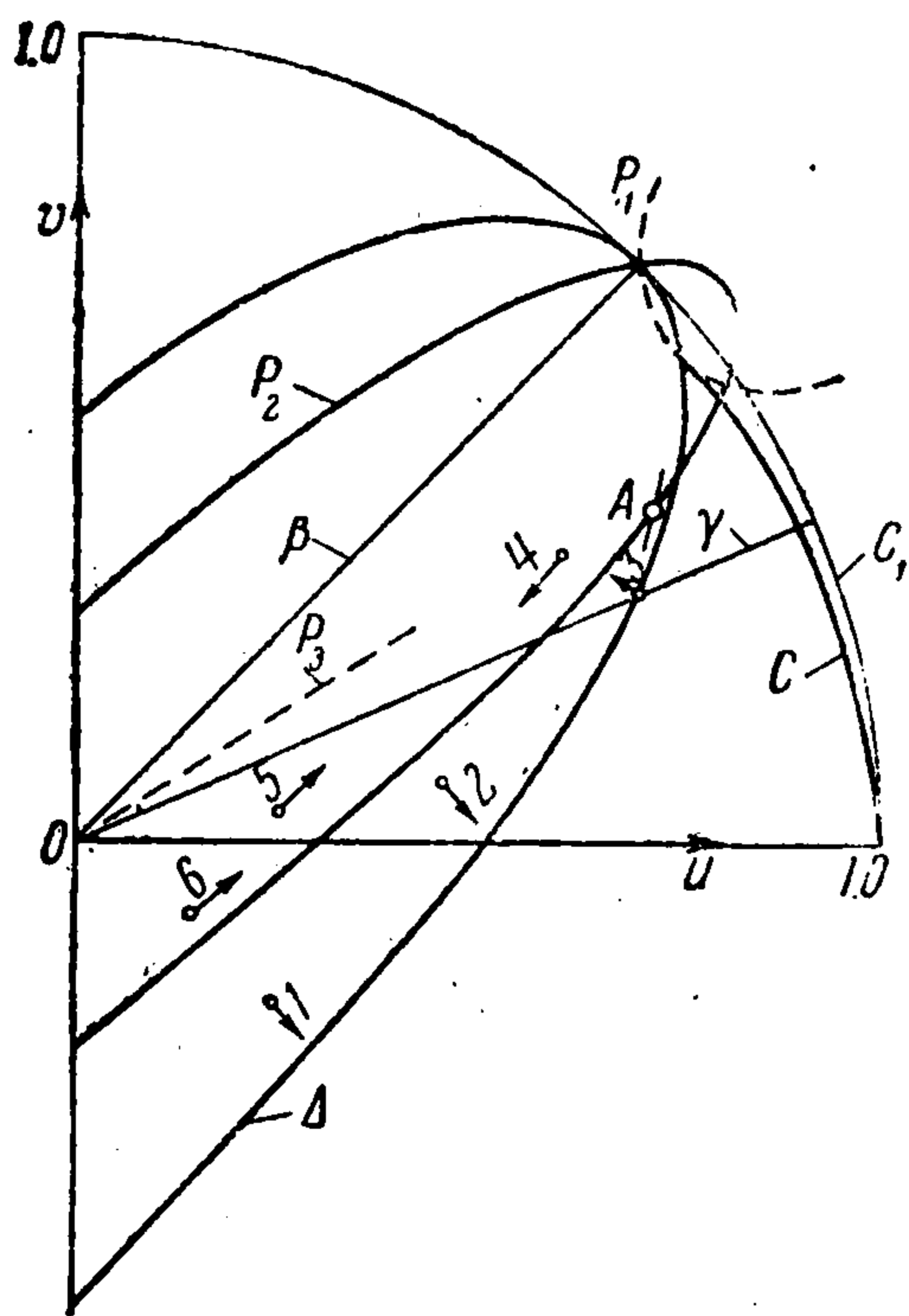
Следует отметить, что существует аналогичное автомодельное решение для осесимметрического потока при обтекании конуса, по поверхности которого в азимутальном направлении текут поверхностные токи, плотность которых, как и в плоском случае, обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния от вершины конуса.

2. Исследование системы (1.7) удастся провести при помощи перехода к плоскости годографа скорости, на которой рассматривается движение изображающей точки  $V$  с координатами  $u$  и  $v$  при изменении  $\eta$ . Решение имеет смысл внутри круга единичного радиуса  $C_1$ , где квадрат скорости звука  $a^2 > 0$ .

На плоскости  $uv$  задаются семейства (1.8) кривых  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , каждое из которых зависит от параметра  $\eta$ . (Здесь и ниже кривыми  $\beta$ ,  $\gamma$  и т. д. называются кривые, получаемые из уравнений  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  и т. д.) На кривых  $\beta$  и  $\Delta$  производные  $u'$ ,  $v'$ ,  $\rho'$  обращаются в бесконечность, т. е. эти линии являются особыми. На остальных кривых производные  $u'$ ,  $v'$ ,  $\rho'$  обращаются в нуль согласно (1.7). Рассматриваемые кривые на фиг. 2 изображены при некотором фиксированном значении  $\eta$ . Прямые  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $P_3$  проходят через начало координат (чтобы не загромождать чертеж, прямая  $P_3$  не доведена до  $C_1$ ). Их угловые коэффициенты — соответственно  $k_\beta$ ,  $k_\gamma$ ,  $k_3$  — выражаются следующим образом

$$k_\beta = \eta = \operatorname{tg} \varphi, \quad k_\gamma = \frac{\varphi}{f} = \frac{(1 + \eta^2)^{1/2} - 1}{\eta}$$

$$k_\beta > k_3 = k_\gamma \frac{\kappa(1 + \eta^2)^{1/2} + 1}{(\kappa - 1)(1 + \eta^2)^{1/2} + 1} > k_\gamma \quad (2.1)$$



Фиг. 2

(1.5) с осью  $x$ . Кривые  $\Delta$  и  $P_2$  — эллипсы,  $P_1$  — гипербола. Кривая  $\Delta$  представляет собой известный из теории характеристик эллипс Буземана (см., например, [3]), большая и малая полуоси которого равны соответственно 1 и  $(\kappa - 1)^{1/2} / (\kappa + 1)^{1/2}$ .

В рассматриваемой задаче большая полуось эллипса  $\Delta$  направлена вдоль линии  $\beta$ , т. е. составляет с осью  $u$  угол  $\varphi$ , равный углу наклона соответствующего луча в физической плоскости с осью  $x$ . Если точка  $V$ , расположенная, как следует из дальнейшего, всегда ниже прямой  $\beta$ , лежит внутри, на эллипсе или вне эллипса  $\Delta$ , то это означает, что угол наклона характеристики первого семейства с осью  $x$  соответственно больше, равен или меньше  $\varphi$ . Это является следствием того обстоятельства, что характеристическое уравнение в физической плоскости, получаемое из (1.6), имеет тот же вид, что и в обычной гидродинамике.

У эллипса  $P_2$  при изменении  $\eta$  от 0 до  $\infty$  большая полуось поворачивается против часовой стрелки и уменьшается от  $2\kappa / (3\kappa + 1)^{1/2}$  до 1, а малая растет от 0 до  $(\kappa - 1)^{1/2} / (\kappa + 1)^{1/2}$ . При  $\eta \rightarrow \infty$  эллипс  $P_2$  совпадает с  $\Delta$ . Эллипс  $P_2$  пересекается с  $C_1$  дважды: на линии  $\beta$  и на луче, угловым коэффициентом которого равен  $k_2$ .

Гипербола  $P_1$  пересекается с окружностью  $C_1$  на линии  $\beta$  и на луче, угловым коэффициентом которого равен  $k_1$ , где

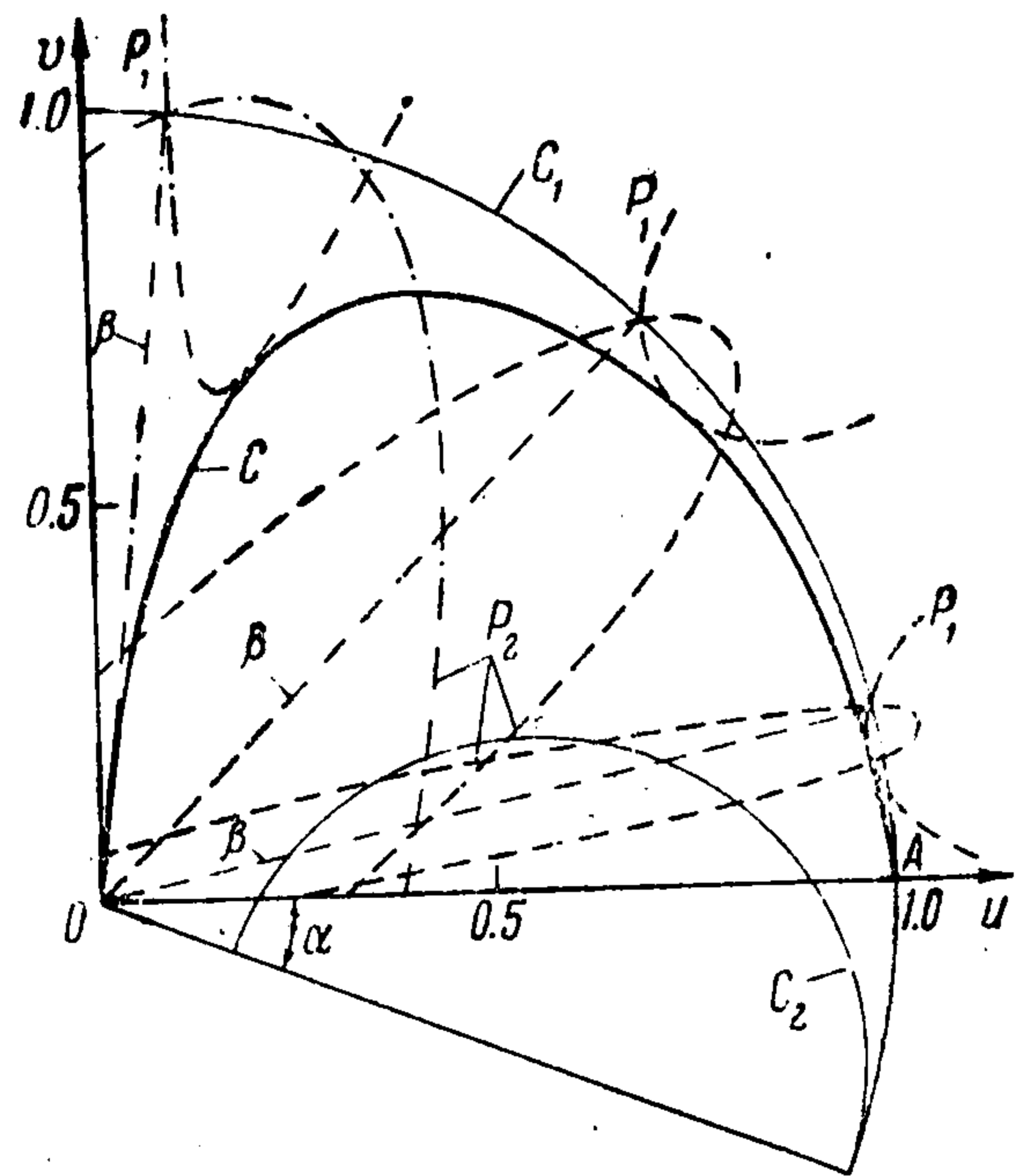
$$k_1 = \frac{\kappa\eta}{(\kappa - 1)(1 + \eta^2)^{1/2} + \kappa} < k_2 = \frac{[(1 + \eta^2)^{1/2} - 1][(1 + \eta^2)^{1/2} + \kappa]}{\kappa\eta} \quad (2.2)$$

При  $\eta = 0$  вершина гиперболы лежит в точке  $u = 1, v = 0$ , а ее ось совпадает с осью  $u$

$$u^2 - \frac{3\kappa - 1}{\kappa - 1} v^2 = 1 \quad (2.3)$$

С ростом  $\eta$  ось гиперболы поворачивается против часовой стрелки, а вершина приближается к началу координат: При  $\eta \rightarrow \infty$  гипербола  $P_1$  вырождается в пару прямых:  $u = 0, v = \kappa u / (\kappa - 1)$ . На фиг. 3 изображены  $\beta, P_1$  и  $P_2$  при  $\eta = 0.2$  (мелкий пунктир),  $\eta = 1$  (крупный пунктир) и  $\eta = 10$  (штрих-пунктир)<sup>1</sup>. Здесь же показана огибающая гипербол  $P_1$  (линия  $C$  на фиг. 2, 3). Можно показать, что строфоида<sup>2</sup> (окружность  $C_2$  на фиг. 3), построенная для любого положительного значения угла  $\alpha$ , образованного вектором скорости невозмущенного потока с осью  $x$  и дающая состояние потока за ударной волной при изменении угла  $\theta_0$  (фиг. 1), всегда лежит внутри огибающей, нигде с ней не пересекаясь. Исключением может быть лишь точка  $A$  (фиг. 3), в которой при  $\alpha = 0$  строфоида касается огибающей изнутри. Уравнения огибающей и строфоиды (при  $\alpha = 0$ ) вблизи точки  $A$  записываются соответственно в виде

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{3\kappa - 1}{4\kappa} v^2 + O(v^4) \\ u &= 1 - \frac{\kappa + 1}{2} v^2 + O(v^4) \end{aligned} \quad (2.4)$$



Фиг. 3

3. Величины непосредственно за ударной волной будем всюду характеризовать индексом 0. Так как, очевидно, за волной угол наклона вектора скорости с осью  $x$  меньше  $\theta_0$ , имеем  $\beta_0 < 0$ , т. е. изображающая точка  $V_0$  непосредственно за волной лежит ниже прямой  $\beta$ . Эта точка, кроме того, лежит внутри  $\Delta$ , так как при сверхзвуковой скорости за волной угол наклона характеристики первого семейства больше  $\theta_0$ , а при дозвуковой скорости  $V$  всегда лежит внутри эллипса Буземана. Таким образом, за ударной волной точка  $V_0$  может лежать в одной из шести областей (фиг. 2). Внутри каждой из областей производная  $dv/du$  вдоль интегральной кривой (1.7) не меняет знака. Направление движения точки  $V$  при уменьшении  $\eta$ , т. е. при движении от ударной волны к телу, указано на фиг. 2 в каждой из областей стрелкой. Отметим, что  $P_3$  не является границей области. Кроме того, согласно п. 2, в области 4 точка  $V_0$  лежит вне гиперболы  $P_1$ . Докажем несколько теорем о движении  $V$ .

а) Из уравнений (1.7) и (1.8) для величины  $\gamma$  вдоль интегральной кривой имеем на линии  $\gamma$

$$\left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)_{\gamma=0} = - \frac{v}{(1 + \eta^2) [(1 + \eta^2)^{1/2} - 1]^{1/2}} < 0 \quad (3.1)$$

в предположении  $v > 0$  и  $\eta > 0$ . Отсюда следует, что при движении от ударной волны к телу, т. е. при уменьшении  $\eta$ , величина  $\gamma$  не может

<sup>1</sup> Здесь и ниже все построения и расчеты выполняются при  $\kappa = 1.4$ .

<sup>2</sup> Как известно, при  $M_\infty = \infty$  строфоида вырождается в окружность.

изменить знака с положительного на отрицательный (переход в обратном направлении может иметь место).

б) Интегральная кривая нигде при  $\eta > 0$  не достигает линии  $\beta$ . Доказательство поведем от противного. Пусть в некоторой точке (характеризуем ее индексом  $*$ ) величина  $\beta$  обратилась в нуль. Запишем вспомогательные равенства, следующие из уравнений (1.7), (1.8):

$$\frac{d \ln \rho}{du} = \frac{P_3}{P_1}, \quad \left( \frac{q\gamma P_3}{\rho \Delta} + u \right) \frac{du}{d\beta} = - \frac{q\gamma P_1}{\rho \beta \Delta} \quad (3.2)$$

Выберем на рассматриваемой интегральной кривой в непосредственной близости от точки  $\eta_*$  другую точку, которую будем характеризовать индексом  $**$ . Как следует из п. 2, в интервале  $\eta_* \eta_{**}$  величины  $P_1, P_2, P_3, \Delta, \gamma$  нигде не обращаются в нуль и не меняют знака.

Из первого уравнения (3.2) для  $\rho$  имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_{**}} = \int_{\eta_{**}}^{\eta} \frac{P_3}{P_1} du \quad (3.3)$$

где интеграл в правой части (3.3) заведомо сходится, т. е.  $\rho$  является конечной величиной в замкнутом интервале  $\eta_* \eta_{**}$ . Далее, из второго уравнения (3.2) имеем

$$\int_{u_{**}}^u \frac{q\gamma P_3 + \rho u \Delta}{q\gamma P_1} du = \ln \frac{\beta_{**}}{\beta} \quad (3.4)$$

Устремляя  $u \rightarrow u_*$ , приходим к противоречию: левая часть равенства (3.4) остается конечной, а правая — неограниченно возрастает, так как  $\beta_* = 0$ , что и доказывает теорему.

в) Интегральная кривая не может пересечь линию  $P_2$  при движении точки  $V$  изнутри эллипса. Допустим от противного, что в точке  $A$  произошло пересечение интегральной кривой с эллипсом  $P_2$  (фиг. 2). Так как угловой коэффициент касательной к  $P_2$  положителен в рассматриваемой области, то и вдоль интегральной кривой  $dv/du > 0$  в точке  $A$ . С другой стороны, из первого и второго уравнений (1.7) следует  $dv/du = 0$  в этой точке. Противоречие доказывает сделанное выше утверждение.

г) В области 4 интегральная кривая не пересекает линии  $P_1$ . Пересечение, очевидно, могло бы произойти при достаточно большом значении  $\eta$ , когда вершина гиперболы близка к началу координат. Доказательство, аналогичное предыдущему, опирается на первые два уравнения (1.7).

д) Плотность  $\rho$  всюду, кроме двух точек пересечения линий  $P_1$  и  $P_2$ , отлична от нуля и бесконечности. Это следует из уравнения (3.3), так как подынтегральное выражение в правой части (3.3) конечно. Если интегральная кривая пересекает линию  $P_1$  в точке интервала  $\eta \eta_{**}$ , то вместо (3.3) в окрестности этой точки используется аналогичное уравнение

$$\ln \frac{\rho}{\rho_{**}} = \int_{\eta_{**}}^{\eta} \frac{P_3}{P_2} dv \quad (3.5)$$

е) Эллипс  $\Delta$  является предельной линией для решения уравнений (1.7). Действительно, пусть в некоторой точке, характеризуемой индексом  $*$ , лежащей на границе областей 1 или 2 (фиг. 2), интегральная кривая пересекает линию  $\Delta$ . В окрестности этой точки имеем  $\Delta = (u - u_*) \omega$ , где

$\omega = \omega(u, v, \eta)$ ,  $\omega_* > 0$ . Первое уравнение (1.7) может быть записано

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{\Omega}{u - u_*}, \quad \Omega = \frac{q\gamma P_1}{\rho\beta\omega}, \quad \Omega_* > 0 \quad (3.6)$$

Решение (3.6) в окрестности особой точки имеет вид

$$|u - u_*| = \sqrt{2\Omega_*(\eta - \eta_*)}$$

т. е. не может быть продолжено в область  $\eta < \eta_*$ .

4. Рассмотрим поведение интегральных кривых, когда  $V$  лежит в области 4. На основании теорем (п. 3, а, б, в) при  $\eta > 0$  интегральная кривая не может выйти из области 4. С уменьшением  $\eta$  составляющие скорости  $u$  и  $v$  монотонно уменьшаются. Как следует из дальнейшего (п. 7), при  $\eta \rightarrow 0$ , когда область 4 вырождается в отрезок оси  $u$ , нельзя получить решение, для которого изображающая точка, оставаясь внутри области 4, стремится к некоторой точке с координатами  $v = 0$ ,  $u = u_1 \neq 0$ . Таким образом, в области 4 следует искать решение уравнений (1.7), для которого  $\lim u = 0$  и  $\lim v = 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Запишем при  $\eta$ , близком к нулю, систему (1.7) в упрощенном виде, разлагая  $f(\eta)$  и  $\phi(\eta)$  в ряды и удерживая первые члены, и используя, кроме того, малость  $u$  и  $v$ .

В результате получаем

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{q(v - 0.5\eta u)\eta}{\rho(v - \eta u)} \\ v' &= \eta u', \quad \rho' = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

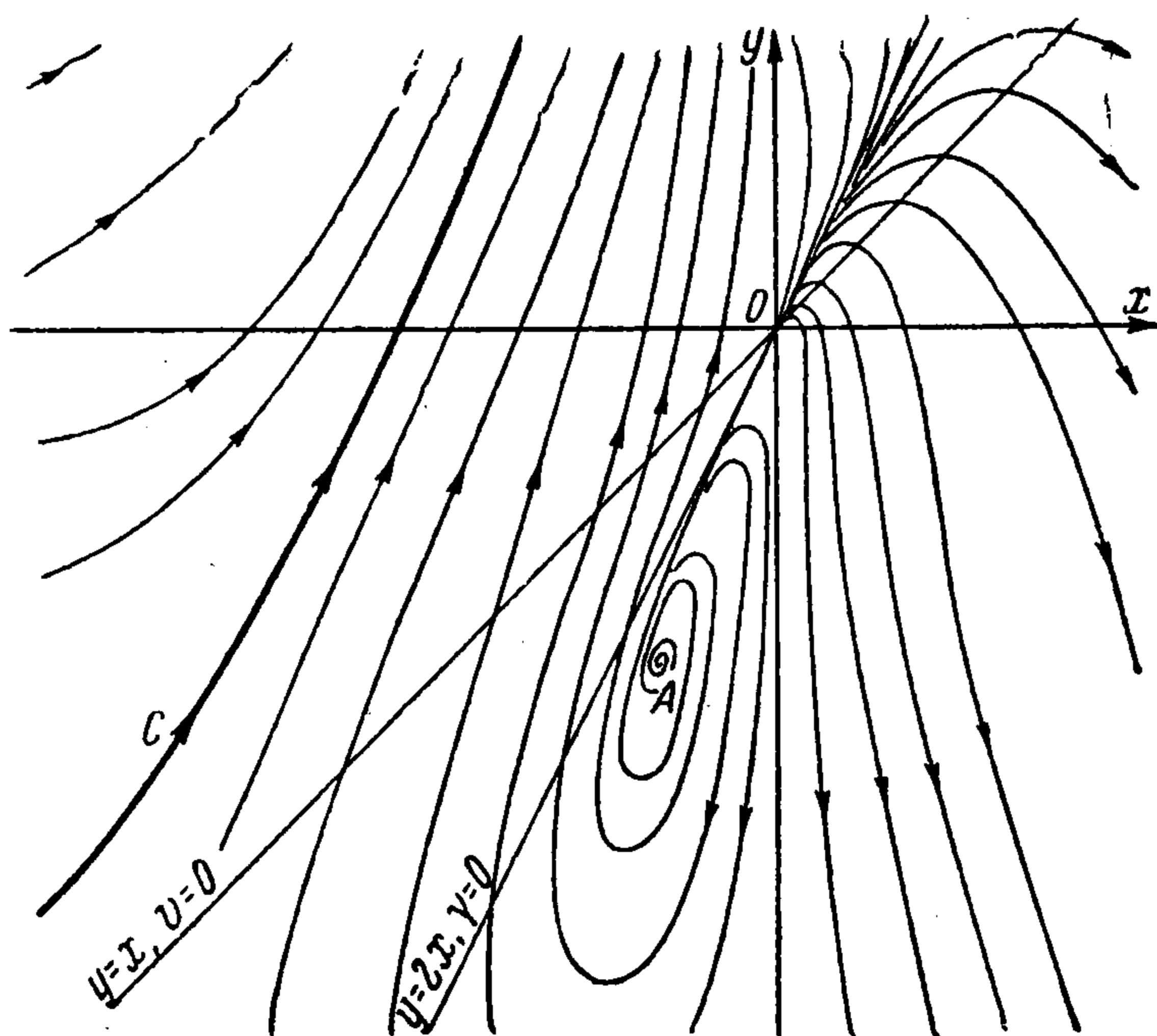


Рис. 4

Вводя в качестве искомой функции  $\beta$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} \beta\beta'' + \frac{\delta}{2}\beta'\eta^2 - \delta\beta\eta &= 0, \quad u = -\beta', \quad v = \beta + \eta u \\ \rho &= \rho_1 = \text{const}, \quad \delta = \frac{q}{\rho_1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первое уравнение (4.2) для  $\beta$  допускает групповое преобразование и может быть сведено к уравнению первого порядка относительно величин  $x = \beta / \eta^3$ ,  $y = \beta' / \eta^2$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta(0.5y - x) + 2xy}{x(3x - y)}, \quad \frac{d \ln \eta}{dx} = \frac{1}{y - 3x} \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3), картина интегральных кривых которого показана на фиг. 4 (стрелками указано направление возрастания  $\eta$ ), имеет две особые точки: точка  $O$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$  — слившиеся седло и узел) и  $A$  ( $x = -\delta / 12$ ,  $y = -\delta / 4$  — фокус). Область 4 на этой фигуре лежит в третьем квадранте внутри угла, образованного прямыми  $y = 2x$  (что соответствует с принятой точностью  $\gamma = 0$ ) и  $x = 0$  ( $\beta = 0$ ). Интегральные кривые, вошедшие в эту область, оставаясь, в соответствии с доказанными теоремами, внутри области 4, стремятся к точке  $A$ . Последняя дает

аналитическое решение (4.3), удовлетворяющее условию непротекания

$$u = \frac{\delta}{4} \eta^2, \quad v = \frac{\delta}{6} \eta^3, \quad \rho = \rho_1 = \text{const} \quad (4.4)$$

Для нахождения остальных решений вблизи особой точки преобразуем первое уравнение (4.3), предполагая  $x = -\delta/12 + \xi$ ,  $y = -\delta/4 + \zeta$ , где  $\xi$  и  $\zeta$  — малые величины. Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\sqrt{(\zeta - 3.5\xi)^2 + 5.75\xi^2} e^{\varphi/\sqrt{23}} = \text{const}, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{2(\zeta/\xi - 3.5)}{\sqrt{23}} \quad (4.5)$$

Из (4.5) и второго уравнения (4.3) получим ( $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные)

$$\frac{\beta}{\eta^3} + \frac{\delta}{12} = \frac{\nu C_1 \sqrt{\eta}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \chi}}, \quad \chi = \sqrt{23} \ln \frac{C_2}{\sqrt{\eta}}, \quad \nu = \frac{\cos \chi}{|\cos \chi|} \quad (4.6)$$

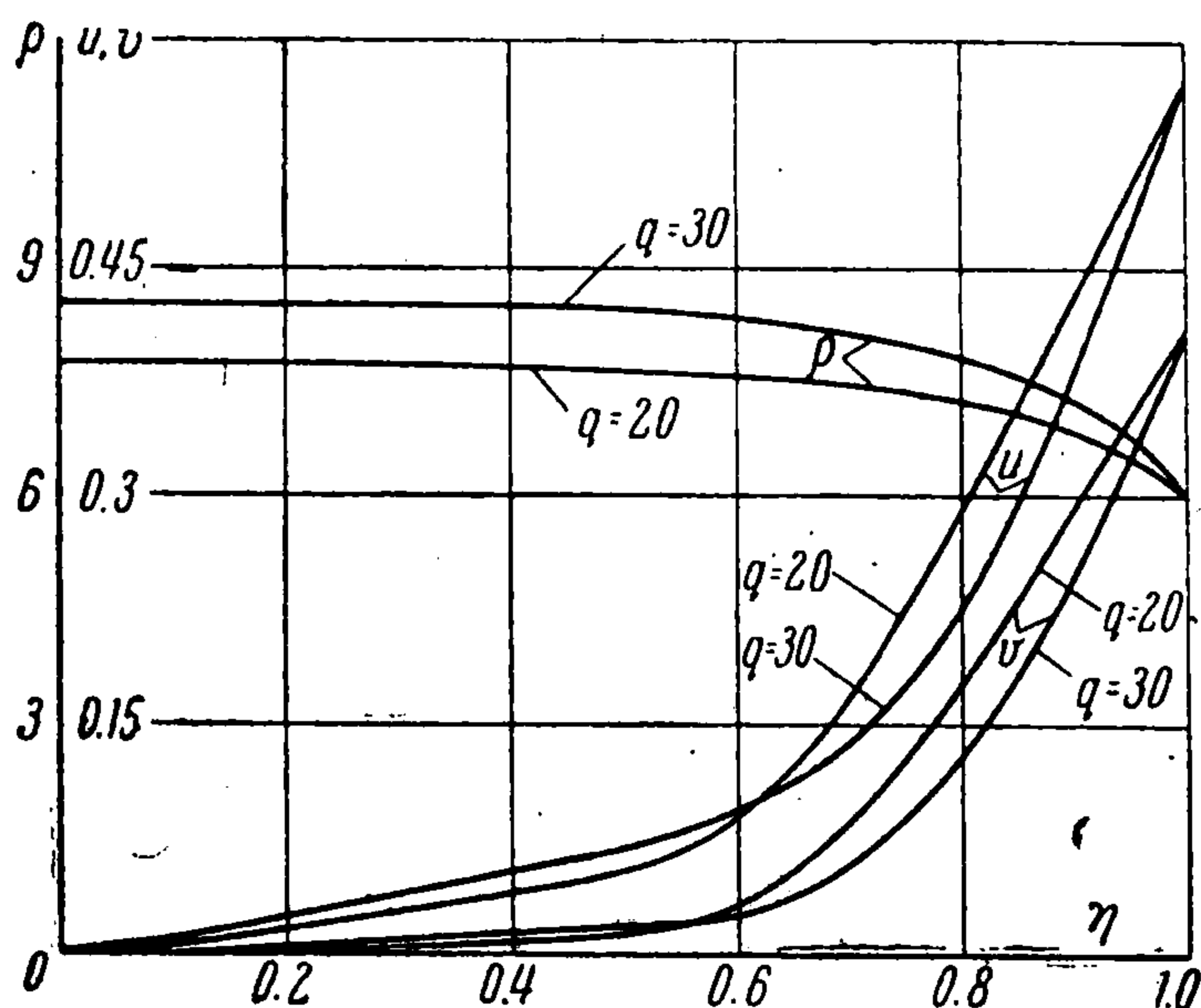
Пользуясь (4.2) и (4.6), находим выражения для  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ , подставляя которые в исходные уравнения (1.7), убеждаемся, что решение (4.6) уравнений (4.1) действительно дает

главные члены асимптотических разложений точного решения вблизи особенности. Из (1.7) можно получить следующие члены разложений. Так, при  $C_1 = 0$ , когда решение (4.6) переходит в (4.4), можно получить решение в виде степенных рядов

$$u = \frac{\delta}{4} \eta^2 - \frac{15\delta}{64} \eta^4 + \dots$$

$$v = \frac{\delta}{6} \eta^3 - \frac{3\delta}{16} \eta^5 + \dots$$

$$\rho = \rho_1 \left( 1 - \frac{3 - \kappa \delta^2 \eta^4}{\kappa - 1} \frac{1}{48} + \dots \right) \quad (4.7)$$



Фиг. 5

Аналогично можно получить решения и при  $C_1 \neq 0$ , когда они не являются при  $\eta = 0$  аналитическими функциями.

Итак, общее решение в области 4, удовлетворяющее условию непротекания при  $\eta = 0$ , зависит от произвольных постоянных величин  $\rho_1 > 0$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Для этого решения не только  $v$ , но и  $u$  обращаются в нуль на поверхности тела. При помощи двух условий на ударной волне, связывающих три неизвестные функции  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ , можно исключить зависимость от двух параметров, представив решение в зависимости от одного параметра, в качестве которого можно взять, например, угол наклона<sup>1</sup> ударной волны  $\theta_0$  при фиксированном  $q$ , или  $q$  при фиксированном  $\theta_0$ . При этом  $q$  может меняться от 0 до  $\infty$  (в п. 5 рассмотрен случай  $q = \infty$ , когда решение (4.7) неприменимо). Таким образом, решение поставленной краевой задачи в области 4 является многозначным. На фиг. 5 представлен пример расчета для случая  $\alpha = 0$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $q = 20$  и  $q = 30$ .

Решение, соответствующее нулевой скорости на стенке, будем называть решением II.

<sup>1</sup> Разумеется,  $\theta_0$  таково, что  $V_0$  лежит в области 4.

5. Очевидно, что когда  $V$  лежит в области 3 (фиг. 2), то при уменьшении  $\eta$  произойдет] переход  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$  (так будем обозначать переход из одной области в другую, и стремление изображающей точки к началу координат при  $\eta \rightarrow 0$ ), т. е. решение в области 3 также многозначно.

6. Для завершения исследования решения в областях 4 и 3 и для дальнейшего необходимо знать поведение интегральных кривых в предельном случае  $q = \infty$ . Для этого преобразуем (1.7) к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{P_2}{P_1}, \quad \frac{d \ln \rho}{du} = \frac{P_3}{P_1}, \quad \frac{d\eta}{du} = \frac{\rho \beta \Delta}{q \gamma P_1} \quad (6.1)$$

Устремляя  $q \rightarrow \infty$  и предполагая  $P_1 \neq 0$ , разберем два случая.

(а) Случай  $\gamma \neq 0$

$$\frac{dv}{du} = \frac{P_2}{P_1}, \quad \frac{d \ln \rho}{du} = \frac{P_3}{P_1}, \quad \eta = \eta_0 = \text{const} \quad (6.2)$$

(б) Случай  $\gamma = 0$ . Подставляя в первое и второе уравнения (6.1)  $\eta = 2uv / (u^2 - v^2)$  из условия  $\gamma = 0$  и пользуясь (1.4), (1.8), получаем

$$\frac{dv}{du} = \frac{2uv [1 - \kappa (\kappa - 1)^{-1} (u^2 + v^2)]}{u^2 - v^2 + (u^2 + v^2) [(\kappa + 1) (\kappa - 1)^{-1} v^2 - u^2]} \quad (6.3)$$

$$\frac{d \ln \rho}{du} = \frac{2u (u^2 + v^2)}{(\kappa - 1) \{u^2 - v^2 + (u^2 + v^2) [(\kappa + 1) (\kappa - 1)^{-1} v^2 - u^2]\}} \quad (6.4)$$

В случаях (а) и (б) уравнения в плоскости годографа являются замкнутыми. Интегральные кривые при  $\gamma \neq 0$  описываются первым уравнением 6.2) до тех пор, пока интегральная кривая не пересечется с линией  $\gamma = 0$ , после чего используется (6.3). Если же такого пересечения не произойдет, (то интегральная кривая пересечется с линией  $\Delta$ , что говорит об отсутствии решения с принятыми начальными данными (п. 3, е). При переходах  $4 \rightarrow 0$  или  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$  изображающая точка  $V$  после пересечения между интегральной кривой и линией  $\gamma$  движется по «верхнему берегу» разреза  $\gamma = 0$ , стремясь при уменьшении  $\eta$  до нуля к началу координат, в окрестности которого главные члены разложения решения (6.3), (6.4) приобретают вид

$$v = Au^2, \quad \rho = \rho_1 \left(1 - \frac{u^2}{\kappa - 1}\right), \quad \eta = 2Au, \quad A = \text{const} \quad (6.5)$$

отличный от соответствующего решения (4.7) при конечном  $q$ .

7. Рассмотрим решение в области 2. При малом значении  $q$ , когда точка  $V$  почти не смещается при уменьшении  $\eta$ , пока не достигает окрестности линии  $\beta$ , осуществляются, очевидно, переходы  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$  или  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .

Как показывает анализ, точка  $S$  пересечения линий  $\gamma$  и  $\Delta$  является подвижным узлом для уравнений (1.7). При фиксированном  $q$  с уменьшением  $\eta$  изображающая точка удаляется от точки  $S$ . Если  $q$  достаточно велико, то интегральная кривая в области 2 пересекается с линией  $\Delta$ , т. е. в решении появляется предельная линия. Если уменьшить  $q$ , то интегральная кривая пересечется с линией  $\Delta$  при меньшем значении  $\eta$ .

Существует  $q = q_*$ , когда интегральная кривая целиком лежит в области 2, причем при  $\eta$ , стремящемся к нулю,  $v \rightarrow 0$  и  $u \rightarrow u_1 \neq 0$  (при  $q < q_*$  реализуется решение II). Рассмотрим решение при подходе интегральной кривой к оси  $u$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Для этого упростим уравнения (1.7), предпо-

лагая  $v$  и  $\eta$  малыми величинами. В результате получим

$$u' = -\frac{q(v - 0.5\eta u_1)\eta}{\rho(v - \eta u_1)} \quad (7.1)$$

$$v' = -\frac{q(v - 0.5\eta u_1)}{\rho(v - \eta u_1)(1 - u_1^2)} \left[ \left(1 - \frac{3\kappa + 1}{\kappa - 1} u_1^2\right) \eta^2 + \frac{2(3\kappa + 1)}{\kappa - 1} u_1 v \eta - \frac{4\kappa v^2}{\kappa - 1} \right] \quad (7.2)$$

$$\rho' = \frac{2q(v - 0.5\eta u_1)[(\kappa + 1)\eta u_1 + 2\kappa v]}{(\kappa - 1)(v - \eta u_1)(1 - u_1^2)} \quad (7.3)$$

Уравнения (7.1) — (7.3) имеют асимптотическое решение при  $\eta \rightarrow 0$ , удовлетворяющее условию непротекания, главные члены которого записываются

$$\begin{aligned} u &= u_1 - \frac{q\eta^2}{4\rho_1}, \\ v &= \frac{q\eta^3}{6\rho_1(1 - u_1^2)} \left[ \frac{3\kappa + 1}{\kappa - 1} u_1^2 - 1 \right] \\ \rho &= \rho_1 \left[ 1 + \frac{q(\kappa + 1)u_1\eta^2}{\rho_1(\kappa - 1)(1 - u_1^2)} \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Решение в области 2 возможно при  $u_1^2 > (\kappa - 1)/(3\kappa + 1)$ , когда интегральные кривые подходят к оси  $u$  при  $\eta \rightarrow 0$  сверху, что будет обозначать  $2 \rightarrow u_+$ . При  $u_1^2 < (\kappa - 1)/(3\kappa + 1)$  интегральные

кривые могут подойти к оси  $u$  при  $\eta \rightarrow 0$  снизу из области 6, что будет обозначать  $6 \rightarrow u_-$ .

Для исследования характера особенности на оси  $u$  положим  $\rho = \rho_1$  в уравнении (7.2). Интегральные кривые этого уравнения в плоскости  $v\eta$  представлены на фиг. 6. Фиг. 6, а, соответствует случаю  $u_1^2 > (\kappa - 1)/(3\kappa + 1)$ , а фиг. 6, б — случаю  $u_1^2 < (\kappa - 1)/(3\kappa + 1)$ . Кривые  $C$  соответствуют решению (7.4), зависящему от двух параметров. Если  $1 > u_1 > \sqrt{(\kappa - 1)/\kappa}$ , то на фиг. 6, а линия  $P_2$  лежит<sup>1</sup> выше  $\gamma$  и кривая  $C$  отделяет интегральные кривые  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ , идущие выше  $C$ , от кривых  $2 \rightarrow 1$ . Если  $\sqrt{(\kappa - 1)/\kappa} > u_1 > \sqrt{(\kappa - 1)/(3\kappa + 1)}$ , то линия  $P_2$  лежит ниже  $\gamma$  и кривая  $C$  отделяет кривые  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$  от кривых  $2 \rightarrow 1$ . Аналогично<sup>2</sup> на фиг. 6, б кривая  $C$  отделяет кривые  $6 \rightarrow 1$  от кривых  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . Особая точка на оси  $u$  имеет, таким образом, характер седла, в которое по особым направлениям входят кривые  $C$ .

Пользуясь уравнениями (1.7), можно уточнить решение (7.4), найдя следующие члены разложения в ряд по  $\eta$ . Например, выражение для  $v$  при  $u_1^2 = (\kappa - 1)/(3\kappa + 1)$  приобретает следующий вид:

$$v = \frac{q}{10\sqrt{2}(\kappa + 1)\rho_1} \left[ \kappa + \frac{q}{2\rho_1} \sqrt{\frac{(3\kappa + 1)^3}{\kappa - 1}} \right] \eta^5 \quad (7.5)$$

Так как решение (7.4) зависит от двух параметров, а на ударной волне имеются два условия, связывающие  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ , то в области 2 каждому значению  $q$  соответствует единственное решение I, удовлетворяющее условию непротекания в отличие от решения II, рассмотренного в п. 4.

<sup>1</sup> В принятом приближении в координатах  $v\eta$  линия  $P_2$ , как и  $\gamma$ , будет прямой.

<sup>2</sup> В других координатах кривая  $C$  представлена на фиг. 4 для случая  $1 - u_1^2 \approx 1$ .

При  $q_*$ , стремящемся к нулю, угол наклона ударной волны  $\theta_0$  стремится к своему «немагнитному» значению  $\theta_{00}$ . Изображающая точка за ударной волной лежит на оси  $u$  и не перемещается при уменьшении  $\eta$  до 0, т. е. решение в области 2 стремится к известному точному решению задачи обтекания клина (решение со слабым скачком).

На фиг. 7 представлен пример расчета для  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 11^\circ.3$  ( $\eta_0 = 0.2$ ). Величина  $q_* = 18.056$  выбиралась так, чтобы решение при  $\eta \rightarrow 0$  имело вид (7.4).

Решение (7.4) справедливо при конечном  $q$  и  $u_1 \neq 1$ . При  $q = \infty$  можно обеспечить выполнение условия непротекания при  $u_1 = 1$ . Для этого необходимо, чтобы  $V_0$  лежало в области 2 на «нижнем берегу» разреза  $\gamma = 0$ . При уменьшении  $\eta$  точка  $V$  будет двигаться по направлению к окружности  $C_1$  (фиг. 2). Решение уравнений (6.3), (6.4), удовлетворяющее условию непротекания, имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 1 - Cv^{\kappa-1} + \dots \\ \eta &= 2v(1 + Cv^{\kappa-1} + \dots) \\ \rho &= Bv(1 + 2Cv^{\kappa-1} + \dots) \end{aligned} \quad (7.6)$$

$C = \text{const} > 0, \quad B = \text{const} > 0$

Решение (7.6) может быть построено при  $\kappa \leq 3$ . Можно показать, что при  $\kappa > 3$  изображающая точка за волной не может оказаться на границе области 2 на линии  $\gamma$ . Существенно отметить, что при  $q = \infty$  плотность (а значит, и давление) на поверхности клина равны нулю.

8. Пользуясь предположением о сильном сжатии газа в ударной волне [4] (что эквивалентно, как известно, предположению  $\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1) \ll 1$ ), можно построить в области 2 приближенное решение при таких значениях  $q$ , когда решение при наличии магнитного поля мало отличается от соответствующего немагнитного решения. Используя соотношения для величин на ударной волне (фиг. 1) при  $\varepsilon \ll 1$

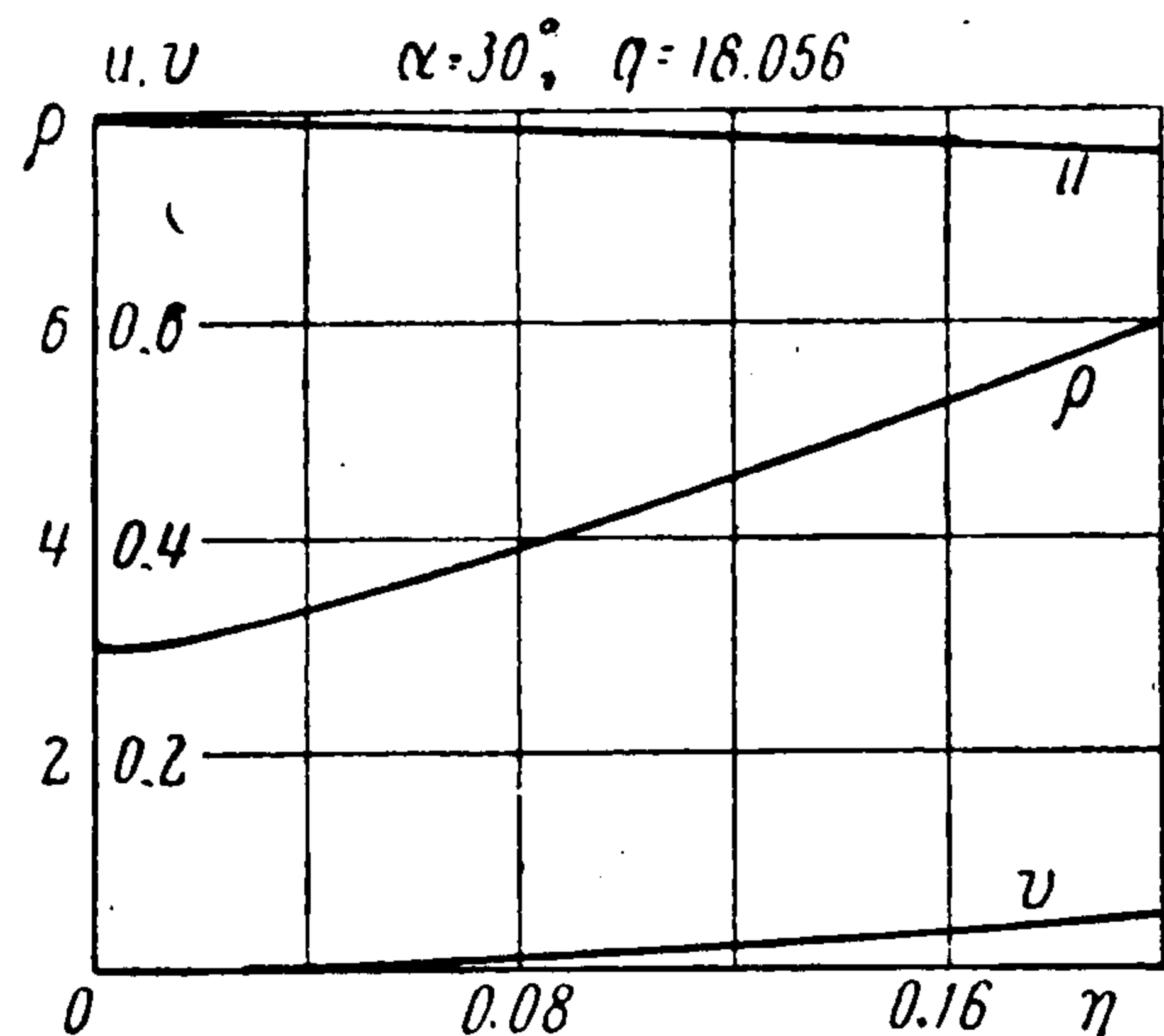
$$\begin{aligned} v_0 &= \theta_0(1 - \varepsilon) \cos \alpha - (\varepsilon + \theta_0^2) \sin \alpha, & u_0 &= (1 - \theta_0^2) \cos \alpha - (1 - \varepsilon) \theta_0 \sin \alpha \\ \rho_0 &= \varepsilon^{-1} \end{aligned} \quad (8.1)$$

исходя из (7.4), имеем с ошибкой порядка  $\varepsilon^3$

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \varepsilon \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{q\varepsilon^4 \sin \alpha [(3\kappa + 1) \cos^2 \alpha / (\kappa - 1) - 1]}{6 \cos^4 \alpha} \\ u &= \cos \alpha \left[ 1 - \varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{q\varepsilon}{4 \cos \alpha} (\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \eta^2) \right] \\ v &= \frac{\varepsilon q \eta^3 [(3\kappa + 1) \cos^2 \alpha / (\kappa - 1) - 1]}{6 \sin^2 \alpha}, & \rho &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{q \varepsilon^2}{\cos \alpha} \left( 1 - \frac{\eta^2}{\varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

Формулы (8.2) можно применять, когда  $q\varepsilon \leq 1$ , что следует из (7.4).

9. Когда точка  $V$  попадает в область 1, условию непротекания удовлетворить невозможно и решения краевой задачи не существует.

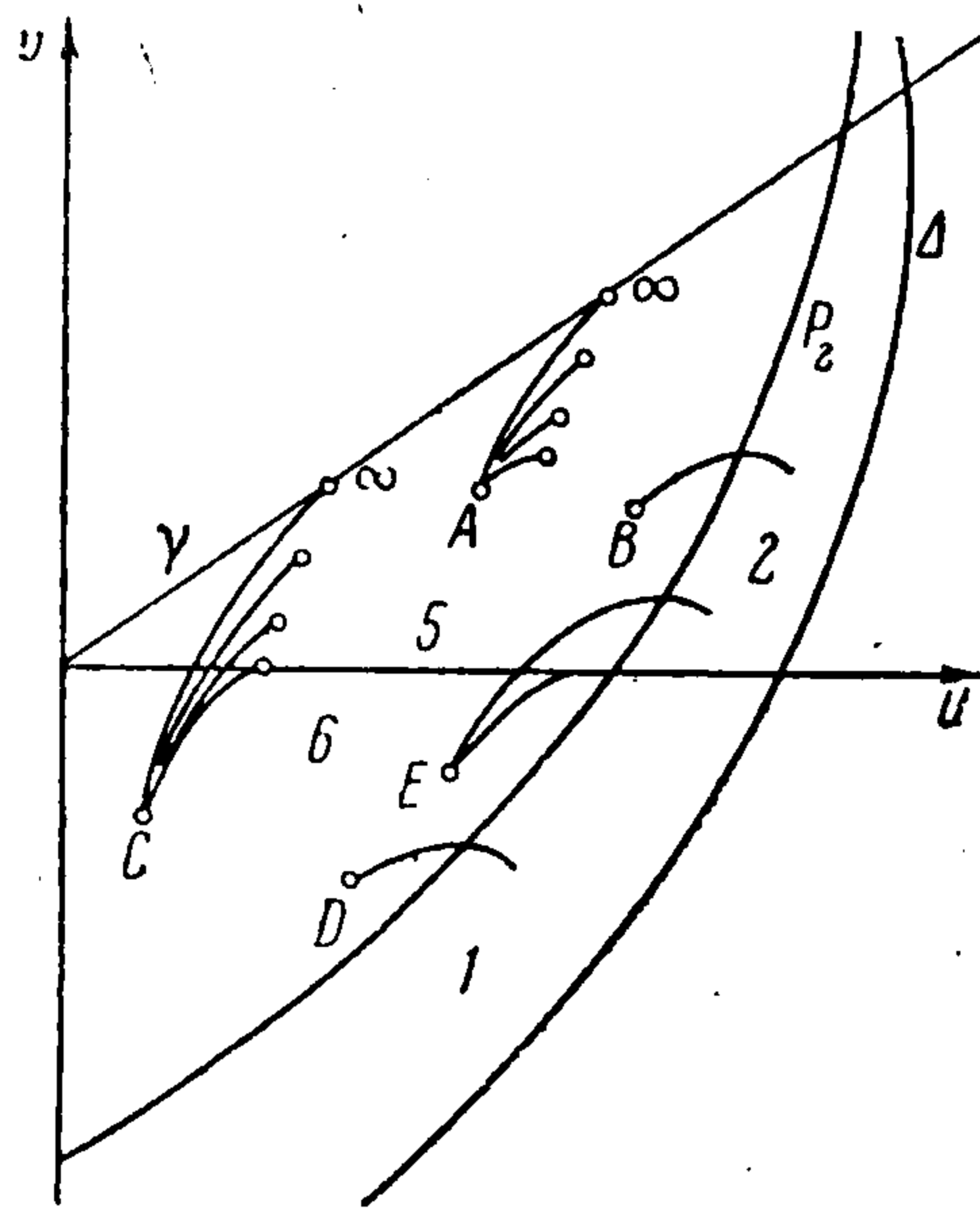


Фиг. 7

10. Рассмотрим поведение интегральных кривых, когда точка  $V_0$  лежит в области 5 или 6.

При достаточно малых  $q$ , когда  $V$  почти не смещается при уменьшении  $\eta$ , осуществляется переход  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ , а в области 6 решение задачи отсутствует. Можно доказать следующие теоремы, основанные на оценках величины  $dv/du$  при конечном (1.7) и бесконечном (6.2) значениях  $q$ .

а) Если при  $q = \infty$  интегральная кривая, исходящая из некоторой точки  $A$  области 5 (фиг. 8), пересекает  $\gamma$ , то и при любых значениях  $q$  интегральная кривая пересечется с  $\gamma$ . (Точки пересечения, показанные на фиг. 8 кружками, приближаются к  $A$  по мере уменьшения  $q$ , символ  $\infty$  относится к кривой  $q = \infty$ .) Таким образом, при любых  $q$  из точки  $A$  осуществляется переход  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .



Фиг. 8

б) Если интегральная кривая (6.2) при  $q = \infty$ , исходящая из некоторой точки  $C$  области 6, пересекает  $\gamma$ , то существует такое число  $q_* > 0$ , что при всех  $q > q_*$  осуществляется переход  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .

При  $q = q_*$  условию непротекания в области 6 можно удовлетворить согласно (7.4) при  $u_1^2 < (\kappa - 1) / (3\kappa + 1)$ , чему соответствует переход  $6 \rightarrow u_-$  (кривая  $C$  на фиг. 6, б).

При  $q = q_*$  условию непротекания в области 6 можно удовлетворить согласно (7.4) при  $u_1^2 < (\kappa - 1) / (3\kappa + 1)$ , чему соответствует переход  $6 \rightarrow u_-$  (кривая  $C$  на фиг. 6, б).

Существенно отметить, что при  $q \rightarrow 0$  решение краевой задачи существует, когда изображающая точка непосредственно за ударной волной лежит на оси  $u$ . Это решение соответствует «сильному скачку» в обычной гидродинамике (п. 7).

в) Если интегральная кривая (6.2) при  $q = \infty$ , выходящая из некоторой точки  $B$  области 5 (фиг. 8), пересекается с линией  $P_2$  и переходит в область 2, то, очевидно, в решении появится предельная линия: интегральная кривая пересечется с  $\Delta$ . Проследим в этом случае, как перестраивается решение при увеличении  $q$  от нуля. При малых  $q$  осуществляется переход  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . Затем при некотором значении  $q$  прямая  $\gamma$  «настигает» изображающую точку на линии  $P_2$ . При дальнейшем увеличении  $q$  точка пересечения интегральной кривой и линии  $\gamma$ , лежащая на границе областей 2 и 3, смещается вниз к оси  $u$ . При этом осуществляется переход  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ , пока, наконец, при  $q = q_*$  не станет возможным решение  $5 \rightarrow 2 \rightarrow u_+$ . При  $q > q_*$  решения краевой задачи не существует (п. 7).

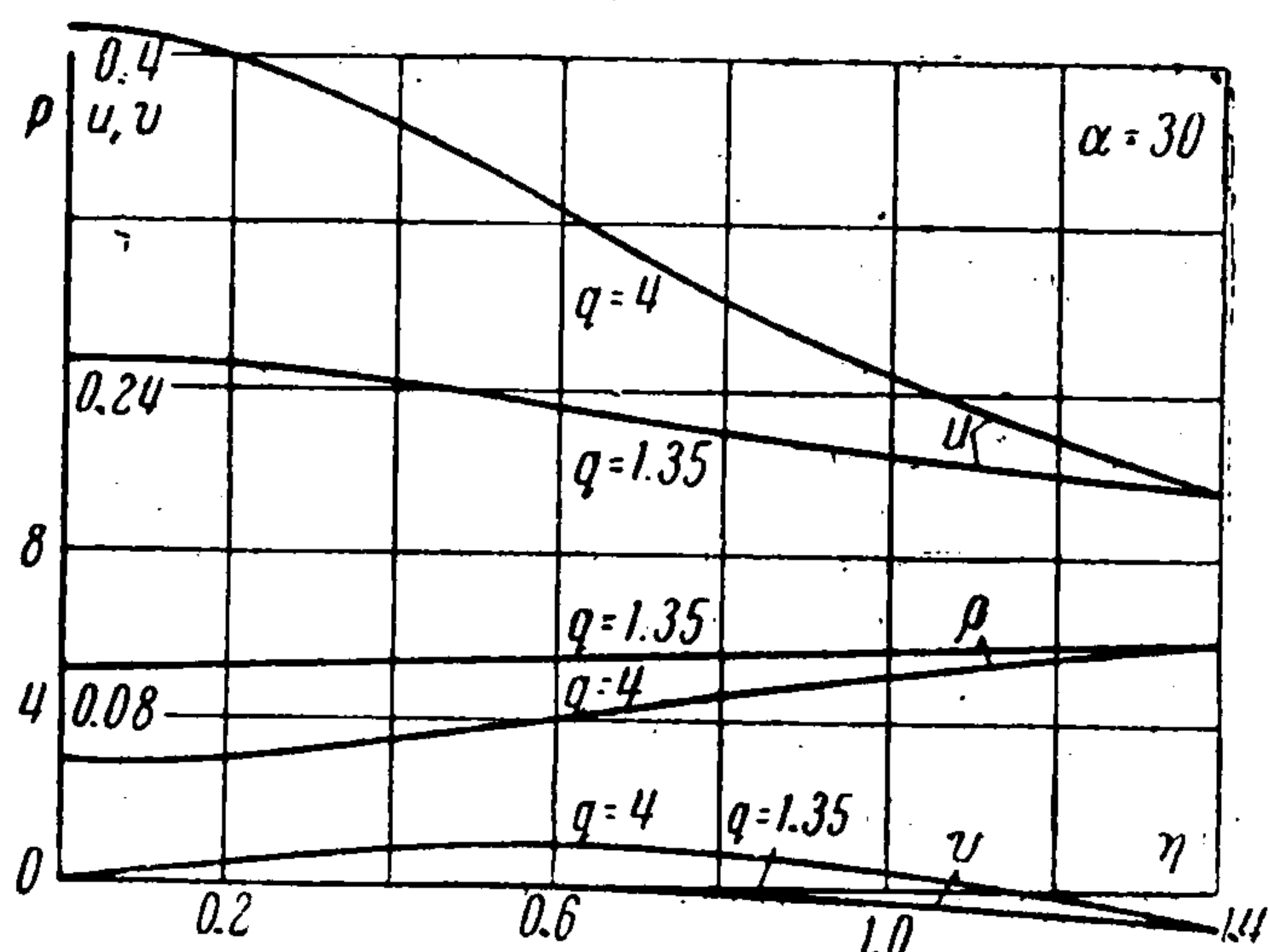
г) Когда  $V_0$  лежит на границе области 5 на нижнем берегу линии  $\gamma$  возможны следующие случаи:

1)  $dv/du$ , определяемое условиями за ударной волной, больше чем  $k_\gamma$  (2.1). Этот случай родствен случаю (а). Очевидно, всегда осуществляется переход  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .

2)  $dv/du < k_\gamma$ , здесь, аналогично (в), возможны как переходы  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ , так и  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ . При  $q = \infty$  изображающая точка движется по нижнему берегу прямой  $\gamma$  согласно (6.3), причем при  $\eta \rightarrow 0$  получаем решение (7.6).

д) Если вдоль интегральной кривой (6.2) при  $q = \infty$ , выходящей из некоторой точки  $E$  области 6 (фиг. 8), осуществляется переход  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ , то в решении появляется предельная линия, как и в случае (в). При этом в некотором диапазоне изменения  $q$  ( $q_{*-} < q < q_{*+}$ ) осуществляются переходы  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0$  либо (при больших  $q$ )  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ .

При  $q = q_{*-}$  осуществляется решение  $6 \rightarrow u_-$ , а при  $q = q_{*+}$  решение  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow u_+$ . Решение вблизи оси  $u$  имеет вид (7.4). Значения  $u$  на поверхности клина для этих решений (соответственно  $u_{1-}$  и  $u_{1+}$ ) удовлетворяют неравенству  $u_{1-}^2 < (\kappa - 1) / (3\kappa + 1) < u_{1+}^2$ . На фиг. 9 дается пример расчета для  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 54^\circ.5$  ( $\eta_0 = 1.4$ ), когда изображающая точка за волной  $V_0$  лежит в области 6. Величины  $q_{*-} = 1.35$  и  $q_{*+} = 4.0$  определялись подбором с тем, чтобы решение при  $\eta \rightarrow 0$  имело вид (7.4).

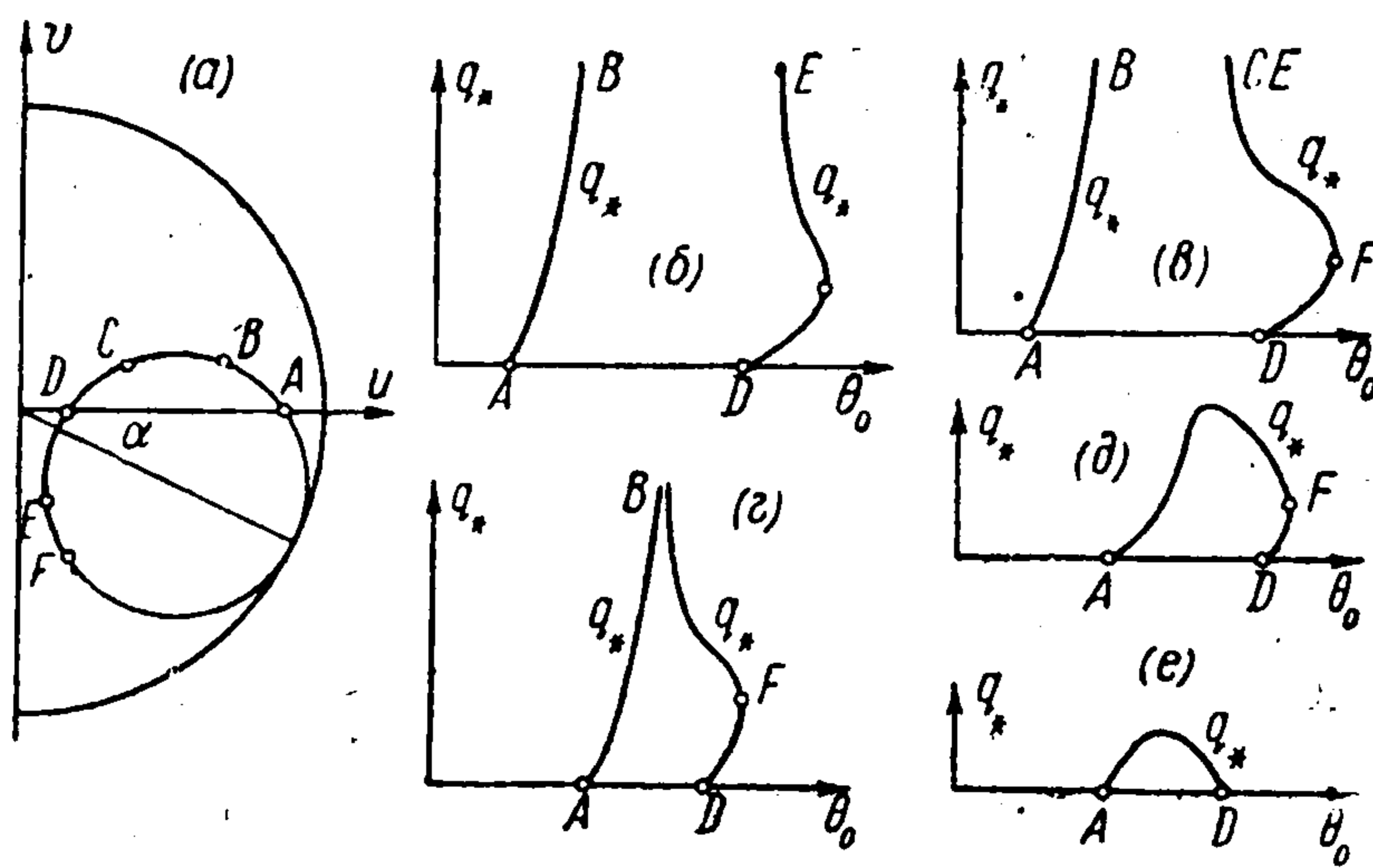


Фиг. 9

е) В области 6 имеются точки ( $D$  на фиг. 8), для которых при любом  $q$  не существует решения краевой задачи.

11. Фиксируем угол  $\alpha$  и проследим, используя результаты пп. 4—10, за движением  $V_0$  вдоль строфоиды (фиг. 10, а) при изменении  $\theta_0$ . Точки  $A$  и  $D$  описывают течение при  $q = 0$  соответственно за слабым и сильным скачками, отвечающими углу  $\alpha$  поворота потока.

Если угол наклона ударной волны становится меньшим  $\theta_{00}$ , своего немагнитного значения для слабого скачка, то изображающая точка попадает в область 1 (п. 9), где решение не существует.



Фиг. 10

В точках  $B$  и  $C$  величина  $\gamma$  равна нулю<sup>1</sup>. На дуге  $AB$  величина  $\gamma_0 < 0$ , т. е. изображающая точка лежит в области 2, где для каждого  $\theta_0$  существует единственное значение  $q = q_{*+}$ , при котором на поверхности тела выполняется условие непротекания при  $u_{1+} > \sqrt{(\kappa - 1) / (3\kappa + 1)}$  (см. п. 7). При  $q < q_{*+}$  реализуется решение II. В точке  $B$  величина  $q_{*+} = \infty$ , и решение при  $\eta \rightarrow 0$  имеет вид (7.6).

На дуге  $BC$ , где  $\gamma > 0$ , точка  $V_0$  лежит в области 3 или 4. Здесь при фиксированном  $\theta_0$  и  $q$ , изменяющемся от нуля до бесконечности, реализуется решение II. Если в точке  $C$  производная  $dv / du > k_\gamma$ , то при дви-

<sup>1</sup> Отметим, что при  $\kappa \geq 3$  всюду на строфоиде  $\gamma < 0$ , т. е. точки  $B$  и  $C$  отсутствуют. Это приводит к тому, что кривая  $q_*(\theta_0)$  оказывается замкнутой для любого угла атаки (см. ниже).

жении вдоль строфойды против часовой стрелки от  $C$  встретится точка  $E$ , в которой интегральная кривая (6.2) при  $q = \infty$  касается линии  $\gamma$ .

Для дуги  $CE$  диапазон изменения  $q$ , для которого интегральные кривые приходят в начало координат, не ограничен сверху. Для каждой точки дуги  $EF$  (точка  $F$  определена ниже) можно указать такое  $q = q_{*+}$ , при котором существует решение I, причем интегральные кривые подходят к оси  $u$  сверху и скорость на поверхности клина  $u_{1+} > \sqrt{(\kappa - 1) / (3\kappa + 1)}$ . При  $q < q_{*+}$  интегральные кривые II приходят в начало координат, а при  $q > q_{*+}$  решения краевой задачи не существует.

Для каждой точки дуги  $DF$  имеется такое  $q = q_{*-}$ , при котором интегральные кривые I подходят к оси  $u$  снизу и скорость на поверхности клина  $u_{1-} < \sqrt{(\kappa - 1) / (3\kappa + 1)}$ . При  $q > q_{*-}$  интегральные кривые II приходят в начало координат, а при  $q < q_{*-}$  — решения краевой задачи не существует. Таким образом, для точек, лежащих в области  $b$  на дуге  $EF$ , диапазон изменения  $q$ , в котором существует решение II, определяется неравенствами  $q_{*-} < q < q_{*+}$ .

По мере движения  $V_0$  против часовой стрелки величины  $u_{1-}$  и  $u_{1+}$  сближаются между собой, одновременно сближаются  $q_{*-}$  и  $q_{*+}$ , пока, наконец,  $u_{1-} = u_{1+} = \sqrt{(\kappa - 1) / (3\kappa + 1)}$ ,  $q_{*-} = q_{*+}$  в точке  $F$ . Если  $V_0$  лежит на строфойде ниже точки  $F$ , то решения краевой задачи не существует.

Выясним характер зависимости величин  $q_{*+}$  и  $q_{*-}$ , характеризующих решение I, от угла наклона скачка  $\theta_0$  при различных  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  точки  $A$  и  $B$  совпадают в плоскости  $uv$  с точкой  $u = 1$ ,  $v = 0$ . Это означает, что зависимость  $q_{*+}(\theta_0)$  (кривая, проходящая через  $A$ ) вырождается в прямую  $\theta_0 = 0$ . Как показали расчеты, точка  $E$  расположена при  $\alpha = 0$  на дуге  $DF$ . Так как при  $\alpha = 0$  в точке  $D$  величина  $\theta_0 = \pi/2$ , то при малых  $\alpha$  возможно решение (кривая, проходящая через точку  $D$ ), когда  $\theta_0 > \pi/2$ . На фиг. 10, б схематически изображены кривые  $q_*(\theta_0)$  при малых  $\alpha$ . Каждой точке области между двумя кривыми  $q_*(\theta_0)$  соответствует решение II. Отметим, что угол наклона касательной к кривой  $q_{*+}(\theta_0)$  в точке  $A$  приближенно определяется из первого уравнения (8.2).

С ростом  $\alpha$  взаимное расположение точек (фиг. 10, а) меняется. Точки  $A$  и  $D$  сближаются между собой. Точка  $E$  движется по направлению к  $C$ ; переходит на дугу  $CD$  и при некотором  $\alpha$  совпадает с  $C$  (фиг. 10, в). Это имеет место, когда в точке  $C$  производная  $dv/du = k_\gamma$  ( $\alpha = 23^\circ.18$  и  $\theta_0 = 44^\circ.2$  при  $\kappa = 1.4$ ).

При бóльших значениях  $\alpha$  величина  $q = q_*(\theta_0)$  (кривая, проходящая через точку  $D$ ) обращается в бесконечность в точке  $C$ , которая может быть определена из анализа начальных данных без численного интегрирования уравнений.

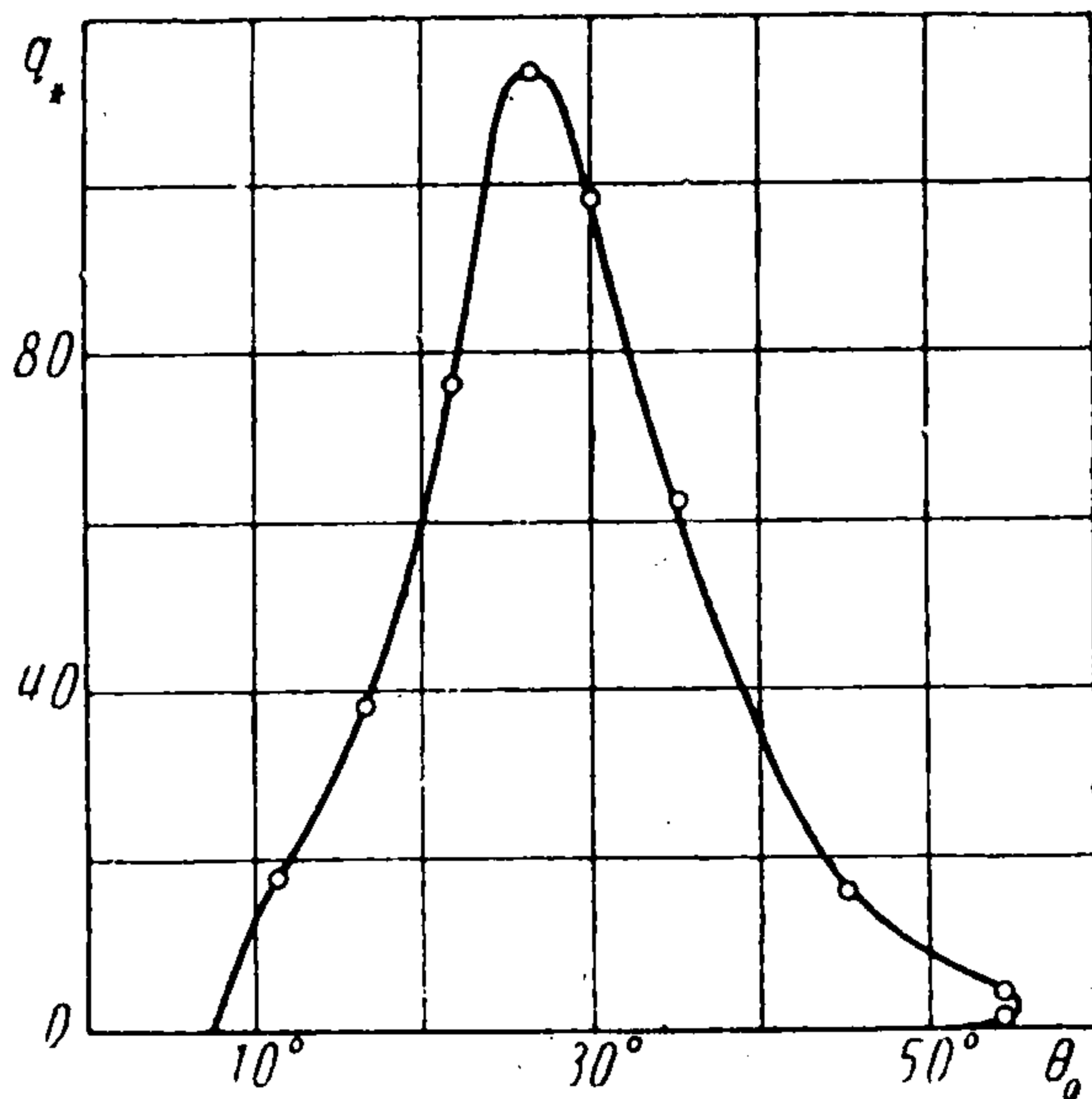
При дальнейшем увеличении  $\alpha$  наступает момент, когда точки  $B$  и  $C$  совпадают, как показано на фиг. 10, г ( $\alpha = 28^\circ.15$  при  $\kappa = 1.4$ ).

Далее, кривая  $q_*(\theta_0)$  оказывается замкнутой (фиг. 10, д). Затем точка  $F$  совпадает с точкой  $D$ . Это происходит, когда скорость  $u_0$  за сильным скачком равна  $\sqrt{(\kappa - 1) / (3\kappa + 1)}$ . При этом кривая  $q_*(\theta_0)$  имеет в точке  $D$  вертикальную касательную. После этого  $q_*(\theta_0)$  принимает вид (фиг. 10, е), что соответствует случаю, когда в области  $b$  не существует решения. Наконец, кривая  $q_*(\theta_0)$  стягивается в точку, что происходит,

когда  $\alpha$  становится равным  $\alpha^\circ$  — предельному углу поворота в отсутствие поля ( $\alpha^\circ = 45^\circ.35$  при  $\kappa = 1.4$ ).

На фиг. 11 приведены результаты расчетов значений  $q_*$  для  $\alpha = 30^\circ$ , когда кривая  $q_*(\theta_0)$  является замкнутой (расчетные точки помечены кружками).

12. Из изложенного следует, что в случае, когда  $\alpha < \alpha^\circ$ , при заданном значении  $q$  существуют два решения I краевой задачи, переходящие в немагнитные решения при стремлении интенсивности поля к нулю, и бесконечное множество решений II, для которых угол наклона ударной волны лежит в интервале между двумя значениями, полученными из решения I. Величина  $q$ , при которой существует решение с присоединенной ударной волной, может изменяться в интервале от 0 до бесконечности при  $0 < \alpha < \alpha_x$  и оказывается ограниченной сверху при  $\alpha_x < \alpha < \alpha^\circ$  ( $\alpha_x = 28^\circ.15$  при  $\kappa = 1.4$ ). С увеличением  $\kappa$  величина  $\alpha_x$  уменьшается. При  $\kappa \geq 3$  диапазон, в котором  $q$  может быть бесконечно большой величиной, отсутствует.)



Фиг. 11

Когда существует решение (6.2) при  $q = \infty$ , то во всем потоке векторы магнитного поля и скорости параллельны, а давление и плотность на поверхности клина обращаются согласно (7.6) в нуль (своеобразный эффект «отжатия»). По мере приближения  $\alpha$  ( $\alpha > \alpha_x$ ) к  $\alpha^\circ$  диапазон изменения  $q$ , в котором существует решение с присоединенной ударной волной, уменьшается и при  $\alpha \rightarrow \alpha^\circ$  стягивается к нулю.

Хотя решение поставленной краевой задачи оказывается бесконечно значным, естественно предположить, что, по крайней мере, в свободном полете реализуется решение, переходящее при  $q \rightarrow 0$  в известное решение задачи обтекания клина со слабым скачком. Это следует из требования непрерывной зависимости решения от интенсивности магнитного поля. Для этого решения при фиксированном  $\alpha$  с ростом интенсивности поля от нуля угол наклона скачка увеличивается от немагнитного  $\theta_{00}$  для своего предельного значения  $\theta_m$ . При  $\alpha < \alpha_x$  значение  $\theta_m$  достигается при бесконечно большой интенсивности поля, а при  $\alpha_x < \alpha < \alpha^\circ$  — при конечной интенсивности. Во втором случае при дальнейшем усилении поля решение с присоединенным скачком отсутствует, что доказывает возможность перехода при достаточно сильном магнитном поле от течения с присоединенной ударной волной к течению с отошедшей ударной волной.

Поступила 18 VI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
2. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1957.
3. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь А. И. и Р о з е Н. К. Теоретическая гидромеханика. Т. II, ГИТТЛ, 1948.
4. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.