

скости симметрии потока ($\xi = 0$). По этой причине естественно предположить, что скачок 2-7 начинается в точке 2, после которой на характеристике 2-6 появляется такая составляющая.

Автору представляется также возможным другой вариант, когда боковой скачок 2-7 частично расположен внутри области 0-1-2-6-5-4, причем переход скачка внутри этой области совершается в некоторой точке на характеристике 6-5. Вариант Рейна, который предлагает поместить начало скачка в некоторую промежуточную точку на характеристике 2-6, маловероятен, так как если бы это имело место, то в точке затухания скачка образовалась бы особая точка, которую можно было бы обнаружить по особенностям в высших производных F , двигаясь вдоль характеристики 2-6. Но выше показано, что первые производные на характеристике 2-6 особенностей не имеют; не имеют их и высшие производные, так как уравнения для коэффициентов разрыва высших производных линейны и не могут содержать подвижных особых точек.

Автор благодарит С. Ф. Фальковича за обсуждение рассмотренных вопросов.

Поступила 1 XI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейн J. W. Differential — geometric Considerations on the Hodograph Transformation for Irrotational Conical Flow, Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, vol. 6, № 4, pp. 229—354.
2. Буземан А. Осесимметрическое коническое сверхзвуковое течение. Сб. Газовая динамика, ИИЛ, 1950, стр. 197—218.
3. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 4, стр. 451—452.
4. Булах Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 4, стр. 393—409.
5. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1, стр. 143—144.
6. Булах Б. М. Замечание к статье Л. Р. Фауэлла «Точное и приближенное решение для сверхзвукового дельтаобразного крыла». ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3, стр. 404—407.
7. Булах Б. М. Замечание к докладу А. Ферри «Новая теоретическая работа по сверхзвуковой аэродинамике в Бруклинском политехническом институте». ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3, стр. 576—580.
8. Булах Б. М. Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2, стр. 229—241.

ОЩЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЛСТОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КРЫЛА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Н. В. Курдюмова (Ленинград)

Задачу о стационарном безвихревом движении крыла под свободной поверхностью рассмотрим в криволинейных координатах ρ, ν , связанных с конформным отображением

$$z = \omega(\zeta), \quad [\zeta = \rho e^{i\nu}] \quad (0.1)$$

кругового кольца на область, ограниченную контуром крыла и осью x . Окружности $\rho = \text{const}$ области ζ соответствует кривая $\rho = \text{const}$ области z ; полагаем, что контуру крыла соответствует окружность единичного радиуса, оси x — окружность $\rho = \rho_2$. Потребуем, чтобы бесконечно удаленной точке области z соответствовала точка, лежащая на луче $\nu = 0$ области ζ .

1. Допустим, что крыло движется в положительном направлении оси x со скоростью c . Ограничимся случаем малых значений параметра $\lambda = 2gh/c^2$ (случай больших чисел Фруда) [1, 2].

Так как уравнение Лапласа в криволинейных координатах ρ, ν имеет такой же вид, как и в полярных, потенциал скоростей ищем в виде суммы

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \nu + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + A_{-m} \rho^{-m}) \cos m\nu + \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \rho^m + B_{-m} \rho^{-m}) \sin m\nu \quad (1.1)$$

Здесь Γ — циркуляция скорости вокруг контура крыла, причем положительное направление Γ совпадает с положительным направлением ψ .

Постоянные A_i, B_i могут быть найдены из граничных условий на свободной поверхности [1] и на контуре крыла

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c \cos(n, x) \quad \text{при } \rho = 1 \quad (1.2)$$

Условие непроницаемости можно рассматривать в виде [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = c \frac{\partial y}{\partial v} = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(1)} \cos mv + \beta_m^{(1)} \sin mv) \quad \text{при } \rho = 1 \quad (1.3)$$

Параметры $\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}$ определяются отображающей функцией (0.1).

Чтобы удовлетворить условию на свободной поверхности, первый член в выражении (1.1) заменим рядом Фурье

$$v = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sin mv \quad (-\pi < v < \pi) \quad (1.4)$$

Подставляя (1.1) в граничные условия (1.2), сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, находим A_m, A_{-m}, B_m, B_{-m} .

Для потенциала скоростей получим

$$\varphi = \frac{\Gamma \psi}{2\pi} + \frac{\Gamma}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{\rho_2^m}{m(1 + \rho_2^{2m})} (\rho^m + \rho^{-m}) \sin mv + \\ + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_m^{(1)}}{m(1 + \rho_2^{2m})} (\rho^m - \rho_2^{2m} \rho^{-m}) \cos mv + \sum_1^{\infty} \frac{\beta_m^{(1)}}{m(1 + \rho_2^{2m})} (\rho^m - \rho_2^{2m} \rho^{-m}) \sin mv \quad (1.5)$$

Покажем, что скорости, соответствующие выбранному потенциалу, равны на бесконечности нулю, т. е. $V_x^\infty = V_y^\infty = 0$. Известно, что полюс функции $\omega(\zeta)$ определяет точка скрещивания обратной функции, следовательно,

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty$$

Из (1.4) и (1.5) видно, что при $v = 0$ и $1 \leq \rho \leq \rho_2$ производные $\partial \varphi / \partial \rho$ и $\partial \varphi / \partial v$ ограничены по абсолютной величине. Следовательно,

$$V_x^\infty = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad V_y^\infty = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Зная $\varphi(\rho, v)$, находим сопряженную функцию тока $\psi(\rho, v)$ и выражение комплексного потенциала

$$w(\zeta) = \varphi(\rho, v) + i\psi(\rho, v) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \sum_1^{\infty} (b_m \zeta^m + b_{-m} \zeta^{-m}) + iD \quad (1.7)$$

$$b_m = A_m - iB_m, \quad b_{-m} = A_{-m} + iB_{-m}$$

Постоянная интегрирования D определяется из условия

$$\psi = 0 \quad \text{при } x = \pm \infty \quad \text{или} \quad \psi(\rho_2, 0) = 0$$

2. Для пояснения предлагаемого способа решения рассмотрим движение крыла почти эллиптического очертания при больших погружениях.

Функцию, дающую конформное отображение кругового кольца на заданную область, ищем в виде

$$z = \omega(\zeta) = \frac{iB}{1 - \kappa \zeta} + A - \frac{iB}{2} + (Q + iP) \sum_1^{\infty} \kappa^{2m} \zeta^m + (Q - iP) \sum_1^{\infty} \kappa^m \zeta^{-m} \quad (2.1)$$

где A, B, Q, P, κ — вещественные параметры, подлежащие определению, причем $0 < \kappa < 1$.

Формула (1.2) построена таким образом, что $\text{Im}[\omega(\zeta)] = y = 0$ при $\rho = \kappa^{-1}$. Следовательно, $\rho_2 = \kappa^{-1}$.

На контуре крыла $\zeta = \sigma = e^{i\nu}$ отображающую функцию можно представить в виде ряда Лорана ($|\kappa\sigma| < 1$)

$$\omega(\sigma) = iB \sum_1^{\infty} \kappa^m \sigma^m + A + \frac{iB}{2} + (Q + iP) \sum_1^{\infty} \kappa^{2m} \sigma^{2m} + (Q - iP) \sum_1^{\infty} \kappa^m \sigma^{-m} \quad (2.2)$$

или

$$\omega(\sigma) = \frac{iB}{1 - \kappa\sigma} - \frac{iB}{2} + A + (Q + iP) \frac{\kappa^2 \sigma}{1 - \kappa^2 \sigma} + (Q - iP) \frac{\kappa}{\sigma - \kappa} \quad (2.3)$$

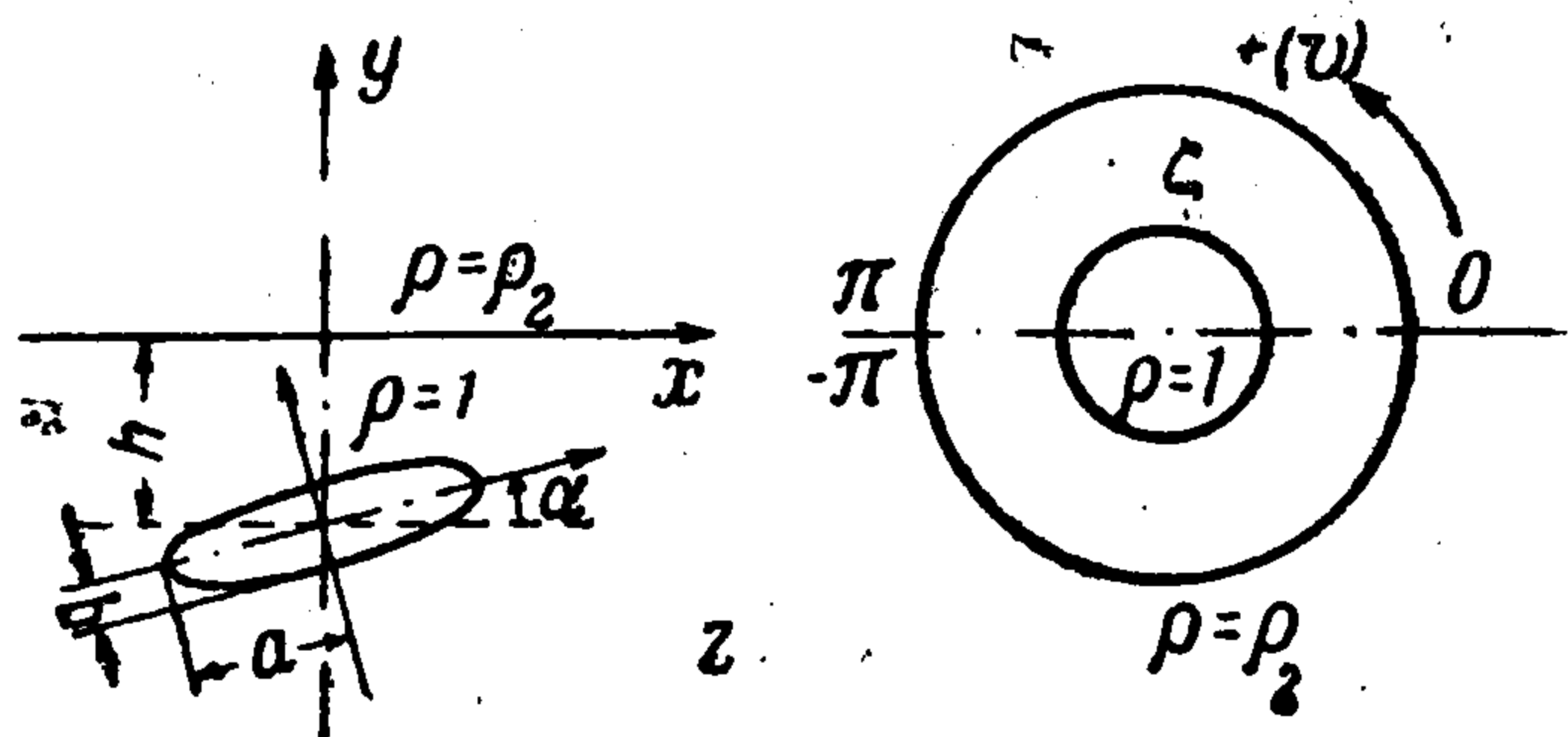
При вычислении A, B, C, κ полагаем, что приближенно

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &\approx \omega_1(\sigma) = A - \frac{iB}{2} + \frac{iB}{1 - \kappa\sigma} + (Q - iP) \frac{\kappa}{\sigma - \kappa} = \\ &= A + \frac{iB}{2} + iB \sum_1^{\infty} \kappa^m \sigma^m + (Q - iP) \sum_1^{\infty} \kappa^m \sigma^{-m} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Справедливость принятого допущения будет подтверждена дальше. Отделяя в (2.4) вещественную часть от мнимой, получим приближенное уравнение контура крыла в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &\approx x_1 = -(B + P) S_2 + Q S_1 + A \\ y &\approx y_1 = (B - P) S_1 - Q S_2 + \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \kappa^m \cos mv, \quad S_2 = \sum_1^{\infty} \kappa^m \sin mv$$



Покажем, что (2.5) — уравнение эллипса в параметрическом виде. Предварительно заметим, что

$$\left(S_1 - \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right)^2 + S_2^2 = \left(\frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \right)^2 \quad \text{при } |\kappa| < 1 \quad (2.6)$$

В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть вспомогательную функцию

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \frac{\kappa\sigma}{1 - \kappa\sigma} = S_1 + iS_2 \quad \text{при } |\kappa\sigma| < 1 \quad (2.7)$$

Известно, что геометрическое место точек (x_0, y_0) — окружность, уравнение которой совпадает с уравнением (2.6). Решая систему (2.5) относительно S_1 и S_2 , подставляя найденные выражения в (2.6), получим уравнение эллипса

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(x_1 - A)Q - (y_1 - B/2)(B + P)}{Q^2 + P^2 - B^2} - \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{(x_1 - A)(B - P) - (y_1 - B/2)Q}{Q^2 + P^2 - B^2} \right]^2 = \left(\frac{\kappa}{1 - \kappa^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Учитывая, что эллипс повернут относительно оси x на угол α , а координаты центра — $(0, -h)$, находим

$$A = -\frac{Q\kappa^2}{1 - \kappa^2}, \quad \frac{B}{2} - \frac{\kappa^2(P - B)}{1 - \kappa^2} + h = 0, \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{Q}{P} \quad (2.9)$$

Для уравнения эллипса в каноническом виде $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ имеем

$$\frac{\kappa^2}{(1 - \kappa^2)^2} \frac{(Q^2 + P^2 - B^2)^2}{Q^2 + P^2 + B^2 - 2\sqrt{Q^2 B^2 + P^2 B^2}} = a^2 \quad (2.10)$$

$$\frac{\kappa^2}{(1 - \kappa^2)^2} \frac{(Q^2 + P^2 - B^2)^2}{Q^2 + P^2 + B^2 + 2\sqrt{Q^2 B^2 + P^2 B^2}} = b^2 \quad (2.11)$$

Из (2.9), (2.10) и (2.11) находим B, P, Q и κ .

Знаки при B , P , Q должны быть выбраны таким образом, чтобы получить по условию $0 < \kappa < 1$. При вытянутых контурах ($a/b \geq 5$) и небольших α ($|\alpha| < 15^\circ$)

$$B = -\frac{1-\kappa^2}{2\kappa}(a+b) = -2h + \kappa[a+b - (a-b)\cos 2\alpha] \quad (2.12)$$

$$P = -\frac{1-\kappa^2}{2\kappa}(a-b)\cos 2\alpha, \quad Q = -\frac{1-\kappa^2}{2\kappa}(a-b)\sin 2\alpha \quad (2.13)$$

$$\kappa = \frac{-2h + \sqrt{4h^2 + 2(a^2 - b^2)\cos 2\alpha - (a+b)^2}}{2(a-b)\cos 2\alpha - (a+b)} \quad (2.14)$$

Здесь h — отстояние центра эллипса от свободной поверхности, a и b — полуоси (фиг. 1). В таблице вычислен параметр κ для некоторых значений $h/2a$, a/b и α .

$h/2a$	$\alpha=0$			$\alpha=15^\circ$		
	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0
$a/b=5$	0.153	0.105	0.075	0.162	0.108	0.098
$a/b=10$	0.136	0.089	0.071	0.138	0.091	0.076
$a/b=15$	0.132	0.087	0.069	0.133	0.089	0.073

Из (2.14) видно, что по мере увеличения h параметр κ убывает. Подставляя A , B , P , Q , κ в выражение (2.1), находим искомую отображающую функцию $\omega(\zeta)$.

В заключение проверим справедливость допущения (2.4). Из (2.3) и (2.4) имеем

$$\omega(\sigma) = \omega_1(\sigma) + \Delta\omega(\sigma), \quad \Delta\omega(\sigma) = (Q + iP) \frac{\kappa^3 \sigma}{1 - \kappa^3 \sigma} \quad (2.15)$$

Здесь $z_1 = \omega_1(\sigma)$ — уравнение эллипса в комплексной форме.

Оценим по модулю $\Delta\omega(\sigma)$; учитывая (2.13), (2.15), получим неравенство

$$|\Delta\omega(\sigma)| = \frac{\kappa^2(1-\kappa^2)}{2\sqrt{1-2\kappa^2\cos v + \kappa^4}}(a-b) < \frac{\kappa^2}{2}(a-b)$$

При $h/2a \geq 1$ и $5 \leq a/b \leq 15$ имеем $|\Delta\omega(\sigma)| < 0.12b$ согласно таблице и (2.14), т. е. контур $x + iy = \omega(\sigma)$ близок к эллиптическому контуру $x_1 + iy_1 = \omega_1(\sigma)$.

3. Рассмотрим задачу о движении почти эллиптического крыла при больших погружениях. Отделяя в (2.2) вещественную часть от мнимой, находим

$$y(1, v) = \frac{B}{2} + (B - P) \sum_1^{\infty} \kappa^m \cos mv + P \sum_1^{\infty} \kappa^{3m} \cos mv - Q \sum_1^{\infty} \kappa^m (1 - \kappa^{2m}) \sin mv \quad (3.1)$$

По формуле (1.3) определяем параметры $\alpha_m^{(1)}$ и $\beta_m^{(1)}$

$$\alpha_m^{(1)} = c\kappa^m Q (\kappa^{2m} - 1), \quad \beta_m^{(1)} = c\kappa^m (P - B - P\kappa^{2m}) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (1.5), принимая во внимание, что $\rho_2 = \kappa^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\Gamma v}{2\pi} + cQ \sum_1^{\infty} \frac{\kappa^m (\kappa^{2m} - 1)}{\kappa^{2m} + 1} (\kappa^{2m} \rho^m - \rho^{-m}) \cos mv + \\ & + \frac{\Gamma}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m \kappa^m (\rho^m + \rho^{-m})}{m(1 + \kappa^{2m})} \sin mv + c \sum_1^{\infty} \frac{\kappa^m (P - B - P\kappa^{2m})}{1 + \kappa^{2m}} (\kappa^{2m} \rho^m - \rho^{-m}) \sin mv \end{aligned} \quad (3.3)$$

Определив $\varphi(\rho, v)$, пишем выражение комплексного потенциала в форме (1.7). Аналогично можно решить задачу о движении крыла вблизи твердой стенки.

Поступила 2 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Тр. конференции по волновому сопротивлению. Изд-во ЦАГИ, 1937.
2. Кочин Н. Е. О конференции по волновому сопротивлению. Собр. соч., т. II, Изд-во АН СССР, 1949.
3. Курдюмова Н. В. О решении плоской задачи гидродинамики для двухсвязных областей. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.