

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА С ВЫДЕЛЕНИЕМ (ПОГЛОЩЕНИЕМ) ЭНЕРГИИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. А. Бармин

(Москва)

Рассматриваются поверхности разрывов, на которых происходят экзотермические или эндотермические реакции, в электропроводящей среде с бесконечной проводимостью при произвольном магнитном поле.

Исследование разрывов с экзотермической реакцией в проводящей среде, когда скорость течения перпендикулярна, а магнитное поле параллельно поверхности разрыва, численно проведено Гроссом, Чикитцом и Ривлином [1]. Заметим, что этот случай может быть сведен к газовой динамике, но с другой зависимостью внутренней энергии от плотности.

Демуцкий В. П. и Половин Р. В. [2] исследовали разрывы с эндотермической и экзотермической реакциями при любой ориентации поля и скорости, но для случая, когда количество освобождающейся энергии и квадрат скорости Альфвена много меньше квадрата скорости звука.

Ниже исследуются разрывы, с выделением (поглощением) энергии без ограничения на величину и направление скорости и напряженности магнитного поля и величину выделяющейся энергии. Показано, что и в общем случае возможны два типа детонации и два типа ударной ионизации, в которых зона реакции следует соответственно за быстрой и медленной ударной волной. Кроме того, возможны четыре вида разрывов типа горения. Два из них являются разрывами сжатия, два — разрывами разрежения. Исследован характер изменения скачков плотности, давления, магнитного поля, скорости газа, температуры и энтропии за разрывом в зависимости от интенсивности разрыва и выделяющейся энергии.

Получены ограничения на величину поля и величину выделяющейся энергии, при которых не имеют места медленная детонация и два вида горения, скорость которых может быть близкой к скорости Альфвена. Формулировка части результатов этой работы опубликована в статье [3].

1. Будем рассматривать среды, для которых зависимость внутренней энергии от давления p и плотности ρ имеет вид

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + C \quad \left(T = \rho^{\gamma-1} f(p\rho^{\gamma-1}) \right)$$

При этом предполагается, что γ и C меняются на разрыве, а зависимость температуры $T = T(p, \rho)$ согласно [4] в этом случае имеет указанный выше вид, т. е. не обязательно среда является совершенным газом; характер разрывов и изменения всех рассматриваемых величин, кроме температуры и энтропии, не зависит от вида функции f . Поэтому в дальнейшем при рассмотрении изменения температуры будем для простоты предполагать, что $p = R_0 \rho T$.

Для того чтобы непрерывно шла реакция, необходим приток непрореагировавшего вещества. Поэтому будем рассматривать поверхности, через которые поток массы не равен нулю. В случае, когда плотность непре-

рывна, основные соотношения на разрыве [5] примут вид

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} + (C_1 - C_2)(\gamma_2 - 1)p_1, \quad H_{t_2}^2 - H_{t_1}^2 = 8\pi(p_2 - p_1) \quad (1.1)$$

$$v_{n1} = v_{n2} = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho_1}}, \quad v_{t2} - v_{t1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_1}}(H_{t2} - H_{t1}) \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем индексы 1 и 2 обозначают величины перед и за разрывом соответственно, H_n , v_n , H_t , v_t — нормальные и касательные составляющие к поверхности разрыва магнитного поля и скорости газа относительно этой поверхности.

Отсюда видно, что давление, величина касательной составляющей магнитного поля и скорости меняются скачком, величина которого определяется исходным состоянием и количеством выделяющейся энергии. При этом магнитное поле и скорость могут поворачиваться на любой угол вокруг нормали к поверхности разрыва.

2. Будем теперь считать, что имеется скачок плотности. Легко показать [5], что в этом случае напряженность магнитного поля и скорость газа по обеим сторонам разрыва и нормаль к поверхности разрыва лежат в одной плоскости. Это означает, что проекции указанных векторов на плоскость разрыва коллинеарны. Введем два безразмерных параметра

$$\eta = \frac{H_{t2}}{H_{t1}} - 1, \quad \xi = -h_1 \frac{\Delta u_0}{\Delta v_0} \quad \left(h_1 = \frac{H_{t1}}{H_{t2}} \right) \quad (2.1)$$

Здесь Δu_0 , Δv_0 — скачки нормальной и касательной составляющей скорости газа. Используя законы сохранения массы, импульса и непрерывность касательной составляющей напряженности электрического поля $\mathbf{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{H})/c$, выразим скачки всех величин и скорости газа относительно разрыва через эти параметры и величину h_1

$$\begin{aligned} \Delta R = R_2 - 1 &= \frac{\xi\eta}{\xi + 1}, & \Delta P = P_2 - P_1 &= \eta[\xi - h_1^2(\eta/2 + 1)] \\ \Delta P^* = P_2^* - P_1^* &= \eta\xi, & V_1^2 &= (\eta + 1)\xi + 1, & V_2^2 &= \xi + 1 \\ \Delta u &= \frac{\eta\xi}{V(\eta + 1)\xi + 1}, & \Delta v &= -\frac{\eta h_1}{V(\eta + 1)\xi + 1}, & \Delta h &= \eta h_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь P_i , R_2 , P_i^* — безразмерное давление, плотность, полное давление соответственно; V_i — безразмерная скорость газа относительно разрыва; Δu , Δv — безразмерные скачки компонент скорости газа

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{4\pi\rho_i}{H_n^2}, & R_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, & P_i^* &= P_i + \frac{1}{2} \frac{H_i^2}{H_n^2} \\ V_i &= \frac{D_i}{H_n / \sqrt{4\pi\rho_i}}, & \Delta u &= \frac{\Delta u_0}{H_n / \sqrt{4\pi\rho_1}}, & \Delta v &= \frac{\Delta v_0}{H_n / \sqrt{4\pi\rho_1}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя уравнение состояния Клапейрона, получим для скачка температуры:

$$\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \frac{\eta(\xi + 1)[\xi - \frac{1}{2}h_1^2(\eta + 2)] - P_1\xi\eta}{(\eta + 1)\xi + 1} \quad \left(\Theta_i = \frac{R_{0i}T_i}{H_n^2/4\pi\rho_i}, i = 1, 2 \right) \quad (2.4)$$

Закон сохранения энергии позволяет тогда установить зависимость $\xi = \xi(\eta, q)$ и параметрами перед разрывом; имеем

$$f(\eta, \xi; h_1^2, P_1, q, \gamma_2) \equiv \xi^2 \eta [2 - (\gamma_2 - 1) \eta] + \\ + 2\xi \left[\frac{\gamma_2 - 2}{2} h_1^2 \eta^2 - (h_1^2 + \gamma_2 P_1 + q - 1) \eta - q \right] - \eta(\eta + 2)h_1^2 - 2q = 0 \quad (2.5)$$

где

$$q_2 = (\gamma_2 - 1) \frac{e_1(p_1, \rho_1) - e_2(p_1, \rho_1)}{H_n^2 / 4\pi\rho_1} = (\gamma_2 - 1) \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_1 - 1)} P_1 + \frac{C_1 - C_2}{H_n^2 / 4\pi\rho_1} \right]$$

Здесь $C_1 - C_2$ — освобождающаяся химическая энергия на единицу массы. В случае экзотермической реакции $q > 0$, в случае эндотермической $q < 0$.

Для вычисления изменения энтропии в состоянии за разрывом в зависимости от величин, характеризующих разрыв, воспользуемся тождеством

$$TdS_0 = \frac{1}{\gamma - 1} d \frac{p}{\rho} + p d \frac{1}{\rho}$$

Это значит, что изменение энтропии предполагается не зависящим от изменения концентрации вещества.

Используя закон сохранения энергии на разрыве, указанное тождество преобразуем к виду

$$\Theta_2 dS_2 = \frac{dq}{\gamma_2 - 1} + \frac{1}{2} \frac{d\xi_0}{(\xi_0 + 1)^2} \eta^2 (\xi^2 + h_1^2) \quad \left(S_2 = \frac{S_0}{R_{02}}, \xi_0 = (\eta + 1) \xi \right) \quad (2.6)$$

Будем задавать термодинамическое состояние и магнитное поле перед разрывом, выделяющуюся энергию q , γ_2 и либо одну из величин ξ , η характеризующих интенсивность разрыва, либо связь между ними $\psi(\eta, \xi) = 0$. Тогда (2.5) и указанное соотношение будут служить для нахождения η и ξ как функций заданных величин, а соотношения (2.2) и (2.4) — всех величин за разрывом и его скорости.

Проведем теперь качественное исследование соотношения (2.5) в плоскости $\eta\xi$ в зависимости от параметров P_1 , h_1^2 , q . Так как $P_2 \geq 0$, $V_1^2 \geq 0$, $V_2^2 \geq 0$, из соотношений (2.2) следует, что физическим смыслом обладает часть плоскости, определяемая неравенствами

$$\eta \left[\xi - \frac{1}{2} h_1^2 (\eta + 2) + P_1 / \eta \right] \geq 0, \quad (\eta + 1) \xi + 1 \geq 0, \quad \xi + 1 \geq 0$$

На фиг. 1 знакам равенства соответствуют кривые 1, 7, 8. Заметим, что линиями, на которых поток массы через разрыв постоянен, являются гиперболы $(\eta + 1) \xi = \text{const}$ (аналог луча в плоскости $p\rho^{-1}$ в обычной газовой динамике). Различные точки оси $\eta = 0$ при $\xi > -1$ изображают состояния перед разрывом с различными значениями потока массы через разрыв.

Остановимся на случае, когда $q = 0$. Соотношение (2.5) примет вид $\eta \{ \eta [(\gamma_2 - 1) \xi^2 - (\gamma_2 - 2) h_1^2 \xi + h_1^2] - 2 [\xi^2 - (h_1^2 + \gamma_2 P_1 - 1) \xi - h_1^2] \} = 0$

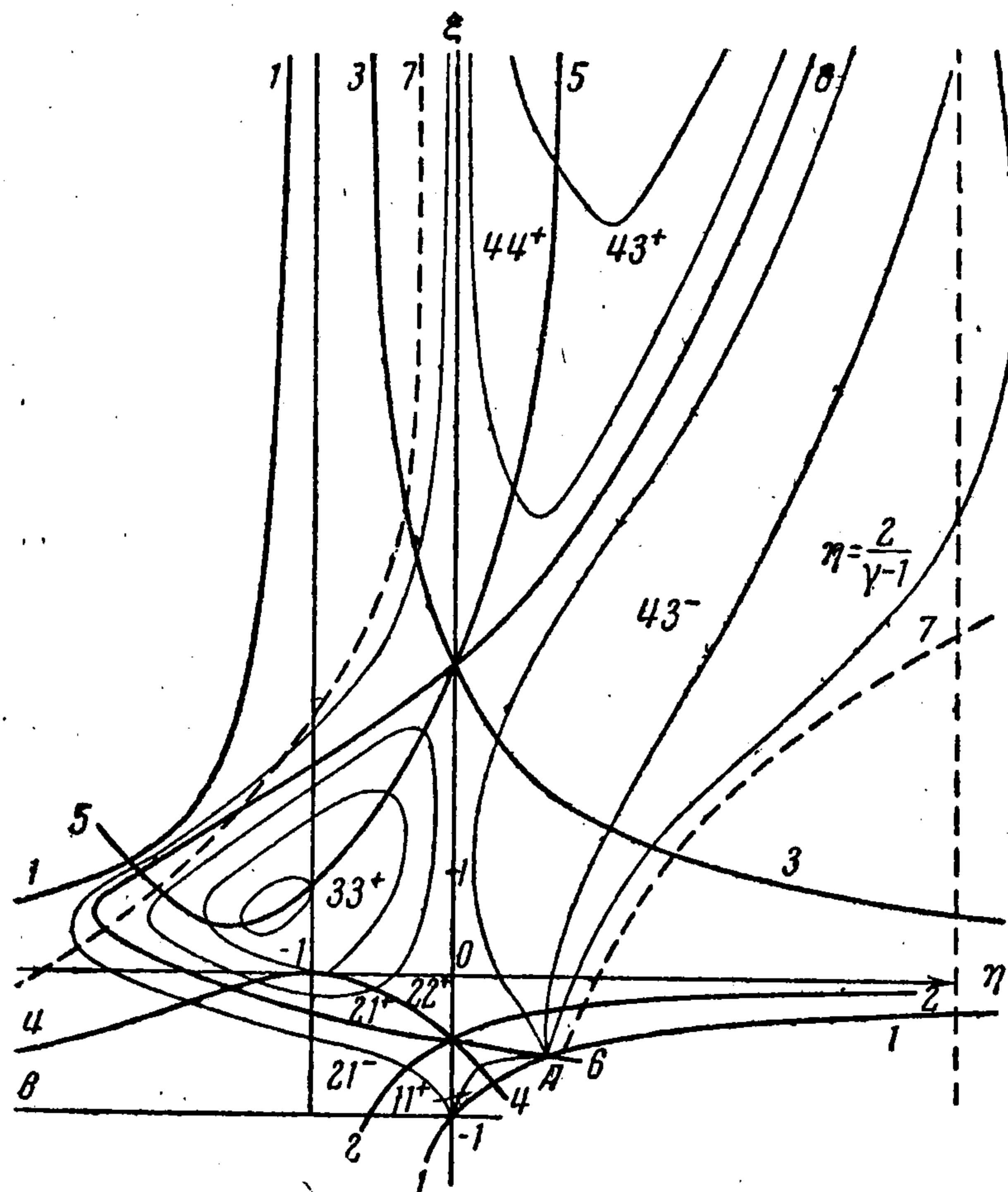
Случаю $\eta = 0$ соответствует непрерывное течение, а обращению в нуль квадратной скобки соответствует магнитогазодинамическим ударным волнам.

Зависимость

$$\eta = 2 \frac{\xi^2 - (h_1^2 + \gamma_2 P_1 - 1) \xi - h_1^2}{(\gamma_2 - 1) \xi^2 - (\gamma_2 - 2) h_1^2 \xi + h_1^2} \quad (\xi = \xi(\eta, 0)) \quad (2.7)$$

для различных значений h_1^2 , P_1 и γ_2 представлена на фиг. 2, где кривые 1 и 2 имеют место при $(\gamma_2 - 1) h_1^2 > 1 - \gamma_2 P_1$, кривая 3 — при $1 - \gamma_2 P_1 > (\gamma_2 - 1) h_1^2 > (\gamma_2 - 1)^2 (1 - \gamma_2 P_1)$, кривая 4 при $(\gamma_2 - 1) (1 - \gamma_2 P_1) > h_1^2$.

Из соотношения (2.6) видно, что энтропия возрастает на частях кривой, изображенных на фиг. 2 сплошной линией. Согласно (2.2), этим частям кривых соответствуют разрывы сжатия ($\Delta P > 0$, $\Delta R > 0$), при этом легко видеть, что верхней части соответствует быстрая магнитогидродинамическая ударная волна, а нижней части медленная.



Фиг. 1

На фиг. 1 тонкими линиями нанесены кривые $\xi = \xi(\eta; h_1^2 P_1, q)$ при фиксированных h_1^2 , P_1 , γ_2 для различных q . Кривая 6 соответствует $q = 0$. Согласно (2.5), все кривые этого семейства пересекаются в точках, лежащих на гиперболе $(\eta + 1) \xi + 1 = 0$. Такими точками будут $A(\xi_a, \eta_a)$, $B(\xi_b, \eta_b)$, а в случае, которому соответствует кривая 1 на фиг. 2, также точки $C(\xi_c, \eta_c)$ и $D(\xi_d, \eta_d)$. Здесь

$$\begin{aligned} \xi_a &= -1, & \eta_a &= 0 \\ -1 < \xi_b < 0, & \eta_b > 0 \\ \xi_c, \xi_d > 0, & \eta_c, \eta_d < -1 \end{aligned}$$

Далее, из (2.5) следует, что при малых значениях $|q|$ кривые семейства $\xi = \xi(\eta, q)$ мало отличаются от кривой $\xi = \xi(\eta, 0)$, а

при больших значениях $|q|$, но ограниченных величинах η и ξ от гиперболы

$$\xi(\eta + 1) + 1 = 0$$

Заметим также, что кривые пересекают ось $\xi = 0$ в точках $\eta = -1 \pm \sqrt{1 - 2q/h_1^2}$ и имеют вертикальные асимптоты $\eta = 0$, $\eta = 2/(\gamma_2 - 1)$, вблизи которых имеют место соответственно разложения

$$\xi = \frac{q}{\eta} + h_1^2 + \gamma_2 P_1 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} q + O(\eta) \quad \text{при } |\eta| \ll 1 \quad (2.8)$$

$$\xi = -\frac{2}{\eta - 2/(\gamma_2 - 1)} \left[h_1^2 + (\gamma_2 - 1)(\gamma_2 P_1 - 1) + \frac{1}{2}(\gamma_2^2 - 1)q \right] + O(1) \quad \text{при } |\eta - 2/(\gamma_2 - 1)| \ll 1$$

Кроме того, прямые параллельные оси η или ξ пересекают кривые не более чем в двух точках.

3. Будем рассматривать, как и в обычной газовой динамике, разрывы двух типов.

1. Разрывы, скорость которых зависит от интенсивности волны и определяется из решения магнитогазодинамической задачи. Такими разры-

вами являются ударные волны, детонационные волны, т. е. ударные волны, за которыми сразу следует зона реакции, ионизационные волны, т. е. ударные волны, сопровождающиеся ионизацией. Будем называть их разрывами детонационного типа. Условиями эволюционности, т. е. устойчивости к расщеплению этих разрывов, являются неравенства [2,3]

$$V_1^2 > a_{1+}^2, \quad 1 < V_2^2 \leq a_{2+}^2$$

или

$$1 > V_1^2 > a_{1-}^2, \quad V_2^2 \leq a_{2-}^2 \quad (3.1)$$

где a_{i+} , a_{i-} — безразмерная скорость быстрых и медленных магнитозвуковых волн.

2. Разрывы, скорость которых не зависит от интенсивности волн и определяется физико-химическими характеристиками среды.

Таковыми разрывами являются фронты обычного и термоядерного горения, скачки конденсации, фотомонизационные разрывы. Будем называть их разрывами типа горения. Эволюционность этих разрывов определяется одной из следующих пар неравенств

$$V_1^2 < a_{1-}^2, \quad V_2^2 \leq a_{2-}^2; \quad a_{1-}^2 < V_1^2 < 1, \quad a_{2-}^2 \leq V_2^2 < 1$$

$$1 < V_1^2 < a_{1+}^2, \quad 1 < V_2^2 \leq a_{2+}^2; \quad a_{1+}^2 < V_1^2, \quad a_{2+}^2 \leq V_2^2 \quad (3.2)$$

Для исследования эволюционности разрывов в плоскости $\eta\xi$ построены кривые, вдоль которых скорость газа относительно разрыва перед и за ним равна скоростям малых магнитогидродинамических возмущений. На фиг. 2 равенствам $V_1^2 = a_{1+}^2$, $V_1^2 = a_{1-}^2$, $V_1^2 = 1$ соответствуют гиперболы 2 и 3 и пара пересекающихся прямых $\xi = 0$, $\eta = -1$; равенству $V_2^2 = 1$ — прямая $\xi = 0$, а равенствам $V_2^2 = a_{2+}^2$ и $V_2^2 = a_{2-}^2$ — кривые Жуге 4 и 5. Уравнения линий 2—5 следующие:

$$(\eta + 1)\xi + 1 = a_{1+}^2, \quad (\eta + 1)\xi + 1 = a_{1-}^2$$

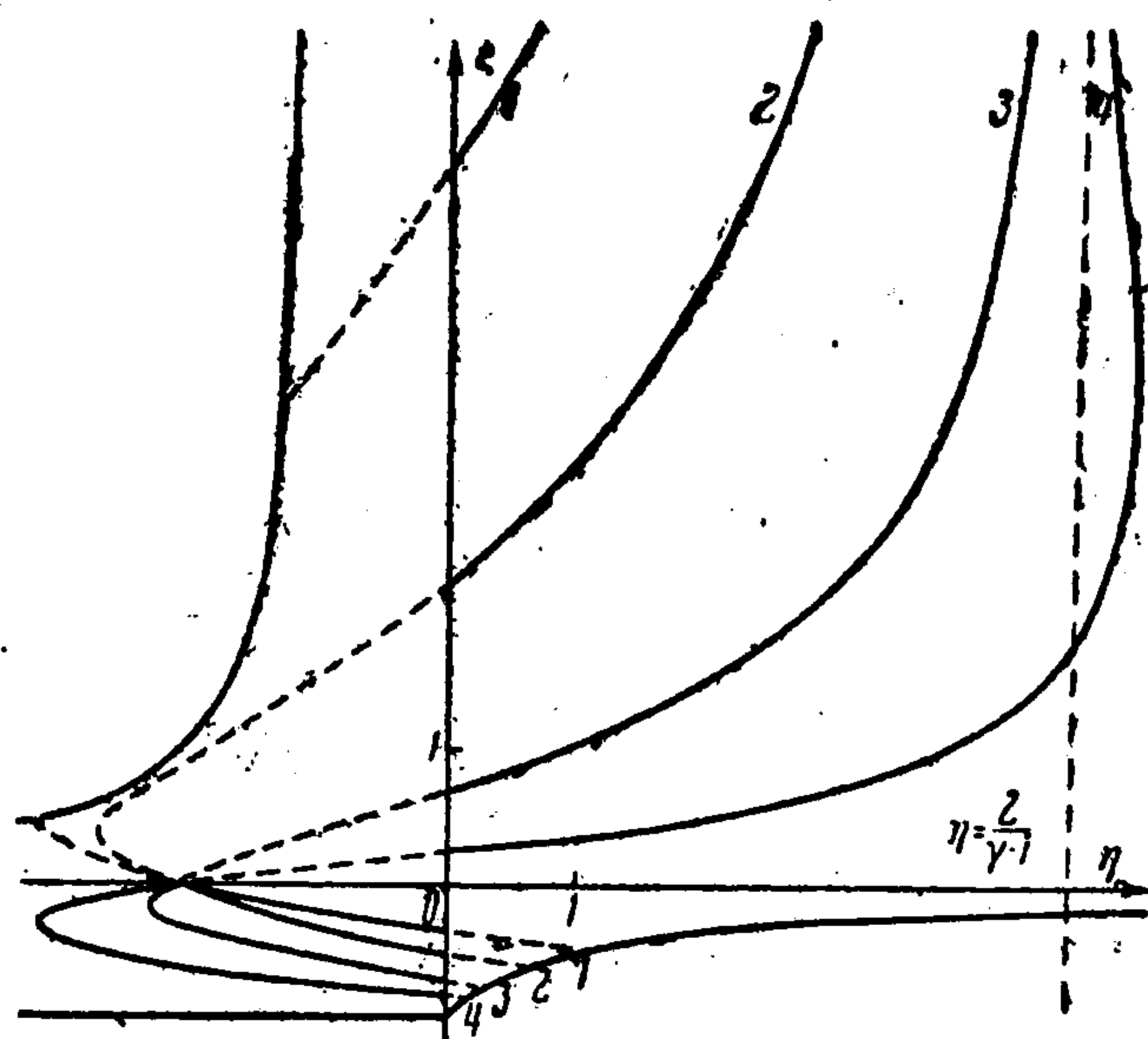
$$\varphi(\eta, \xi) \equiv (\eta + 1)^2 h_1^2 \left(1 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} \xi\right) + \gamma_2 (\eta + 1) \xi^2 - (\gamma_2 + 1) \xi^2 +$$

$$+ \xi \left(\frac{\gamma_2}{2} h_1^2 + \gamma_2 P_1 - 1\right) = 0 \quad (3.3)$$

Совокупность всех перечисленных кривых и ось $\eta = 0$ образуют на плоскости $\eta\xi$ ряд областей (фиг. 1). Из (3.1) и (3.2) следует, что разрывы детонационного типа будут эволюционны в областях 43 и 21, а разрывы типа горения — в областях 44, 33, 22, 11. Рассмотрим теперь свойства разрывов, соответствующие разным областям.

4. В области 43⁺ имеем разрывы с выделением энергии (фиг. 1), на которых удовлетворяются неравенства

$$a_{1+}^2 < V_1^2(\eta, 0) < V_1^2(\eta, q), \quad V_2^2(\eta, 0) < V_2^2(\eta, q) \leq a_{2+}^2$$



Фиг. 2

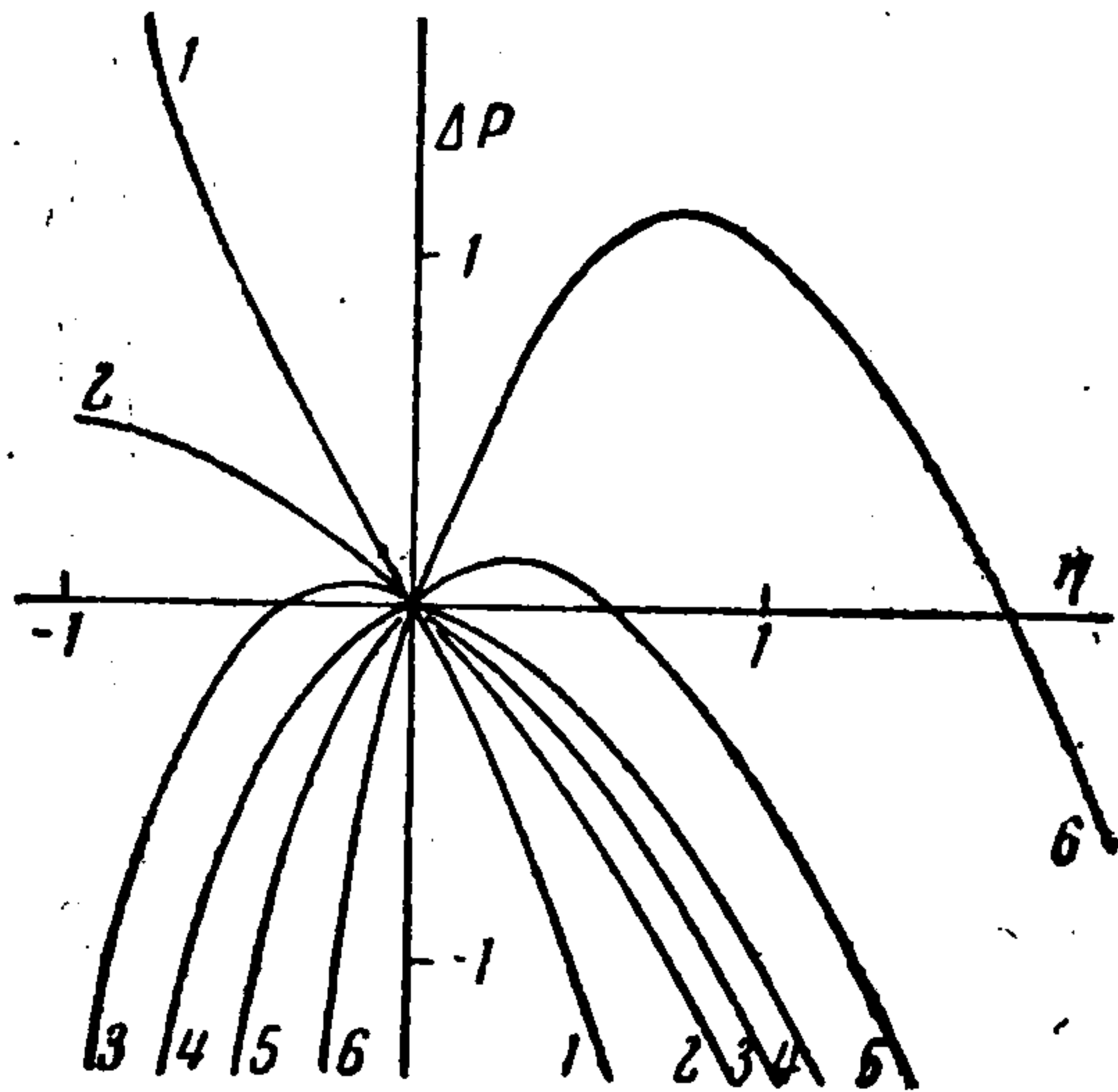
Будем называть эти разрывы сверхальфвеновской детонацией. Скачки всех величин на них положительны и $V_1^2 > V_2^2$. В них зона реакции следует за быстрой ударной волной. Так как через зону реакции и ударную волну поток вещества сохраняется постоянным, то процессам, происходящим в ней, соответствует в плоскости $\eta\xi$ движение вдоль гиперболы

$$\xi(\eta + 1) = \xi_0 = \text{const}$$

Из соотношений (2.5), (2.6) и (3.3) получим, что вдоль этих гипербол

$$(\gamma_2 - 1)\Theta_2 dS_2 = dq = \frac{\Phi(\eta, \xi)}{(\xi_0 + 1)^2 \xi} d\xi \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что при движении вдоль гиперболы вверх от ударной адиабаты $\xi = \xi(\eta, 0)$ энтропия и выделяющаяся энергия q возрастают и достигают максимума на кривой Жуге при $V_2 = a_{2+}$ или, другими словами, указанные гиперболы



Фиг. 3

и кривые $\xi = \xi(\eta, q)$ касаются одна другой на кривой Жуге.

Далее, при движении вдоль гиперболы с ростом q происходит уменьшение скачков плотности, полного давления и магнитного поля до значений в точке Жуге и увеличение скорости V_2 до величины a_{2+} . Скачок газодинамического давления в зависимости от начального состояния и потока вещества либо монотонно возрастает, либо сначала убывает, а потом возрастает до значений в точке Жуге.

На фиг. 3 изображены графики изменения газодинамического давления в разрывах при постоянном потоке вещества. Значениям $0 < V_1^2 < 1$, $V_1^2 = 1$, $1 < V_1^2 < 1 + h_1^2$, $V_1^2 = h_1^2 + 1$ и $V_1^2 > h_1^2 + 1$ отвечают на фиг. 3 кривые 1—6 соответственно. На фиг. 4 изображены графики полного давления для различных q в быстрых сверхальфвеновских разрывах. Состояниям $V_1^2 = a_{1+}^2, V_2^2 = a_{2+}^2$ соответствуют кривые 1 и 2; значению $q = 0$ соответствует кривая 3.

Скачок температуры $\Delta\Theta$ для $\xi_0 + 1$, близких к a_{1+}^2 , монотонно убывает, а в противном случае сначала возрастает, а потом убывает, оставаясь положительным.

В области 43^- имеем (фиг. 1) разрывы детонационного типа с поглощением энергии ($q < 0$), на которых удовлетворяются неравенства

$$a_{1+}^2 < V_1^2(\eta, q) < V_1^2(\eta, 0), \quad 1 < V_2^2(\eta, q) < V_2^2(\eta, 0)$$

Будем называть их сверхальфвеновской ионизацией. В них зона ионизации следует за быстрой ударной волной.

Скачки полного давления, плотности, магнитного поля газодинамического давления (для совершенного газа) и безразмерной температуры положительны, а $V_1^2 > V_2^2$. Из (4.1) следует, что при движении вдоль гиперболы $\xi(\eta + 1) = \xi_0$ вниз от ударной адиабаты $\xi = \xi(\eta, 0)$ (т. е. в зоне ионизации) величины S_2 и q монотонно убывают.

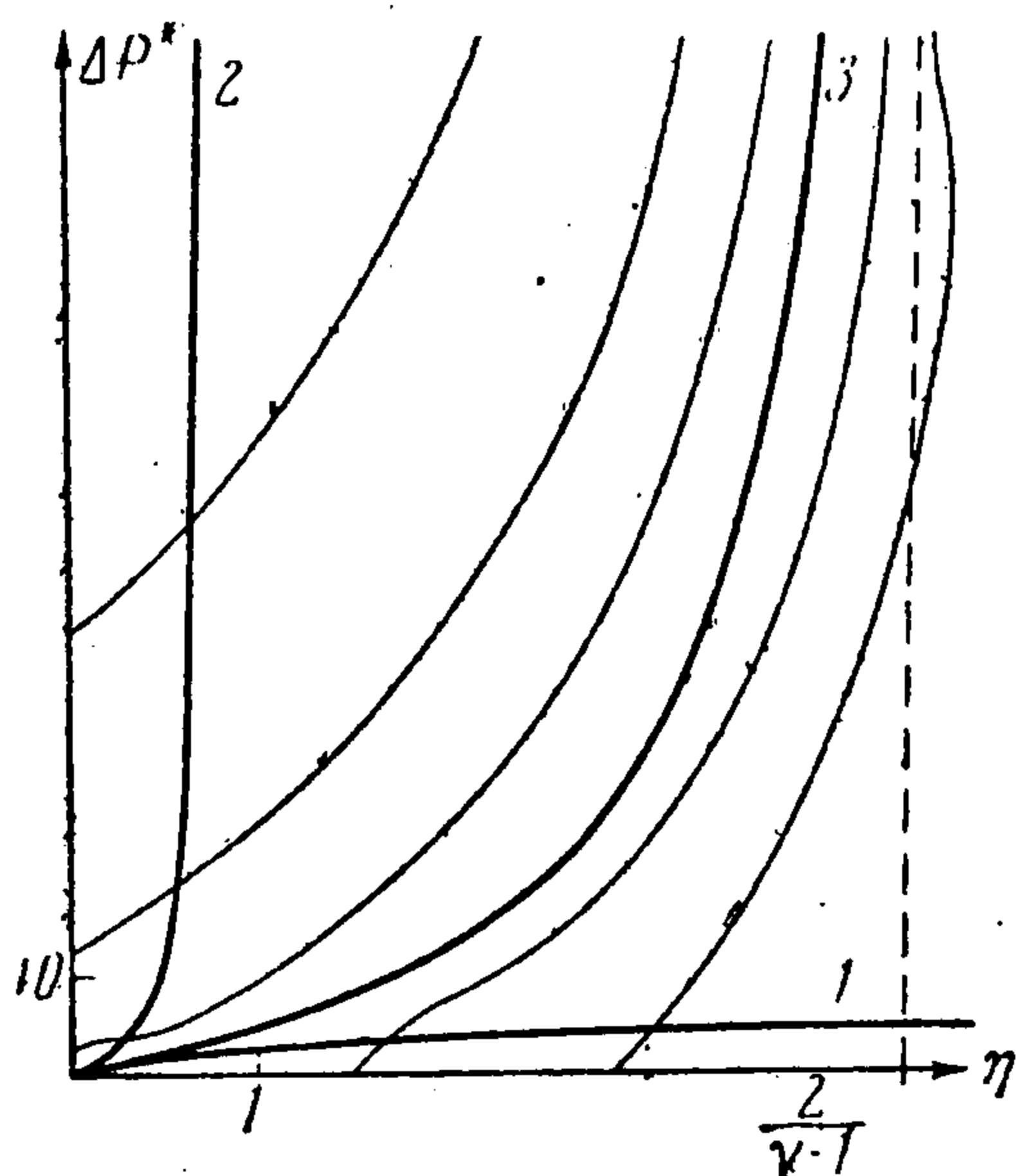
Скачок температуры $\Delta\Theta$ при $a_{1+}^2 - 1 < \xi_0 < \xi_{01}$ будет монотонно возрастать, при $\xi_{01} < \xi_0 < \xi_{02}$ сначала возрастать, а потом убывать, а при $\xi_{02} < \xi_0$ монотонно убывать. Скачки полного давления, плотности и магнитного поля монотонно возрастают до тех пор, пока либо энтропия не ста-

нет равной значению перед разрывом, либо температура не станет критической, т. е. такой, при которой ионизация невозможна (фиг. 4).

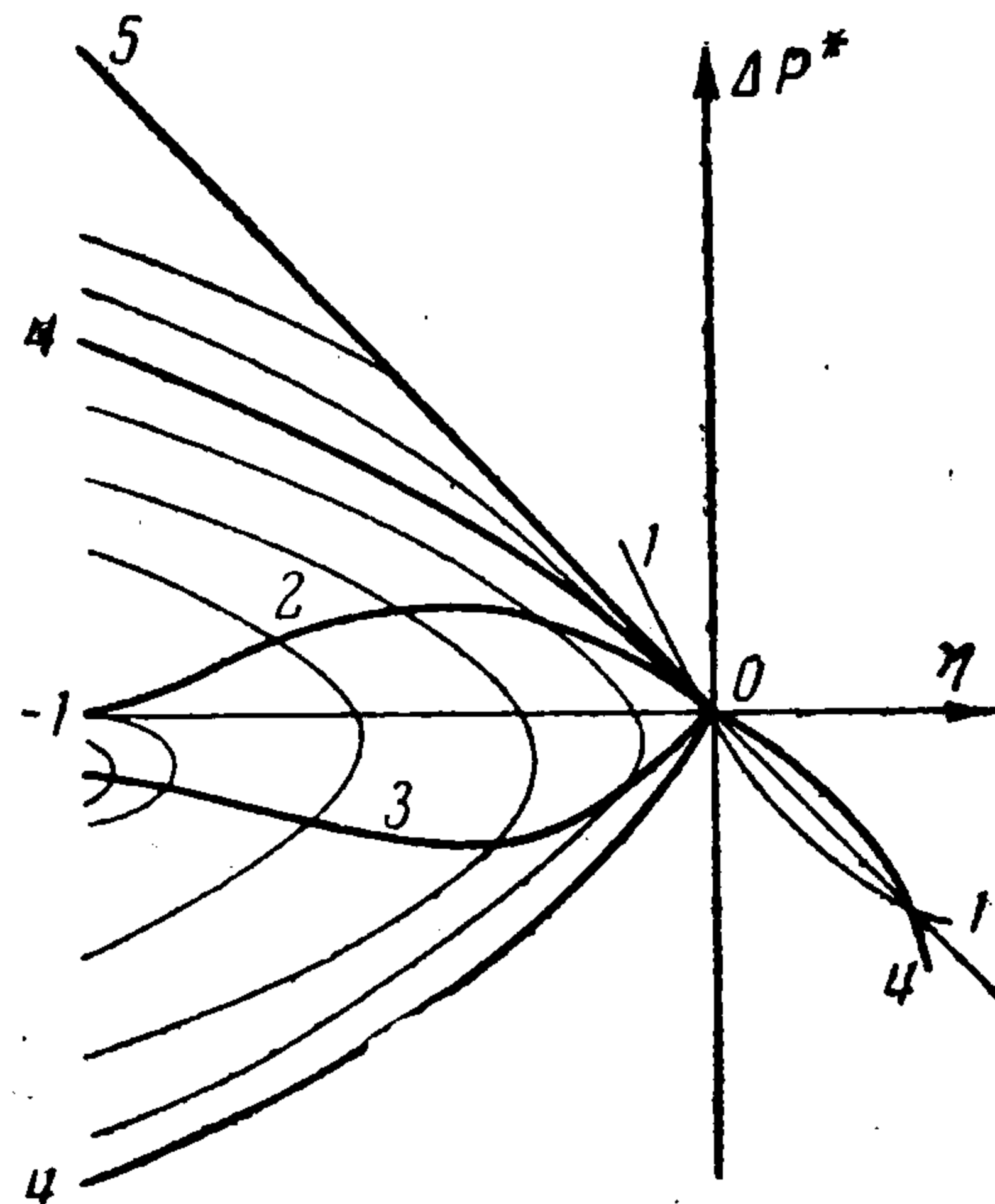
В области $(2I^+)$ имеем (фиг. 1) разрывы детонационного типа с выделением энергии, на которых удовлетворяются неравенства

$$a_{1-}^2 < V_1^2(\eta, 0) < V_1^2(\eta, q) < 1, \quad V_2^2(\eta, 0) < V_2^2(\eta, q) \leq a_{2-}^2$$

Будем называть эти разрывы доальфвеновской детонацией. В них зона реакции следует за медленной ударной волной.



Фиг. 4



Фиг. 5

Из соотношений (2.2), (2.4) получим, что на этих разрывах

$$\Delta R > 0, \quad \Delta P > 0, \quad \Delta P^* > 0, \quad \Delta \theta > 0, \quad -h_1 < \Delta h < 0, \quad V_2 < V_1$$

Из (4.1) следует, что при движении вдоль гиперболы $\xi(\eta + 1) = \xi_0$ вверх от линии $\xi = \xi(\eta, 0)$, что соответствует зоне реакции, происходит увеличение параметра q и энтропии S_2 до максимальных значений, достигаемых на кривой Жуге, соответствующих $V_2 = a_{2-}$. Таким образом, в точке Жуге происходит касание гиперболы с кривыми $\xi = \xi(\eta, q)$.

Скачки плотности, полного и газодинамического давления и абсолютная величина скачка магнитного поля монотонно убывают до значений в точке Жуге, а V_2 возрастает до a_{2-} (фиг. 3, 5).

На фиг. 5 даны графики изменения полного давления в медленных сверхальфвеновских и доальфвеновских разрывах. Состояния $V_1^2 = a_{1-}^2$, $V_2^2 = a_{2-}^2$, $V_{2+}^2 = a_{2+}^2$, $V_2 = 0$ отвечают кривые 1—3, 5. Значению $q = 0$ соответствует кривая 4.

Скачок температуры $\Delta \Theta$ в зависимости от начальных параметров и потока вещества через разрыв может либо монотонно возрастать, либо сначала возрастать, а потом убывать.

Заметим, что доальфвеновская детонация имеет место лишь, когда параметры h_1^2 , P_1 , γ_2 и q удовлетворяют одной из следующих пар неравенств:

$$q \leq \frac{1}{2} h_1^2, \quad \gamma_2 \left(\frac{h_1^2}{2} + P_1 \right) \geq 1 \quad (4.2)$$

$$q \leq \frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2(\gamma_2 + 1)} \left[\gamma_2 \left(\frac{1}{2} h_1^2 + P_1 \right) - 1 \right]^2 \quad (4.3)$$

$$0 < \gamma_2 \left(\frac{h_1^2}{2} + P_1 \right) < \sqrt{1 - (\gamma_2^2 - 1) h_1^2}$$

$$q \leq q^*(h_1^2, P_1, \gamma_2), \quad \sqrt{1 - (\gamma_2^2 - 1) h_1^2} < \gamma_2 \left(\frac{1}{2} h_1^2 + P_1 \right) < 1 \quad (4.4)$$

где q^* — решение системы (см. 2.5).

$$f(\eta, \xi; h_1^2, P_1, \gamma_2, q) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta, \xi, h_1^2, P_1, \gamma_2, q) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} f(\eta, \xi, h_1^2, P_1, \gamma_2, q) = 0$$

Неравенства (4.2) — (4.4) означают, что выделившаяся энергия при фиксированных h_1, P_1, γ_2 ограничена. Так из неравенства (4.2) имеем

$$\rho_1 (C_1 - C_2) (\gamma_1 - 1) < H_{11}^2 / 8\pi \quad \text{при } \gamma_2 = \gamma_1$$

Интересно, что когда выполняются неравенства (4.4) и

$$\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{[\gamma_2 (\frac{1}{2} h_1^2 + P_1) - 1]^2}{2(\gamma_2 + 1)} < q \quad (4.5)$$

на детонационной адиабате $\xi = \xi(\eta, q)$ существуют две точки Жуге, соответствующие различным скоростям разрыва.

В области $2I^-$ имеем (фиг. 1) разрывы детонационного типа с поглощением энергии, на которых выполняются неравенства

$$a_{1-}^2 < V_1^2(\eta, q) < V_1(\eta, 0) < 1, \quad V_2^2(\eta, q) < V_2^2(\eta, 0) \leq a_{2-}^2$$

Назовем этот тип разрывов доальфвеновской ионизацией. В них зона ионизации следует за медленной ударной волной. При доальфвеновской ионизации имеют место следующие неравенства:

$$\Delta R > 0, \quad \frac{1}{2} h_1^2 + 1 > \Delta P > 0, \quad 1 > \Delta P^* > 0, \quad V_1^2 > V_2^2$$

Скачок температуры $\Delta\Theta$ может быть как положительным (для малых $|q|$), так и отрицательным. При движении вдоль гиперболы $\xi(\eta + 1) = \xi_0$ вниз от линии $\xi = \xi(\eta, 0)$, что соответствует зоне ионизации, согласно (4.1) происходит уменьшение величин S_2 и q , а по (2.2) и скорости V_2 . При этом скачок температуры $\Delta\Theta$ для $\xi_0 + 1$, близких к a_{1-}^2 , сначала возрастает, а затем убывает, в противном случае монотонно убывает.

Скачки плотности, полного и газодинамического давления и абсолютная величина скачка магнитного поля увеличиваются до значений, при которых либо энтропия становится равной начальной, либо температура равной критической.

Для перечисленных выше разрывов, помимо величин $h_1^2, P_1, q_1, \gamma_2$, нужно задать одну из величин ξ или η , характеризующую интенсивность разрыва. Тогда расчет разрыва сводится к решению квадратного уравнения (2.5) и определению всех величин за разрывом и скорости разрыва из соотношений (2.2), (2.4).

5. В области 44^+ имеем (фиг. 1) разрывы типа горения с выделением энергии, на которых $a_{1+}^2 < V_1^2$ и $a_{2+}^2 \leq V_2^2$.

Будем называть эти разрывы быстрым сверхальфвеновским горением. Этот тип горения может иметь место, например, при термоядерных реакциях, когда нагрев происходит за счет излучения. Скачки всех величин на этих разрывах положительны, а $V_1^2 > V_2^2$.

В области 22^+ имеем (фиг. 1) разрывы типа горения, на которых удовлетворяются неравенства $a_{1-}^2 < V_1^2 \leq 1, a_{2-}^2 \leq V_2^2 \leq 1$. Будем называть

их быстрым доальфвеновским горением. На этом типе разрывов имеют место неравенства

$$\Delta R > 0, \quad \Delta P > 0, \quad \Delta P^* > 0, \quad \Delta \Theta > 0, \quad 0 > \Delta h > -h_1, \quad V_1^2 > V_2^2$$

Быстрое доальфвеновское горение имеет место для тех же значений параметров h_1^2, P_1, γ_2, q , что и доальфвеновская детонация (см. (4.2), (4.3), 4.4)). Здесь также для параметров, удовлетворяющих неравенствам (4.4) и (4.5), на кривой $\xi = \xi(\eta, q)$ имеются две соответствующие разным скоростям разрыва точки Жуге, в которых $V_2 = a_{2-}$.

В обоих последних типах разрывов при заданной скорости реакции V_1 , т. е. при движении в плоскости $\eta\xi$ вдоль гиперболы $(\eta + 1)\xi = \xi_0$ от начального состояния (ось $\eta = 0$) будет происходить увеличение энтропии и освобожденной энергии, до максимальных значений, достигаемых в точках Жуге. При этом скорость V_2 будет уменьшаться от величины V_1 до a_{2+} либо до a_{2-} соответственно в быстром сверхальфвеновском, либо в доальфвеновском разрыве. Скачки плотности, полного и газодинамического давления, температуры $\Delta\Theta$ и абсолютная величина скачка магнитного поля будут также возрастать (фиг. 3—5).

В области 33^+ имеем (фиг. 1) разрывы с выделением энергии, на которых выполняются неравенства

$$1 \leq V_1^2 < a_{1+}^2, \quad 1 \leq V_2^2 \leq a_{2+}^2$$

Будем называть их медленным сверхальфвеновским горением. Эти разрывы переходят при уменьшении поля до нуля в обычное газодинамическое горение с дозвуковой скоростью. На этом типе разрывов

$$\Delta R < 0, \quad \Delta P^* < 0, \quad -h_1 < \Delta h < 0, \quad V_1^2 < V_2^2$$

Скачки газодинамического давления и температуры могут быть как положительными, так и отрицательными. Медленное сверхальфвеновское горение возможно лишь, когда величины h_1^2, P_1, γ_2, q удовлетворяют одной из следующих пар неравенств:

$$2q < h_1^2 + \frac{[\gamma_2(\frac{1}{2}h_1^2 + P_1) - 1]^2}{\gamma_2 + 1}, \quad \gamma_2\left(\frac{1}{2}h_1^2 + P_1\right) \geq 1$$

$$2q \leq h_1^2, \quad \gamma_2\left(\frac{1}{2}h_1^2 + P_1\right) < 1$$

В области 11^+ имеем (фиг. 1) разрывы типа горения с выделением энергии, на которых выполняются неравенства

$$V_1^2 < a_{1-}^2, \quad V_2^2 \leq a_{2-}^2$$

Будем называть их медленным доальфвеновским горением. На этих разрывах имеют место неравенства

$$-P_1 < \Delta P < 0, \quad -h_1 A > \Delta h > 0, \quad A < \Delta P^* < 0, \quad V_2^2 > V_1^2$$

$$\left(A = \frac{h_1^2 + 1 - \sqrt{(h_1^2 + 1)^2 + 2P_1 h_1^2}}{h_1^2} \right)$$

Скачок температуры $\Delta\Theta$ может быть как положительным, так и отрицательным, а величина q сколь угодно большой.

Для доальфвеновского и сверхальфвеновского медленного горения при фиксированной скорости реакции с увеличением ее интенсивности, что соответствует движению вдоль гиперболы $\xi(\eta + 1) = \xi_0$ от $\eta = 0$, будет происходить по (4.1) увеличение энтропии и выделившейся энергии q от нуля до максимального значения в точках Жуге. При этом скорость V_2

будет увеличиваться до a_{2+} , a_{2-} соответственно в сверхальфвеновском и доальфвеновском разрывах.

Абсолютные величины скачков плотности, полного давления, магнитного поля и газодинамического давления для доальфвеновского разрыва будут монотонно возрастать от нуля до значений в точке Жуге.

Скачок газодинамического давления в случае медленного сверхальфвеновского горения при скоростях горения, больших скорости Альфвена в исходном состоянии, т. е. $V_1^2 > h_1^2 + 1$, будет отрицательным и с ростом q монотонно убывающим до значения в точке Жуге. При скорости горения, меньшей скорости Альфвена, скачок давления сначала возрастает от нуля до максимального значения, а затем убывает до значения в точке Жуге, которое может быть как положительным, так и отрицательным (фиг. 3)

$$\max \Delta P = V_1^2 - 1 + \frac{1}{2} h_1^2 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(V_1^2 - 1)^2 h_1^2} \quad \text{при } \eta + 1 = \sqrt[3]{\frac{V_1^2 - 1}{h_1^2}}$$

Скачок безразмерной температуры в случаях медленных сверхальфвеновских и доальфвеновских разрывов ведет себя аналогично давлению.

При $V_1^2 > B_{\pm}$ (соответственно в сверхальфвеновском и доальфвеновском разрывах) $\Delta \Theta$ отрицателен и монотонно убывает с ростом q ; при $V_1^2 < B_{\pm}$

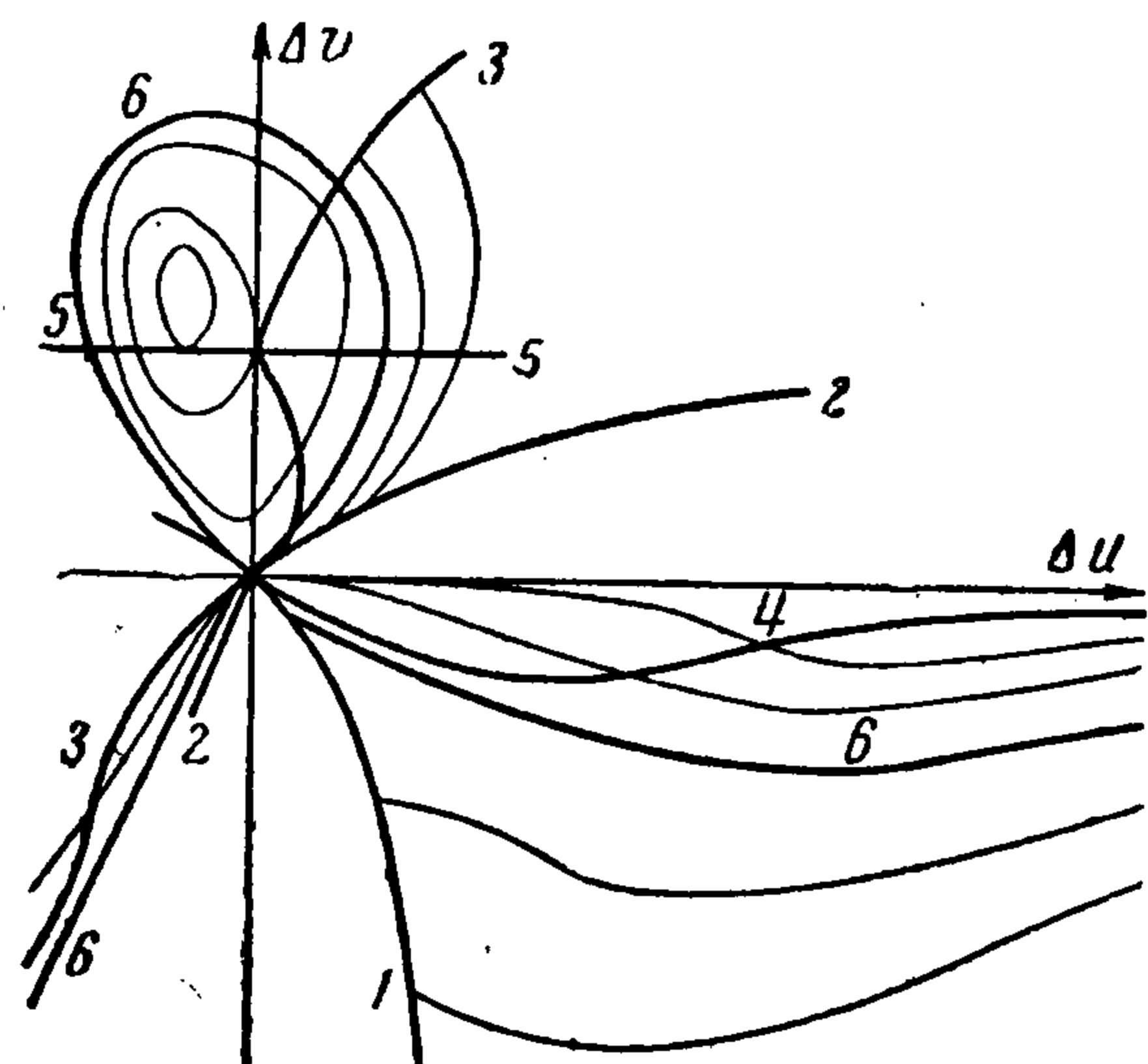
скачок температуры $\Delta \Theta$ сначала возрастает, а потом убывает до значений в точке Жуге

$$B_{\pm} = \frac{h_1^2 + P_1 + 1 \pm \sqrt{(h_1^2 + P_1 + 1)^2 + 4P_1}}{2}$$

Если для разрыва типа горения, помимо величин h_1^2 , P_1 , q , γ_2 , задана скорость реакции V_1 , то из (2.2) получим

$$\xi = \frac{V_1^2 - 1}{\eta + 1}$$

Решая это соотношение совместно с (2.5) и используя (2.2), найдем все величины за разрывом.



Фиг. 6

На фиг. 6 тонкими линиями проведены кривые, связывающие скачки на поверхностях разрывов ($q \neq 0$) нормальной и касательной составляющих скорости газа. Состояниям $V_1^2 = a_{1+}^2$, $V_1^2 = a_{1-}^2$, $V_2^2 = a_{2-}^2$, $V_2^2 = a_{2+}^2$, $h_2 = 0$ соответствуют кривые 1—5. Кривая 6 соответствует ударным переходам без выделения энергии ($q = 0$).

Разрывы типа горения, но с эндотермической реакцией, исследуются аналогично. Заметим, что, согласно (4.1), происходит уменьшение энтропии с увеличением $|q|$, такие разрывы при данном рассмотрении имеют место, когда скачок энтропии за счет изменения γ на разрыве положителен.

Поступила 25 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Cross R. A., Chinitz W., Rivlin T. I. Magnetohydrodynamic effects on exothermal waves. JAS, 1960, vol. 27, № 24.
2. Демукций В. П., Половин Р. В. Об ударной ионизации и детонации в магнитной гидродинамике. ЖТФ, 1961, т. XXXI, вып. 4.
3. Бармин А. А. Поверхности разрыва с выделением или поглощением энергии в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц М. Е. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1958.