# О СТРУКТУРЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ С АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

**А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов**
(Москва)

В работе [1] показано, что ширина ударной волны в неидеальной среде может не стремиться к нулю, когда все диссипативные коэффициенты стремятся к нулю. Ниже будет построен пример такой ударной волны.

Рассмотрим задачу о структуре магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью в постановке работы [2], при этом используется следующая форма обобщенного закона Ома:

$$c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{c}{ne} \operatorname{grad} p_e = \frac{c}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{c}{\sigma} \frac{\omega\tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$$

Уравнения, описывающие одномерные стационарные движения, в этом случае можно привести к виду [2-4]:

$$\nu_m^* \frac{dH_y}{dx} + \nu_m^* \varkappa \frac{dH_z}{dx} = \frac{\partial P}{\partial H_y}, \qquad \nu_m^* = \frac{\nu_m}{4\pi T} = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma T}, \quad \varkappa = \frac{H_x}{H} \omega\tau$$

$$-\nu_m^* \varkappa \frac{dH_y}{dx} + \nu_m^* \frac{dH_z}{dx} = \frac{\partial P}{\partial H_z}, \qquad P = \frac{m}{T} \left[ \frac{H_y^2 V}{8\pi} + \frac{H_z^2 V}{8\pi} + \frac{m^2 V^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} - \right.$$

$$\left. - f(V, T) + E_0 H_y - H_0 H_y v - H_0 H_z w - JV + S \right] \qquad \left( m = u\rho, \ V = \frac{1}{\rho} \right)$$

Здесь $u$, $v$, $w$ — компоненты скорости, $f(V, T)$ — свободная энергия, $E_0, H_0, J$, $S$ — постоянные. В выражениях $\partial P / \partial H_y$ и $\partial P / \partial H_z$ все величины должны быть выражены через $H_y$, $H_z$ из соотношений

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = 0$$

Матрица диссипативных коэффициентов, обозначенная в работе [1] через $\| L_{ij} \|$, и обратная к ней матрица $\|\Lambda_{ij}\|$ в данном случае имеют вид:

$$L_{ij} \equiv \begin{Vmatrix} \nu_m^* & \varkappa \nu_m^* \\ -\varkappa \nu_m^* & \nu_m^* \end{Vmatrix}, \qquad \Lambda_{ij} = \frac{1}{\nu_m^{*2}(1 + \varkappa^2)} \begin{Vmatrix} \nu_m^* & -\varkappa \nu_m^* \\ \varkappa \nu_m^* & \nu_m^* \end{Vmatrix}$$

Ширина ударной волны не может быть меньше величины

$$l = \int \frac{dP}{\Lambda_{ij} \ (\partial P / \partial H_i)(\partial P / \partial H_j)} = \nu_m^* (1 + \varkappa^2) \int \frac{dP}{(\partial P / \partial H_y)^2 + (\partial P / \partial H_z)^2} \qquad (i, j = y, z)$$

где интегрирование по $P$ производится в пределах — от $P(S_1) + \varepsilon$ до $P(S_2) - \varepsilon$ вдоль интегральной кривой, соединяющей особые точки $S_1$ и $S_2$.

В пределах интегрирования $(\partial P / \partial H_y)^2 + (\partial P / \partial H_z)^2 > \varepsilon_1$ $(\varepsilon_1 > 0)$, которое зависит от $\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$l \sim \nu_m^* (1 + \varkappa^2) U^{-1}$$

где $U$ — некоторая характерная скорости.

Это выражение показывает, что при стремлении диссипативных коэффициентов, $\nu_m^*$ и $\varkappa \nu_m^*$ к нулю ширина ударной волны ведет себя следующим образом:

$$l \to 0, \text{ если } \nu_m^* \varkappa^2 \to 0; \quad l \not\to 0, \text{ если } \nu_m^* \varkappa^2 \not\to 0$$

Последний случай может иметь место только при $\omega\tau \to \infty$. При больших $\omega\tau$ решение задачи о структуре ударной волны имеет периодический характер [2].

Так как при больших $\omega\tau$ производные $\partial H_y / dx$, $dH_z / dx$ определяются членами, не стоящими на главной диагонали матрицы $L_{ij}$, и имеют порядок

$$\frac{\varkappa}{\nu_m^* (1+\varkappa^2) U} \sim \frac{1}{\nu_m^* \varkappa U} \qquad (U \text{ — характерная скорость})$$

то ширина периода оказывается порядка $U\varkappa\nu_m^*$ и стремится к нулю, если диссипативные коэффициенты стремятся к нулю. Оценка ширины ударной волны, приведенная в работе [2], справедлива при малых $\omega\tau$, при больших $\omega\tau$ она соответствует ширине одного периода.

Известно [4], что $P$ представляет собой поток энтропии и что скорость возрастания энтропии дается формулой

$$\frac{dP}{dx} = L_{ij} \frac{dH_i}{dx} \frac{dH_j}{dx} = \nu_m^* \left[ \left( \frac{dH_y}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dH_z}{dx} \right)^2 \right] \qquad (i, j = y, z)$$

Если $\omega\tau = 0$, т. е. $L_{ij}$ — диагональная матрица, то ширина ударной волны стремится к нулю [3] при $\nu_m^* \to 0$.

Недиагональные элементы матрицы $L_{ij}$ не дают вклада в выражение $dP / dx$. Если $\nu_m^* \to 0$, $\nu_m^* \varkappa \to 0$, но $\nu_m^* \varkappa^2$ не стремится к 0, то роль этих членов заключается в том, что при рассматриваемом предельном переходе они препятствуют слишком быстрому росту производных $dH_y / dx$, $dH_z / dx$, обеспечивая конечность производной $dP / dx$.

Если $\nu_m^* \to 0$, а величина $\nu_m^* \varkappa$, равная $cH_x / 16\sigma neT$, остается конечной, то $dP / dx \to 0$ и $l \to \infty$. При этом на любом конечном интервале $[x_1, x_2]$ решение стремится к периодическому решению с конечным периодом и энтропия на этом отрезке не возрастает. Такое решение, по-видимому, можно рассматривать как макроскопический аналог соответствующего решения для плазмы при отсутствии диссипации.

Поступила 16 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. О структуре ударных волн. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
2. Любимов Г. А. Структура магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
3. Germain P. Shock Waves and Shock Wave Structure in Magneto-Fluid Dynamics, Rev. Mod. Phys. 1960, v. 32, p. 4.
4. Куликовский А. Г. О структуре ударных волн в магнитной гидродинамике при произвольном законе диссипаций. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.

---

## ПОПРАВКА

Обращаем внимание читателей на небольшую неточность, допущенную в следующих работах:

1. Фалькович С. В. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4, стр. 459—464.
2. Асланов С. К. и Легкова В. А. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1, стр. 190—193.
3. Гущин В. А. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4, стр. 770—776.
4. Трошин В. И. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4, стр. 766—770.
5. Трошин В. И. Вестн. МГУ, сер. 1, 1960, № 2, стр. 59—65.
6. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961, стр. 401—410.
7. Макеев Н. Н. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2, стр. 308—316.

Выражение вронскиана системы линейно независимых интегралов уравнения Чаплыгина $Z_n(\tau)$ и $\zeta_n(\tau)$ дается в виде

$$W[Z_n(\tau),\ \zeta_n(\tau)] = H_n \frac{(1-\tau)^\beta}{\tau}$$

При этом указывается $H_n = n$, тогда как должно быть $H_n = 2n$.

Эта неточность не отражается существенным образом на результатах перечисленных работ.

Поправка указана *С. К. Аслановым*. *От редакции*