Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Г. А. Любимов
(Москва)

В настоящее время имеется довольно большое число работ, посвященных различным аспектам задачи магнитогидродинамического пограничного слоя. Постановка задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое в случае малых магнитных чисел Рейнольдса (R_m) содержится в работе [1], для случая больших R_m — в работах [2-3]. В развитие этих работ исследовались классы решений соответствующих систем уравнений и решались конкретные задачи. Ниже приводится ряд общих соображений и соотношений, относящихся к постановке задачи (некоторые из них содержатся в той или иной форме в предыдущих работах). Эти соображения могут оказаться полезными при различных усложнениях постановки задачи. Для простоты будет рассматриваться только пограничный слой в несжимаемой жидкости.

Будем считать, что под действием либо вязких, либо электромагнитных сил, либо при совместном действии этих сил в потоке организуется узкая область течения (пограничный слой), в которой справедливы обычные оценки пограничного слоя для компонент скорости. Обозначим через δ толщину пограничного слоя, причем $\delta / L \ll 1$, где L — характерная длина вдоль пограничного слоя.

Если в рассматриваемом слое существенны вязкие силы, т. е. пограничный слой является «вязким», то, сравнивая вязкие и инерциальные члены в уравнениях движения ($u\, \partial u / \partial x \sim \nu \partial^2 u / \partial y^2$), для толщины пограничного слоя δ_ν получим

$$\delta \sim \delta_\nu \sim \frac{L}{\sqrt{R_L}}, \qquad R_L = \frac{UL}{\nu} \gg 1, \qquad R_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \sim \frac{L}{\delta} \gg 1$$

Здесь и всюду в дальнейшем x, z — координаты вдоль пограничного слоя (проекции векторов на плоскость xz будут писаться с индексом τ), y — координата поперек слоя (проекции векторов на эту ось будут снабжаться иногда индексом n). Если $R_\delta \lesssim 1$, то слой не будет вязким ($\delta \ll \delta_\nu$). В тех случаях, когда магнитное число Рейнольдса

$$R_{mL} \gg 1 \quad (R_{mL} = 4\pi\sigma UL/c^2)$$

в потоке может организоваться «токовый» пограничный слой [2-3], т. е. узкий слой, в котором резко меняется магнитное поле и поле токов. Если определить толщину токового пограничного слоя δ_j как расстояние, на котором резко меняется магнитное поле и поле токов поперек пограничного слоя, то, приравнивая порядки различных членов в уравнении индукции

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \Delta \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{H} + \nu_m \Delta \mathbf{H} = 0$$

получим

$$\frac{HU}{L} \sim \nu_m \frac{H}{\delta_j^2} \qquad \text{при } R_{mL} \gg 1$$

или

$$\delta \sim \delta_j \sim \frac{L}{\sqrt{R_{mL}}} \qquad \text{при } R_{m\delta} \equiv \frac{4\pi\sigma U\delta}{c^2} \sim \frac{L}{\delta} \gg 1$$

Если $R_{m\delta} \gg L / \delta$, то течение внутри пограничного слоя описывается уравнениями магнитной гидродинамики при $\sigma = \infty$. При этом в потоке отсутствует диссипация за счет протекания токов и могут появляться поверхностные токи. Толщина пограничного слоя в этом случае не связана с магнитным числом Рейнольдса, а определяется другими факторами, например, вязкими силами.

Относительная толщина вязкого и токового слоев определяется при $R_{mL} \gg 1$ параметром [4-5]

$$\varepsilon \equiv \frac{\delta_\nu}{\delta_j} \sim \sqrt{\frac{R_{mL}}{R_L}} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\nu_m}}$$

При $\varepsilon \sim 1$ толщины вязкого и токового слоев сравнимы ($\delta \sim \delta_\nu \sim \delta_j$). Этот случай разобран в работе [2]. При $\varepsilon \ll 1$ ($\delta \sim \delta_j$, $\delta_\nu \ll \delta_j$) пограничный слой будет токовым в идеальной жидкости (см., например, [3]).

В этом случае в пограничном слое могут присутствовать поверхности разрыва скорости, соответствующие вязкому подслою. Течение в вязком пограничном слое (подслое) при $\varepsilon \ll 1$ зависит от магнитного числа Рейнольдса, подсчитанного по δ_ν. При $\varepsilon \gg 1$ ($\delta \sim \delta_\nu$, $\delta_j \ll \delta_\nu$) рассматриваемый слой будет вязким. В этом случае токовый подслой можно представлять себе как поверхностный ток, течение же в пограничном слое надо рассматривать на основе уравнений магнитной гидродинамики при $\sigma = \infty$. Во всех этих случаях ($R_{mL} \gg 1$) внешний к пограничному слою наибольшей толщины поток описывается уравнениями магнитной гидродинамики при $\sigma = \infty$. Некоторые приближенные решения задач о пограничном слое при $\varepsilon \gg 1$ и $\varepsilon \ll 1$ содержатся в работах [4-5].

Если параметры, определяющие задачу, таковы, что $R_{mL} \lesssim 1$, то $R_{m\delta} \ll 1$. Если, кроме того, сильные внешние электрические поля отсутствуют ($E \lesssim UH / c$), то, сравнивая члены в законе Ома

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right)$$

можно оценить расстояние δ^*, на котором существенно меняется магнитное поле. В общем случае

$$\left|\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}\right| \lesssim \left|\sigma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}\right|$$

причем знак неравенства соответствует случаю $R_{m\delta^*} > 1$. В случае малых магнитных чисел Рейнольдса

$$\left|\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}\right| \sim \left|\sigma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}\right|$$

и оценка величины δ^* дает

$$\frac{L}{\delta^*} \sim R_{mL} = R_{m\delta} \frac{L}{\delta}, \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{\delta^*} \sim R_{m\delta} \ll 1$$

Отсюда следует, что рассматриваемый пограничный слой не будет токовым, так как $\delta^* \gg \delta$. Толщина пограничного слоя в этом случае определяется вязкими силами и $\delta \sim L / \sqrt{R_L}$.

Замечание. Если за счет внешних источников создаются сильные электрические поля ($E \gg UH/c$), то гидродинамическая задача упрощается, так как электромагнитная сила в этом случае определяется только «внешним» электрическим полем и вызываемыми им токами. Следовательно, электромагнитная сила будет заданной величиной, так как распределение внешних полей и токов можно вычислить независимо.

Из оценок, приведенных ниже (6)—(7), будет видно, что конвективными токами ($\rho_e \mathbf{v}$) можно пренебречь в законе Ома. Отметим только, что эти токи не могут привести к существенному изменению магнитного поля в пограничном слое, так как, сравнивая члены $c/4\pi \operatorname{rot} \mathbf{H}$ и $\rho_e \mathbf{v}$ (выражение ρ_e см. ниже (1)), получим, что $\delta / \delta^* \sim U^2 / c^2$.

Таким образом, при $R_{mL} \lesssim 1$ токи, текущие в пограничном слое, малы, так что они не приводят к существенному изменению магнитного поля. Магнитное поле можно считать не меняющимся поперек пограничного слоя. Величина магнитного поля определяется из решения внешней к пограничному слою задачи (если рассматривается пограничный слой на теле, то внешняя задача состоит в решении задачи об отекании тела идеальной жидкостью и задачи об определении поля внутри тела). Если $R_{mL} \ll 1$, то магнитное поле во всем потоке можно считать заданным (в задаче обтекания оно определяется токами, текущими в обтекаемом теле). Постановка такой задачи в частном случае задания магнитного поля дана в работе [1]. Если $R_{mL} \sim 1$, то во внешнем к пограничному слою потоке надо решать уравнения магнитной гидродинамики и сопрягать (если рассматривается задача обтекания) решение для магнитного поля с решением для распределения магнитного поля в теле.

Влияние электромагнитного поля на течение в пограничном слое в случае $R_{mL} \lesssim 1$ выражается наличием электромагнитной силы

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\, \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{\sigma}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}\right) \times \mathbf{H}$$

причем для течения в пограничном слое $\mathbf{H}$ — заданная величина, зависящая от координат вдоль пограничного слоя. Следовательно, для того чтобы решать задачу о пограничном слое при $R_{mL} \lesssim 1$, надо либо знать распределение объемного заряда ρ_e и электрического поля $\mathbf{E}$ внутри пограничного слоя, либо дополнить систему уравнениями, определяющими эти величины. Применив операцию div к уравнению закона Ома, получим распределение плотности объемного заряда

$$4\pi\rho_e = \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{div}\, (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c}\, (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \qquad (1)$$

Электрическое поле описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \qquad (2)$$

и зависит, вообще говоря, от распределения плотности заряда в пограничном слое, внешнем потоке и в случае обтекания в теле.

В случае, рассмотренном в работе [1] (плоское течение, $\mathbf{H} = \mathrm{const}$ и лежит в плоскости течения), $\rho_e \equiv 0$ как во внешнем потоке, так и в пограничном слое. При этом $\mathbf{E} \equiv 0$ во всем потоке и электромагнитная сила определяется только полем скоростей и магнитным полем.

Если $R_{mL} \ll 1$, то магнитное поле определяется токами, текущими вне области течения и, следовательно, в пограничном слое и во внешнем потоке $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ (подчеркнем, что условие $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ не означает в данном случае, что плотность тока равна нулю).

Если $R_{mL} \sim 1$, то $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ и в пограничном слое

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\, \mathbf{v} \times \mathbf{H}\right]$$

Сделав оценки пограничного слоя и воспользовавшись тем, что в пограничном слое $\partial \mathbf{H} / \partial y = 0$, получим для плотности заряда: (3)

$$-4\pi c\rho_e = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H}_\tau \operatorname{rot}_\tau \mathbf{v} + \mathbf{H}_n \cdot \operatorname{rot}_n \mathbf{v} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}\varkappa =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} | \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | + H_n \operatorname{rot}_n \mathbf{v} - \frac{4\pi\sigma}{c} (\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{E}_\tau) \varkappa + O(\delta), \quad \varkappa = \begin{cases} 1 & \text{при } R_{mL} \sim 1 \\ 0 & \text{при } R_{mL} \ll 1 \end{cases}$$

Отсюда следует, что плотность заряда в пограничном слое

$$\rho_e \sim \frac{HU}{c} \frac{1}{\delta} \sim \frac{1}{\delta} \quad \text{при} \quad \frac{\partial}{\partial y} | \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | \neq 0 \tag{4}$$

$$\rho_e \sim \frac{1}{c} \frac{UH}{L} \lesssim 1 \quad \text{при} \quad \frac{\partial}{\partial y} | \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | = 0 \tag{5}$$

Если рассматривать пограничный слой на обтекаемом теле, то на теле $| \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | = 0$, так как $\mathbf{v}_\tau = 0$. Следовательно, соотношение (4) соответствует случаю $| \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau |_\infty \neq 0$, а (5) — случаю $| \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau |_\infty = 0$.

Покажем, что, несмотря на наличие плотности заряда внутри пограничного слоя «электрической» силой — $\rho_e \mathbf{E}$ можно пренебречь в практически мыслимых случаях. Действительно, сравнивая члены $\rho_e \mathbf{E}$ и $(\sigma / c) \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ в выражении для силы, получим

$$| \rho_e \mathbf{E} | \ll \left| \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right| \quad \text{при} \quad \begin{cases} \dfrac{U}{\sigma L} \ll 1, \text{ если } \dfrac{\partial}{\partial y} | \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | = 0 & (6) \\ \dfrac{U}{\sigma\delta} \sim \dfrac{U^2}{c^2} \dfrac{\sqrt{R_L}}{R_{mL}} \ll 1, \text{ если } \dfrac{\partial}{\partial y} | \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau | \neq 0 & (7) \end{cases}$$

Неравенство (6) всегда считается выполненным, так как оно связано с пренебрежением токами смещения [6]. Неравенство (7) может нарушаться при $R_{mL} \lesssim 1$, если вязкость очень мала $\delta \sim U^2 L / c^2$. Но в этом случае пограничный слой по существу отсутствует: он превращается в вихревой заряженный слой в идеальной жидкости. При наличии вязкого пограничного слоя неравенство (7) может нарушаться только при очень малых R_{mL} ($R_{mL} \sim U^2 \sqrt{R_L} / c^2$). В этом случае, сравнивая магнитные силы с вязкими в уравнениях движения, получим, что электромагнитные силы будут оказывать влияние на течение в вязком пограничном слое, если

$$\nu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{\sigma}{\rho c^2} UH, \text{ или } R_{mL} \frac{H^2}{\rho U^2} \sim \frac{H^2}{\rho c^2} \sqrt{R_L} \sim 1 \tag{8}$$

т. е. при чрезвычайно больших магнитных полях. Заметим, что соотношение (8) можно получить, сравнивая электрическую силу $\rho_e \mathbf{E}$ с вязкими силами, если использовать оценки (4), (5) и соотношение $E \lesssim UH / c$.

Таким образом, для течения в пограничном слое электромагнитная сила

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \times \mathbf{H} \tag{9}$$

Сравнивая электромагнитную силу (9) с силами инерции, получим, что электромагнитные силы оказывают влияние на течение в пограничном слое при $R_{mL} \lesssim 1$, если [1]

$$m_L = \frac{\sigma H^2 L}{c^2 U \rho} \sim R_m \frac{H^2}{\rho U^2} \sim 1$$

Вместо этого параметра можно использовать параметр, возникающий из сравнения вязких и электромагнитных сил

$$\frac{M_L^2}{R_L} \sim 1, \qquad M = \frac{HL}{\sqrt{4\pi\rho\nu\nu_m}} \qquad (M \text{ — число Гартмана}) \tag{10}$$

Соотношение (10) показывает, что при малых числах Гартмана ($M \ll \sqrt{R_L}$) электромагнитные силы не влияют на течение в пограничном слое.

Итак, для решения задачи о пограничном слое надо ввести в уравнения пограничного слоя дополнительную силу, определяемую соотношением (9), и дополнить эту систему уравнениями (2). Но так как электрическое поле в пограничном слое зависит от распределения заряда вне его, а граничные условия для решения внешней задачи зависят от заряда, сосредоточенного в пограничном слое, то уравнения пограничного слоя и внешнюю задачу нельзя, вообще говоря, решать независимо. Приведенные ниже соображения и оценки позволяют, однако, во-первых, упростить в рамках системы уравнений пограничного слоя уравнения (2) и, во-вторых, сформулировать граничные условия для внешней задачи так, чтобы внешнюю задачу и уравнения пограничного слоя можно было бы решать раздельно.

При составлении уравнений движения в пограничном слое надо учесть в выражении (9) только главные (по δ) члены. Поэтому, если какая-нибудь величина в (9) будет величиной порядка δ в пограничном слое, то члены, содержащие эту величину, могут быть опущены. С другой стороны, если какая-нибудь величина испытывает внутри пограничного слоя изменение порядка δ, то в (9) надо использовать для этой величины значение, полученное из решения внешней задачи без учета пограничного слоя.

Величина $\mathbf{H}$ в (9) вычисляется из решения внешней задачи и не зависит при $R_{mL} \lesssim 1$ от течения в пограничном слое, поэтому $\mathbf{H}$ надо считать величиной порядка 1 (по отношению к δ) для течения в пограничном слое. Так как в пограничном слое $u \sim w \sim 1$, а $v \sim \delta$, то вместо скорости в (9) надо подставлять выражение $u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z$.

Главную часть электрического поля, используемую при вычислении силы по (9) в пограничном слое, будем обозначать $\mathbf{E}^\circ$. При этом выражение для силы в уравнениях пограничного слоя примет вид

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{c}(\mathbf{E}^\circ + u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z) \times \mathbf{H} \tag{11}$$

Электрическое поле в пограничном слое определяется как решением внешней задачи, так и распределением заряда внутри пограничного слоя. Если $\partial |\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| / \partial y = 0$, то в силу (5) порядок $\rho_e \sim 1$ и суммарный заряд пограничного слоя будут величиной порядка δ. Очевидно, что изменение электрического поля, вызванного внешними источниками, за счет заряда, сосредоточенного внутри пограничного слоя, будет величиной порядка δ. Следовательно, при $\partial |\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| / \partial y = 0$ электрическое поле $\mathbf{E}^\circ$ в (11) надо считать полем, созданным внешними по отношению к пограничному слою источниками, причем при решении внешней задачи надо считать, что $\mathbf{E}^\circ$ — непрерывная функция в точках, соответствующих пограничному слою. Итак, если $\partial |\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| / \partial y = 0$, то при решении задачи о пограничном слое $\mathbf{E}^\circ$ в выражении (11) будет известной функцией, зависящей только от координаты вдоль пограничного слоя и определяемой решением внешней задачи.

Для пограничного слоя на теле рассматриваемый случай соответствует условию $|\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau|_\infty = 0$. При этом, если обтекаемое тело является диэлектриком, в качестве граничного условия на теле для внешней задачи надо принять $j_n = \mathbf{E}_n^\circ = 0$, если же обтекаемое тело проводник — то условие $\mathbf{E}_\tau^\circ = 0$.

Если $\partial \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid / \partial y \neq 0$, то, как следует из (4), $\rho_e \sim \delta^{-1}$ и суммарный заряд пограничного слоя есть величина порядка 1. При этом заряд, сосредоточенный в пограничном слое, существенно влияет на внешнее электрическое поле и изменение электрического поля внутри пограничного слоя может быть величиной порядка 1. Следовательно, $\mathbf{E}^\circ$ в (11) будет функцией координат внутри пограничного слоя, и для того чтобы замкнуть задачу в этом случае, надо к уравнениям пограничного слоя добавить уравнения (2). Используя оценки пограничного слоя, упростим систему (2), сохраняя в ней только главные члены ($\mathbf{E}^\circ$).

Так как пограничный слой представляет собой узкий заряженный слой, то изменение нормальной к слою составляющей электрического поля ΔE_n имеет в данном случае порядок

$$\Delta E_n \sim 4\pi \int\limits_0^\infty \rho_e \, dy \sim 4\pi \frac{UH}{c}$$

Касательная составляющая электрического поля

$$E_\tau \lesssim \frac{1}{c} UH$$

Следовательно, вместо второго уравнения (2) при вычислении главной части электрического поля $\mathbf{E}^\circ$ внутри пограничного слоя можно пользоваться уравнением

$$\frac{\partial E_n{}^\circ}{\partial y} = 4\pi \rho_e{}^\circ = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid}{\partial y} \tag{12}$$

Произведя аналогичные оценки в уравнении $\operatorname{rot} \mathbf{E}^\circ = 0$, получим, что изменение касательной составляющей электрического поля $\mid \Delta \mathbf{E}_\tau \mid$ поперек пограничного слоя имеет порядок δ

$$\left| \Delta \mathbf{E}_\tau \right| \sim \frac{\partial E_n}{\partial s} \delta$$

Следовательно, при вычислении силы (11) вместо первого уравнения (2) можно использовать уравнение

$$\partial \mathbf{E}_\tau^\circ / \partial y = 0 \tag{13}$$

Уравнения (12), (13) имеют простой физический смысл непрерывности касательной составляющей и изменения нормальной составляющей электрического поля пропорционально плотности заряда при переходе через узкий заряженный слой. Интегрируя (12), получим

$$E_n{}^\circ = -\frac{1}{c} \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid + f(x, z) \tag{14}$$

или, используя закон Ома,

$$j_y{}^\circ = \sigma \left(E_y{}^\circ + \frac{1}{c} \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid \right) = \sigma f(x, z)$$

Последнее соотношение показывает, что в пограничном слое имеет место уравнение $\partial j_y{}^\circ / \partial y = 0$. Это позволяет формулировать граничные условия для внешней задачи не через электрическое поле, а через плотность тока. Отсюда следует, что для определения $\mathbf{E}^\circ$ в данном случае ($\partial \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid / \partial y \neq 0$) надо решить внешнюю задачу, считая, что в точках, соответствующих пограничному слою, имеется слой поверхностного заряда плотности

$$q = -\frac{1}{4\pi c} \left(\mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid_{y=+0} - \mid \mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau \mid_{y=-0} \right)$$

Для пограничного слоя на теле этот случай соответствует условию $|\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau|_\infty \neq 0$. Если обтекаемое тело—диэлектрик, то для решения внешней задачи в качестве граничного условия на теле имеем условие $j_y^\circ = \sigma f(x, z) = 0$. Если обтекаемое тело—проводник, то внешнюю задачу надо решать при условии $\mathbf{E}_\tau^\circ = 0$ на поверхности тела, причем функция $f(x, z) = \sigma^{-1} j_y$ при $y = 0$ определяется в этом случае решением задачи.

Если $\partial |\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| / \partial y = 0$, то уравнения (12) — (13) выражают тот факт, что $\mathbf{E}^\circ$ не меняется в пограничном слое, т. е., как уже указывалось выше, для определения $\mathbf{E}^\circ$ в соотношении (11) надо в этом случае решать внешнюю задачу, считая заряд, сосредоточенный в пограничном слое, равным нулю. В появившейся в самое последнее время работе [8] аналогичные выводы получены для задачи о пограничном слое в среде с анизотропной проводимостью.

Отметим еще раз, что приведенные соображения относятся не к вычислению распределения электрического поля в пограничном слое, а только к вычислению его главной части, необходимой для определения силы в уравнениях пограничного слоя.

Проекция уравнения импульсов на нормаль к пограничному слою y дает

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{c}|\mathbf{j}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| = 0$$

т. е. изменение давления (Δp) поперек пограничного слоя

$$\Delta p \lesssim \delta$$

и при решении задачи о пограничном слое можно пользоваться уравнением $\partial p / \partial y = 0$.

Суммируя сказанное, выпишем систему уравнений, описывающую течение (поле скоростей) в пограничном слое при $R_{mL} \lesssim 1$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma}{c\rho}\left(\mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c}\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}\right) \times \mathbf{H}|_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\sigma}{c\rho}(\mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c}\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}|_z \qquad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$E_n^\circ = -\frac{1}{c}\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau + f(x, z), \qquad \mathbf{E}_\tau^\circ = \mathbf{E}_\tau^\circ(x, z), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, z)$$

Функции $f(x, z)$, $\mathbf{E}_\tau^\circ(x, z)$, $\mathbf{H}(x, z)$ определяются граничными условиями и решением внешней задачи.

В случае $R_{mL} \ll 1$ внешняя задача для пограничного слоя на теле приводится к уравнениям

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{\sigma}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) \times \mathbf{H}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \qquad (16)$$

с граничными условиями при $y = 0$

$$v_y = v_n = 0, \qquad E_y = -\frac{1}{c}\,|\,\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau\,|_{y=0} \qquad \text{(для обтекания диэлектрика)}$$

$$v_n = 0, \qquad \mathbf{E}_\tau\,|_{y=0} = 0 \qquad \text{(для обтекания проводника)}$$

При этом $\mathbf{H}$ в данной системе определяется из независимой системы

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^*, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{17}$$

где $\mathbf{j}^*$ — плотность токов вне области течения.

Распределение электрического поля в теле находится из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e^*$$

Здесь ρ_e^* — плотность заряда в теле (в проводнике $\rho_e = 0$). В качестве граничного условия для решения этой системы надо взять значение $\mathbf{E}$ на теле, полученное из решения системы (16). Найденное при этом E_n определяет поверхностную плотность электрического заряда, который образуется на поверхности обтекаемого тела, так как в решении задачи о пограничном слое на диэлектрике $E_n\,|_{y=0} = E_n{}^\circ\,|_{y=0} = 0$, а на проводнике $E_n{}^\circ\,|_{y=0} = f(x, z)$, причем $f(x, z)$ определяется решением системы (16).

В случае $R_{mL} \sim 1$ внешняя задача для пограничного слоя на теле приводится к уравнениям:

в области течения

$$\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \Delta \mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{c}(\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \tag{18}$$

вне области течения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^*, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e^* \tag{19}$$

Если обтекаемое тело — диэлектрик, то

$$v_n = 0, \qquad \operatorname{rot}_n \mathbf{H} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

и решения систем (18) и (19) должны быть сопряжены при $y = 0$ (в точках, соответствующих пограничному слою) условиями непрерывности функций $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}$.

Если обтекаемое тело—проводник, то

$$v_n = 0, \qquad \mathbf{E}_\tau = 0 \quad \text{при } y = 0$$

и решения систем (18) и (19) должны быть сопряжены при $y = 0$ условиями непрерывности функций $\mathbf{E}_\tau$, $\mathbf{H}$, $\operatorname{rot} \mathbf{H}$.

Некоторые частные решения задачи о пограничном слое на электроде содержатся в работе [7]. При некоторых дополнительных предположениях эти решения можно рассматривать как решения систем (15) и (16) — (17).

Решение системы (15) определяет поле скоростей в пограничном слое. Чтобы определить поле токов в пограничном слое из закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) \tag{20}$$

кроме решения (15), надо знать распределение $\mathbf{E}$ в пограничном слое.

В первом приближении, как было указано выше, плотность тока можно определить по формуле

$$\mathbf{j} = \sigma\left[\mathbf{E}^\circ + \frac{1}{c}(u\mathbf{e}_x + w\mathbf{e}_z)\right]$$

причем для определения $\mathbf{E}^\circ$ использовать уравнения (12) — (13). Если же интересоваться более детально распределением токов в пограничном слое, то надо учесть в соотношении (20) члены порядка δ. При этом для скорости надо взять полное решение системы (15) (учесть нормальную компоненту скорости), а для определения $\mathbf{E}$ использовать систему уравнений, позволяющую определить $\mathbf{E}$ с точностью до членов порядка δ.

Такую систему можно получить из (2), (3), проделав соответствующие оценки. Представим $\mathbf{E}$ в виде суммы $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \mathbf{E}^1$. Из предыдущих рассуждений следует, что $E^1 \lesssim \delta$. Подставив $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \mathbf{E}^1$ в систему (2) и оценив порядки производных, получим для $\mathbf{E}^\circ$ систему (12), (13), а для $\mathbf{E}^1$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial E_n{}^1}{\partial y} = -\frac{1}{c} H_n \operatorname{rot}_n \mathbf{v} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\mathbf{v}_\tau \mathbf{E}_\tau{}^\circ \varkappa - \frac{\partial E_x{}^\circ}{\partial x} - \frac{\partial E_z{}^\circ}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\tau{}^1}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } \frac{\partial |\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau|}{\partial y} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial E_n{}^1}{\partial y} = -\frac{1}{c} H_n \operatorname{rot}_n \mathbf{v} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\mathbf{v}_\tau \mathbf{E}_\tau{}^\circ \varkappa - \frac{\partial E_x{}^\circ}{\partial x} - \frac{\partial E_z{}^\circ}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x{}^1}{\partial y} = \frac{\partial E_y{}^\circ}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z{}^1}{\partial y} = \frac{\partial E_y{}^\circ}{\partial z} \qquad \text{при } \frac{\partial}{\partial y}|\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{H}_\tau| \neq 0 \tag{22}$$

Произвольные функции, возникающие при интегрировании (21) или (22), должны определяться из решения внешней задачи для электрического поля; при этом плотность заряда во внешней области должна считаться равной нулю (внешний заряд учтен при определении $\mathbf{E}^\circ$).

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере, имеющем тривиальное решение. Рассмотрим обтекание плоской диэлектрической пластины потоком проводящей жидкости. Пусть $R_{mL} \ll 1$ и магнитное поле, которое определяется только внешними источниками, однородно и направлено вдоль оси z — $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$. Внешние электрические поля отсутствуют. Легко проверить, что следующее решение

$$u = U, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad E_y = c^{-1}UH_0 \tag{23}$$

$$E_x = 0, \quad E_z = 0, \quad \rho_e = 0, \quad p = \text{const в потоке}, \quad \mathbf{E} \equiv 0 \quad \text{в теле}$$

удовлетворяет системе (16). Это решение описывает поступательный поток, в котором отсутствуют электрические токи. На пластине образуется поверхностный заряд плотности $(1/4\pi c)UH_0$, который создает во внешнем потоке электрическое поле, уравновешивающее поле индукции.

Будем искать решение задачи о пограничном слое такое, что $w = 0$, $\partial / \partial z = 0$, $E_z = 0$. В этом случае точные уравнения (1), (2) имеют вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{1}{c} H_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

и их решение в силу уравнения $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ имеет вид

$$E_x = -\frac{H_0}{c} v, \qquad E_y = \frac{H_0}{c} u \tag{24}$$

При этом $\mathbf{j} = 0$ в пограничном слое и слой будет вязким. Решение уравнений (12) — (13) в силу (23) будет

$$E_y{}^\circ = \frac{H_0}{c} u, \quad E_x{}^\circ = 0 \tag{25}$$

Отсюда следует, что электромагнитная сила в (15) равна нулю

$$f_x = \frac{\sigma}{c} H_0 \left(E_y{}^\circ - \frac{H_0}{c} u\right) = 0, \qquad f_y = \frac{\sigma}{c} H_0 E_x{}^\circ = 0$$

т. е. решение системы (15) также описывает обычный вязкий пограничный слой. На данном примере видна связь решений системы (15) с решениями уравнений пограничного слоя и точных уравнений (1) — (2). Решения системы (12) — (13) достаточны для вычисления поля скоростей в пограничном слое. Уравнения (12) — (13) проще уравнений (1) — (2) и их использование позволяет отделить задачу о пограничном слое от внешней задачи. Решения же системы (15) не отличаются в главных членах (по δ) для поля скоростей от решений уравнений пограничного поля с использованием точных уравнений (1) — (2).

Решения уравнений (12) — (13) недостаточно для определения поля токов. Действительно, из (25) следует

$$j_x = \frac{\sigma}{c} H_0 v, \qquad j_y = 0$$

что не совпадает с $\mathbf{j} = 0$, даваемым точными уравнениями (1) — (2) и законом Ома. Это связано с тем, что при определении $\mathbf{E}^\circ$ из (12) — (13) не учитываются члены порядка δ, которые учтены при вычислении скорости. Чтобы вычислить $\mathbf{E}$ с точностью до членов порядка δ, надо использовать систему (22). Для рассматриваемого примера в силу (23), (25) решение (22) имеет вид

$$E_y^1 = 0, \quad E_x^1 = \int \frac{\partial E_y{}^\circ}{\partial x} dy = \frac{H_0}{c} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{H_0}{c} \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{H_0}{c} v$$

т. е. решение (22) дает результат, совпадающий с (24).

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить и при различных усложнениях задачи, в частности усложнении закона Ома, если оценки для основных величин при этом не меняются.

Поступила 22 VI 1962 НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field., 1957, NACA TN 3971.
2. Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 5.
3. Жигулев В. Н. Теория электрического разряда в движущейся проводящей среде. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 6.
4. Glauert M. B. A study of the magnetohydrodynamic boundary layer on a flat plate. J. fluid mech., 1961, vol. 10, № 2.
5. Glauert M. B. The boundary layer on a magnetized plate. J. fluid mech., 1962, vol. 12, № 4.
6. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
7. Kerrebrock J. L. Electrode boundary layers in direct — current plasma accelerators. JAS, 1961, vol. 28, № 8.
8. Губанов А. И., Пушкарев О. Е. Вязкий пограничный слой в магнитной гидродинамике при конечном $\omega\tau$. ЖТФ, 1962, т. XXXII, вып. 6.