

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Д. В. РЕЙНА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГОДОГРАФА ДЛЯ КОНИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ»

Б. М. Булах
(Саратов)

В работе Рейна [1] при помощи дифференциально геометрических методов изучаются свойства интегральных поверхностей уравнения Буземана [2], описывающего безвихревые конические потоки газа.

В качестве примера применения этих методов рассматривается задача обтекания треугольной пластинки под углом атаки сверхзвуковым потоком невязкого газа при условии, что кромки пластинки сверхзвуковые, скольжение отсутствует. Рейн предлагает свое доказательство невозможности непрерывного обтекания «верха» пластинки и некоторое изменение схемы обтекания, которые недостаточно обоснованы.

Вышесказанное, а также желание ответить на некоторые критические замечания Рейна, который широко комментирует работы [3-7], побудили автора написать настоящую заметку.

Рассмотрим треугольную пластинку под углом атаки δ без скольжения в потоке невязкого газа, имеющего скорость W_1 и число Маха $M_1 > 1$. Предполагаем, что кромки крыла сверхзвуковые, поэтому конические течения, возникающие при обтекании «верха» и «низа» крыла, не взаимодействуют и могут рассматриваться отдельно (фиг. 1).

В конических потоках компоненты скорости u, v, w по осям декартовой системы координат, энтропия S , давление p зависят только от угловых координат, за которые примем $\xi = x/z, \eta = y/z$, направив ось z по оси симметрии крыла (фиг. 1). Для безвихревых конических течений конический потенциал $F(\xi, \eta) = z^{-1}\phi(x, y, z)$, где ϕ — потенциал скорости, удовлетворяет уравнению

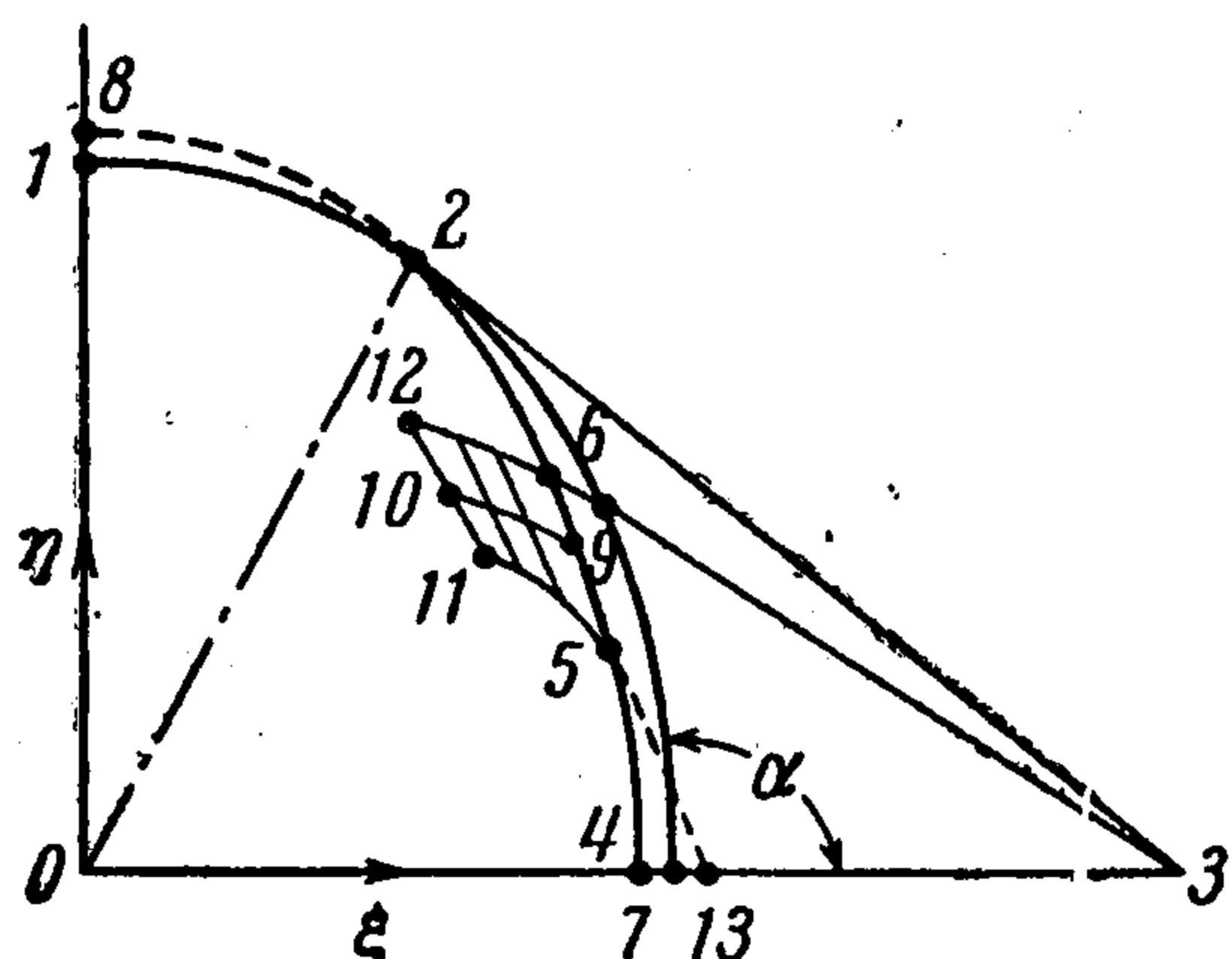
$$L(F) = AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \quad (1)$$

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2$$

$$B = a^2\xi\eta - (u - \xi w)(v - \eta w)$$

$$C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

$$a^2 = a_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$

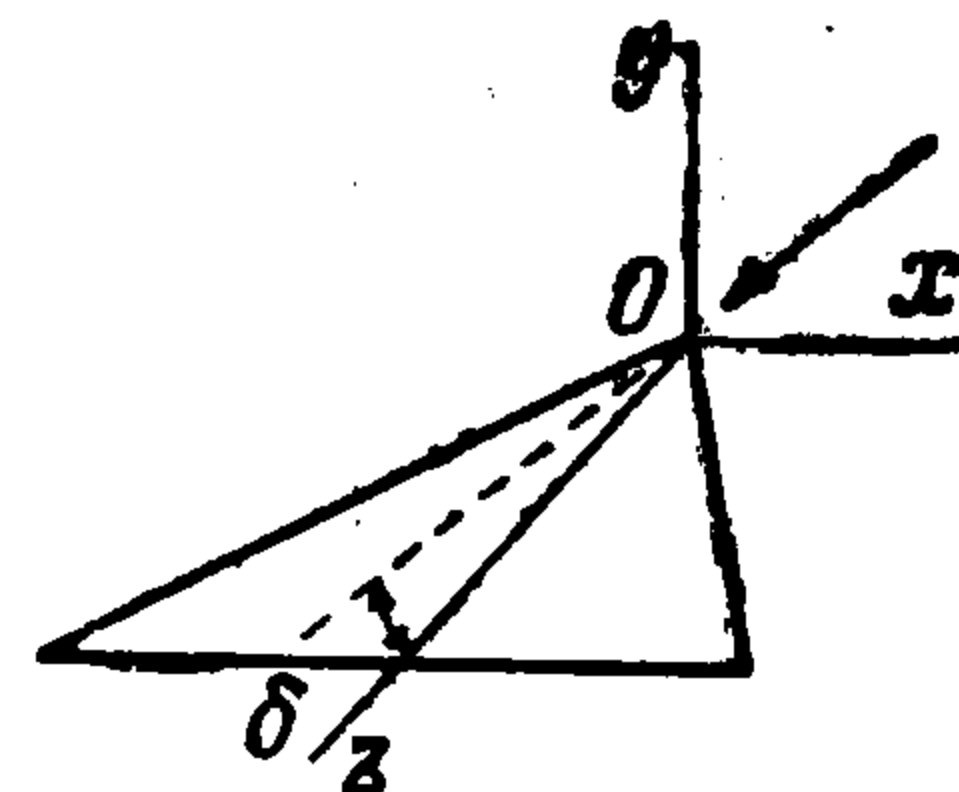


Фиг. 2

Здесь a_1 — скорость звука в невозмущенном потоке, a — местная скорость звука, γ — адиабатический индекс. В силу симметрии изобразим картину обтекания верха пластинки [6-8] на плоскости $\xi\eta$ только для $\xi > 0$ (фиг. 2).

Крыло изображается отрезком 0-3. Огибающей конусов Маха невозмущенного потока с вершинами на боковой кромке являются дуга 1-2 конуса Маха с вершиной в точке 0 (фиг. 1) и отрезок прямой 2-3. При обтекании боковой кромки пластинки образуется течение Прандтля — Майера, после которого следует однородный поток, примыкающий к поверхности крыла, область 3-6-9-5-4-3. Течение Прандтля — Майера имеет пучок прямолинейных характеристик уравнения (1), проходящих через точку 3 (прямые 3-2, 3-6), т. е. оно является центрированной простой волной. Область общего конического течения над центральной частью крыла ограничена ударной волной 2-7, проходящей около криволинейной характеристики 2-6 течения Прандтля — Майера, прямолинейной характеристики 6-5, дуги конуса Маха 5-4 для однородного потока в области 3-4-5-9-6-3, а также дугой конуса Маха 1-2 для невозмущенного потока.

В работе [8] автор отказался от введения «возможных» скачков типа скачка 2-8 около конуса Маха 1-2 независимо от аргументов Рейна, который пишет [1], что около конуса Маха 1-2 поток должен расширяться и, следовательно, нет оснований ожидать образования скачка 2-8. Причина введения скачка 2-8 заключалась не в том, что автор



Фиг. 1

не заметил, что в окрестности 1-2 будет течение разрежения, а в математических трудностях смыкания потока, примыкающего к 1-2, с остальным потоком, в частности в точке 2, где течение после 1-2 должно сомкнуться вдоль линии тока 2-0 с течением после ударной волны 2-7 или характеристики 2-6.

В последнее время автор [8] нашел особые точки, дающие основание предполагать, что в точке 2 потоки сомкнутся; это позволяет отказаться от введения скачка 2-8 (такое заключение относится и к другим аналогичным случаям, например, к случаю обтекания низа треугольной пластинки, края прямоугольной пластинки и т. д.). Отметим, что схема со скачком 2-8 включает в себя схему с дугой конуса Маха 1-2 как частный случай. Рейн вопросов смыкания потоков не рассматривает.

Если предположить, что поток около верха пластинки непрерывен, т. е. скачок 2-7 отсутствует, то границей общего конического течения является линия 1-2-6-5-4. Дуга конуса Маха 5-4 должна быть включена в границу при всех углах атаки, при которых прямолинейная характеристика 6-5, продолженная до поверхности пластинки, образует с ней угла $\alpha > \pi/2$ (фиг. 2), так как данные на характеристике 5-13 и условия обтекания пластинки на отрезке 4-13 единственным образом определяют поток в области 5-13-4, и этот поток — однородный. Если с ростом угла атаки α становится меньше $\pi/2$, то дуга 5-4, естественно, исчезает.

Невозможность непрерывного течения была установлена автором [4,6] из следующих соображений. Характеристика 5-6 прямая, поэтому течение, которое к ней примыкает, есть простая волна, ограниченная криволинейными характеристиками 6-12, 5-11. Будем двигаться по произвольной криволинейной характеристике простой волны 9-10 от точки 9 к точке 10. Это движение (по терминологии работы [4]) происходит «в сторону скорости». При этом [4], если на этой характеристике встретится параболическая точка ($AC - B^2 = 0$) уравнения (1), то она будет точкой огибающей прямолинейных характеристик простой волны, и ускорение на прямолинейной характеристике, проходящей через параболическую точку, равно нулю во всех точках, за исключением параболической, при подходе к которой ускорение зависит от пути приближения к ней. Это означает, что в рассматриваемой части простой волны 5-6-12-10-11 не может образоваться непрерывной параболической линии, вдоль которой возможно соединение простой волны с течением эллиптического типа, имеющего место во внутренней части области 0-4-5-6-2-1. (В точке 0 течение всегда эллиптического типа, $AC - B^2 > 0$.) Можно представить себе случай, когда характеристики 6-12, 5-11 сходятся в одну параболическую особую точку. Этот случай представляется слишком искусственным, как и другие случаи, возникающие, если к характеристике 12-11 присоединить область однородного потока. По этим причинам автор еще в работе [4] ввел скачок 2-7.

Рейн рассуждает следующим образом. Будем двигаться вдоль линии тока 3-4-0 по крылу от точки 3 к точке 4 на конусе Маха 4-5. После 5-4 поток должен сразу же начать сжиматься, но таких потоков не существует. По этой причине при переходе из пространства годографа на физическую плоскость $\xi\eta$ линия 5-4 является предельной (второго типа по терминологии Рейна) и поток должен изменить свое направление без пересечения 5-4. Все линии тока должны попасть в точку 0, где имеется особенность Ферри, поэтому поток должен еще раз изменить свое направление, т. е. должна образоваться еще одна предельная линия (первого типа), после чего линия тока попадает в 0. Такое же положение сохраняется и для ряда других линий тока.

Следовательно, рассуждение Рейна основывается на том, что к конусу Маха 5-4 нельзя присоединить потоков, которые сначала расширяются, а затем сжимаются.

Это предположение весьма правдоподобно: но течение, примыкающее к 5-4, носит пространственный, неосесимметричный характер, свойства которого мало изучены, поэтому автор предпочел в свое время основываться на соображениях, приведенных выше, при доказательстве невозможности непрерывного движения, так как они требуют менее существенных предположений о свойствах потока.

Предположив существование предельных линий, Рейн пытается найти подтверждение их существования, для этого он рассматривает дифференциальные свойства интегральной поверхности в пространстве годографа вдоль характеристики 2-6. Здесь Рейн делает ошибку. Он приходит к выводу, что в некоторой промежуточной точке на характеристике 2-6 предельная линия первого рода касается характеристики и здесь образуется особая точка (ускорение обращается в бесконечность).

Покажем, что таких особых точек у решения, примыкающего к простой волне вдоль 2-6, быть не может. Введем [4] в окрестности характеристики 2-6 криволинейные координаты $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, $\psi = \psi(\xi, \eta)$ так, чтобы $\varphi = 0$ соответствовало характеристике 2-6. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$F_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2F_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + F_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + F_{\varphi}L(\varphi) + F_{\psi}L(\psi) = 0 \quad (2)$$

$$Q(\varphi, \varphi) = A\varphi_{\xi}^2 + 2B\varphi_{\xi}\varphi_{\eta} + C\varphi_{\eta}^2, \quad Q(\varphi, \psi) = A\varphi_{\xi}\psi_{\xi} + B(\varphi_{\xi}\psi_{\eta} + \varphi_{\eta}\psi_{\xi}) + C\varphi_{\eta}\psi_{\eta} \quad \text{и т. д.}$$

Пусть f_2, f_1 — предельные значения, взятые при подходе к точке кривой $\varphi = 0$ с разных сторон; обозначим через $[f] = f_2 - f_1$ скачок функции f .

Функции F, F_{ξ}, F_{η} непрерывны при переходе через $\varphi = 0$; можно показать, что

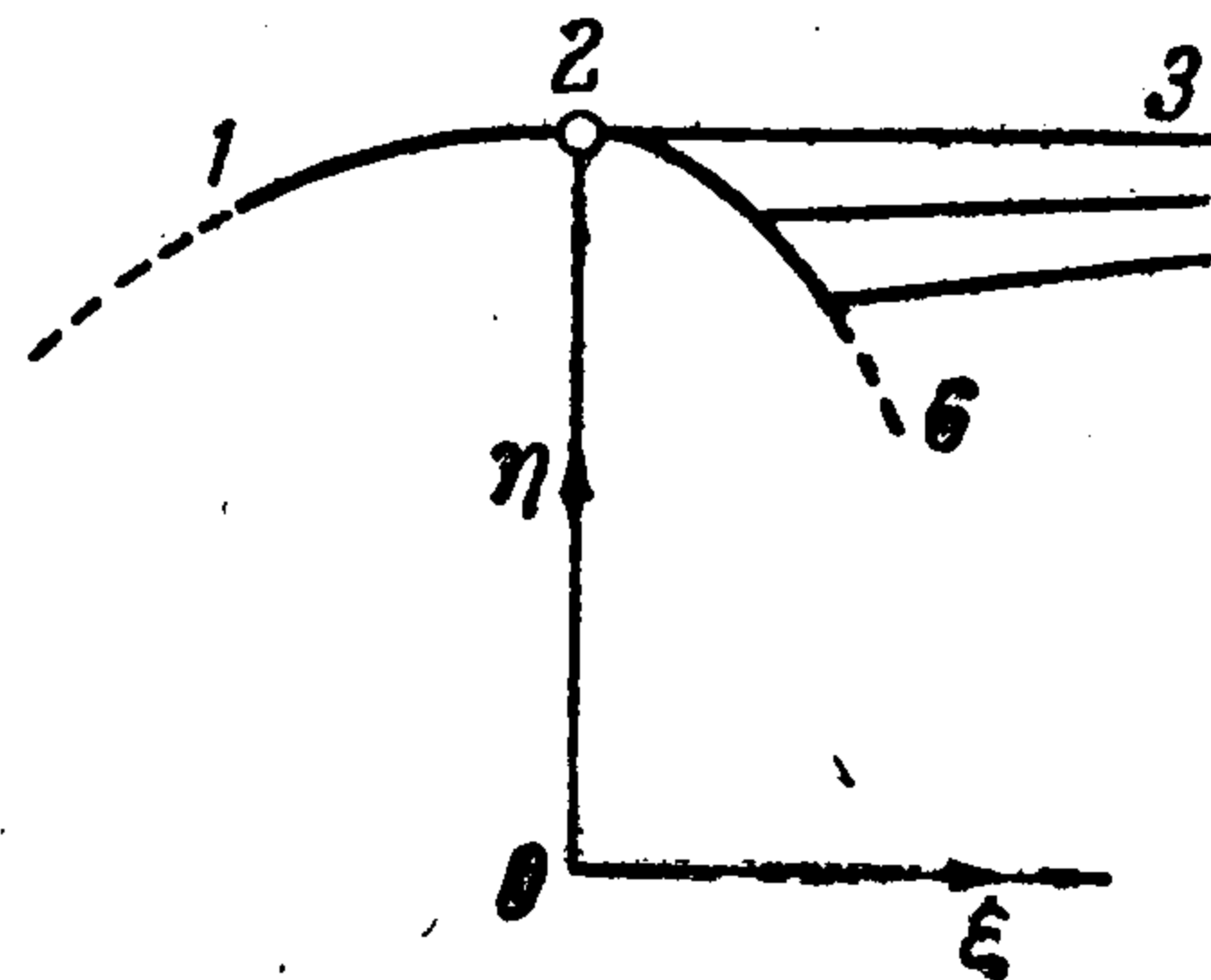
$$[F_{\xi\xi}] = \lambda\varphi_{\xi}^2, \quad [F_{\xi\eta}] = \lambda\varphi_{\xi}\varphi_{\eta}, \quad [F_{\eta\eta}] = \lambda\varphi_{\eta}^2$$

При этом коэффициент разрыва вторых производных $\lambda = [F_{\varphi\varphi}]$ удовлетворяет уравнению

$$2Q(\varphi, \psi) \frac{d\lambda}{d\psi} + \lambda \{Q(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi\varphi}} \lambda + Q_1(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi}} + Q(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi}} (F_{\varphi\varphi})_1 + \\ + 2F_{\varphi\psi}Q(\psi, \psi)_{F_{\varphi}} + F_{\psi\psi}Q(\psi, \psi)_{F_{\varphi}} + F_{\varphi}L(\varphi)_{F_{\varphi}} + F_{\psi}L(\psi)_{F_{\varphi}} + L(\varphi)\} = 0 \quad (3)$$

Индекс 1 означает предельные значения $Q(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi\varphi}}, F_{\varphi\varphi}$, взятые при подходе к значению $\varphi = 0$ со стороны простой волны. В простой волне F не имеет особых точек (за исключением точки 3), поэтому коэффициенты уравнения (3) регулярны на характеристике 2-6. Если в некоторой точке на характеристике 2-6 ускорение обращается в бесконечность, как это полагает Рейн, то эта точка должна быть особой для уравнения (3). Уравнение (3) нелинейно, поэтому его решения могут обладать неподвижными и подвижными особыми точками. Неподвижная особая точка имеется в точке 2, здесь

$$Q(\varphi, \psi) = 0$$



Фиг. 3

Других неподвижных особых точек на характеристике 2-6 нет. Действительно, если бы при движении по криволинейной характеристике простой волны 2-6 от точки 2 к точке 6, т. е. при движении в сторону скорости [4], встретилась бы точка, где $Q(\varphi, \psi) = 0$, то эта точка была бы параболической ($AC - B^2 = 0$) для уравнения (1). Но такая точка была бы точкой огибающей прямолинейных характеристик простой волны [4], что невозможно, так как этой огибающей является точка 3 (фиг. 2).

Исследуем подробнее поведение решений (3) в окрестности точки 2 (фиг. 2). Если повернуть систему координат так, чтобы ось z была бы направлена по скорости на характеристике 2-3 и характеристика 2-3 была бы параллельна оси ξ (фиг. 3), то координаты точки 2 будут $\xi = 0, \eta = \eta_1 = (M_1^2 - 1)^{-1/2}$, а уравнение характеристики 2-6 в окрестности точки 2 имеет вид [4]

$$\eta = \eta_1 - \eta_1^{-1/2}\xi^2 + O(\xi^3)$$

Кроме того, в точке 2 для производных конического потенциала F в простой волне имеем

$$F_{\xi} = F_{\eta} = F_{\xi\xi} = F_{\xi\eta} = 0, \quad F_{\eta\eta} = \frac{2W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^4}$$

Вводя систему координат φ, ψ при помощи формул

$$\varphi = \eta - \eta_1 + \eta_1^{-1/2}\xi^2 + O(\xi^3), \quad \psi = \xi$$

и учитывая поведение F в простой волне, уравнение (3) в окрестности точки 2 можно представить в виде

$$(\alpha_0\psi + \dots) \frac{d\lambda}{d\psi} + \lambda \{(\gamma_0 + \dots) + \lambda(\beta_0 + \dots)\} = 0$$

где

$$\alpha_0 = 2a_1^2(M_1^2 - 1)^{1/2}, \quad \beta_0 = \frac{(\gamma + 1)M_1^2W_1}{(M_1^2 - 1)^{3/2}}, \quad \gamma_0 = 4a_1^2(M_1^2 - 1)^{1/2}$$

Так как $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 / \alpha_0 = 2 > 0$, то [4]

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \lambda = -\frac{4W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^4} = -\frac{\gamma_0}{\beta_0} \quad \text{при } \lambda \neq 0$$

Зная $\lambda(0)$, находим

$$(F_{\eta\eta})_2 = (F_{\eta\eta})_1 + \lambda \varphi_{\eta}^2 = -\frac{2W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^4} \quad \text{при } \psi \rightarrow 0 \quad (4)$$

Итак, или $\lambda \equiv 0$ на всей характеристике 2-б и значение $(F_{\varphi\varphi})_2$ совпадает с $(F_{\varphi\varphi})_1$ имеющих место в простой волне, или $(F_{\eta\eta})_2$ в точке 2 определяется согласно (4) для любого решения, примыкающего к характеристике 2-б.

В точке 2 (фиг. 3) имеется особая точка [8]. При подходе к точке 2 со стороны $\xi = +0$ и со стороны $\xi = -0$ имеются разные особенности. Особенность при $\xi = -0$ не рассматривается; отметим, что поток должен расширяться в окрестности точки 2. Решение в окрестности точки 2 при $\xi = +0$ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \frac{2W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{M_1^4} (2X - \sigma X') \xi^3 + \dots & \left(X = X(\sigma), X' = \frac{dX}{d\sigma} \right) \\ v &= -\frac{W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^{5/2}}{M_1^4} X' \xi^2 + \dots & \left(\sigma = \frac{\eta_1 - \eta}{\xi^2} \eta_1 \right) \\ w &= W_1 + \frac{W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^4} X' \xi^2 + \dots & (\eta_1 = (M_1^2 - 1)^{-1/2}) \end{aligned} \quad (5)$$

При этом $X = X(\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$(X' + 2\sigma - 4\sigma^2) X'' + (10\sigma - 4) X' - 12X = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$X(1) = 1, \quad X'(1) = 2 \quad (7)$$

(Эти условия получаются из формулы (2.30) в [8] подстановкой $\sigma_0 = 1$, которое соответствует характеристике 2-б.) Решения (6), удовлетворяющие (7), распадаются на два типа, различающиеся значением $X''(1)$. Решения первого типа в окрестности $\sigma = 1$ представляются разложением

$$X(\sigma) = 1 + 2(\sigma - 1) + (\sigma - 1)^2 + c(\sigma - 1)^3 + \frac{c(3c - 1)}{2} (\sigma - 1)^4 + \dots \quad (8)$$

где c — произвольная постоянная. Единственное решение второго типа будет

$$X(\sigma) = 1 + 2(\sigma - 1) - (\sigma - 1)^2 = -2 + 4\sigma - \sigma^2 \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), переходя от σ к ξ , η , получим

$$F_{\eta} = v = -\frac{W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^{5/2}}{M_1^4} \{4\xi^2 - 2(\eta_1 - \eta)(M_1^2 - 1)^{-1/2}\} + \dots \quad (10)$$

во всей четверти окрестности $\xi > 0$, $\eta_1 - \eta > 0$. Из (10) следует, что при подходе к точке 2 по любому направлению производная $F_{\eta\eta}$ определяется (4).

Но тогда при подходе к точке 2 по оси $\xi = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{2W_1}{(M_1^2 - 1)^{1/2}} F_{\eta\eta} = \frac{4W_1^2}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^{3/2}}{M_1^4} > 0$$

что несовместимо с требованием расширения потока в окрестности точки 2 (фиг. 2, 3).

Для всех решений (8) в точке 2 производная

$$F_{\eta\eta} = \frac{2W_1}{\gamma + 1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^4} \quad (11)$$

Все подходящие решения F , примыкающие к характеристике 2-б, обладают тем свойством, что в точке 2 производная $F_{\eta\eta}$ при подходе по характеристике 2-б определяется (11), поэтому $\lambda \equiv 0$, т. е. на всей характеристике 2-б ускорение совпадает с ускорением течения Прандтля — Майера и, следовательно, не обращается в бесконечность, как это получилось у Рейна.

Физической основой образования скачка 2-7 (фиг. 2) будет появление в течение Прандтля — Майера на боковой кромке составляющей скорости, направленной к пло-

скости симметрии потока ($\xi = 0$). По этой причине естественно предположить, что скачок 2-7 начинается в точке 2, после которой на характеристике 2-6 появляется такая составляющая.

Автору представляется также возможным другой вариант, когда боковой скачок 2-7 частично расположен внутри области 0-1-2-6-5-4, причем переход скачка внутри этой области совершается в некоторой точке на характеристике 6-5. Вариант Рейна, который предлагает поместить начало скачка в некоторую промежуточную точку на характеристике 2-6, маловероятен, так как если бы это имело место, то в точке затухания скачка образовалась бы особая точка, которую можно было бы обнаружить по особенностям в высших производных F , двигаясь вдоль характеристики 2-6. Но выше показано, что первые производные на характеристике 2-6 особенностей не имеют; не имеют их и высшие производные, так как уравнения для коэффициентов разрыва высших производных линейны и не могут содержать подвижных особых точек.

Автор благодарит С. Ф. Фальковича за обсуждение рассмотренных вопросов.

Поступила 1 XI. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейн J. W. Differential — geometric Considerations on the Hodograph Transformation for Irrotational Conical Flow, Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, vol. 6, № 4, pp. 229—354.
2. Буземан А. Осесимметрическое коническое сверхзвуковое течение. Сб. Газовая динамика, ИИЛ, 1950, стр. 197—218.
3. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 4, стр. 451—452.
4. Булах Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 4, стр. 393—409.
5. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1, стр. 143—144.
6. Булах Б. М. Замечание к статье Л. Р. Фауэлла «Точное и приближенное решение для сверхзвукового дельтаобразного крыла». ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3, стр. 404—407.
7. Булах Б. М. Замечание к докладу А. Ферри «Новая теоретическая работа по сверхзвуковой аэродинамике в Бруклинском политехническом институте». ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3, стр. 576—580.
8. Булах Б. М. Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2, стр. 229—241.

ОЩЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЛСТОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КРЫЛА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Н. В. Курдюмова (Ленинград)

Задачу о стационарном безвихревом движении крыла под свободной поверхностью рассмотрим в криволинейных координатах ρ, ν , связанных с конформным отображением

$$z = \omega(\zeta), \quad [\zeta = \rho e^{i\nu}] \quad (0.1)$$

кругового кольца на область, ограниченную контуром крыла и осью x . Окружности $\rho = \text{const}$ области ζ соответствует кривая $\rho = \text{const}$ области z ; полагаем, что контуру крыла соответствует окружность единичного радиуса, оси x — окружность $\rho = \rho_2$. Потребуем, чтобы бесконечно удаленной точке области z соответствовала точка, лежащая на луче $\nu = 0$ области ζ .

1. Допустим, что крыло движется в положительном направлении оси x со скоростью c . Ограничимся случаем малых значений параметра $\lambda = 2gh/c^2$ (случай больших чисел Фруда) [1, 2].

Так как уравнение Лапласа в криволинейных координатах ρ, ν имеет такой же вид, как и в полярных, потенциал скоростей ищем в виде суммы

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \nu + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + A_{-m} \rho^{-m}) \cos m\nu + \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \rho^m + B_{-m} \rho^{-m}) \sin m\nu \quad (1.1)$$