

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ УМЕНЬШЕНИЯ МОЩНОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В. В. Токарев (Москва)

Оптимизация параметров реактивного движения тела переменной массы в гравитационном поле при постоянной мощности реактивной струи $N \equiv \text{const}$, а также в случае многоступенчатого уменьшения веса источника мощности G_N с соответствующим уменьшением мощности реактивной струи $N = G_N / \alpha$, где α — удельный вес источника мощности, не зависящий от N , рассматривалась в работе [1]. В работе [2] исследован предельный случай непрерывного оптимального уменьшения мощности реактивной струи при соответствующем уменьшении веса источника мощности и продолжено рассмотрение случая многоступенчатого уменьшения мощности.

Ниже определяются оптимальные параметры движения тела переменной массы с учетом случайных процессов уменьшения мощности источника.

1. Постановка задачи. Пусть под действием случайных факторов в моменты времени t_j отдельные элементы источника мощности выходят из строя. Будем считать, что эти элементы или весь источник мощности состоят из некоторого числа n автономных секций, которые отключаются при повреждении, что приводит в общем случае к изменению режима работы оставшихся секций и к уменьшению мощности реактивной струи

$$N_j = \varepsilon_j N_0 \quad (0 \leq \varepsilon_j < \varepsilon_{j-1} < \dots < \varepsilon_0 = 1) \quad (1.1)$$

где N_0 — начальное значение мощности реактивной струи, ε_j — параметры, определяемые типом источника мощности и числом работающих секций.

Удельный вес источника мощности, очевидно, зависит от числа автономных секций n , которое при фиксированной величине N_0 ограничено сверху из-за существования некоторого минимально возможного размера автономной секции $n \leq n_{\max} = N_0 / \Delta N_{\min}$. Вес источника мощности во время движения считается постоянным: $G_N = \alpha N_0$.

Для минимума мгновенного расхода рабочего вещества при заданной величине тяги и при выбранном источнике мощности мощность реактивной струи должна быть максимально возможной для состояния источника в данный момент времени. Если это требование не влечет за собой увеличения вероятности повреждения источника мощности, то оно будет необходимым и для минимума потребного запаса рабочего вещества. Ограничиваясь рассмотрением такого случая, будем предполагать, что режим работы неповрежденных секций выбирается так, чтобы величина N_j была максимально возможной, а также будем считать, что на участках между повреждениями мощность реактивной струи равна этой величине $N = N_j$ при $t_j \leq t \leq t_{j+1}$.

Пусть для некоторого реализованного движения известны моменты времени t_j , тогда, применяя на участках между повреждениями уравнения работы [1], получаем следующее выражение для веса тела G_k в конце движения ($t = t_k$):

$$\frac{G_k}{G_0} = \left(1 + \frac{G_0}{2N_0 g} \sum_{j=0}^v \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} a^2 dt \right)^{-1} \quad (|a| = a) \quad (1.2)$$

где G_0 — начальный вес тела, $a(t)$ — ускорение от реактивной тяги (тяга, деленная на текущую массу тела), g — величина земного ускорения силы тяжести, $v < n$ — номер момента времени последнего повреждения (условно считается $t_{v+1} = t_k$).

Для прогнозирования характеристик движения используем формулу (1.2), в которой в качестве моментов времени t_j возьмем осредненные значения моментов повреждений, определяемые из условия обращения в единицу интеграла от вероятности повреждения источника мощности в единицу времени, вычисляемого вдоль траектории см. далее формулы (2.1) и (2.2)). При этом вероятностью одновременного выхода из строя нескольких секций в дальнейшем пренебрегаем, т. е. номер момента времени ожидаемого повреждения совпадает с числом выбывших из строя секций¹.

¹ Получаемые при этом осредненные характеристики не обязательно будут совпадать с математическими ожиданиями соответствующих величин. Но в качестве первого подхода к решению задачи используется сформулированная выше процедура.

Теперь, аналогично работе [1], поставим задачу об отыскании минимума суммарного относительного веса $G^\circ = G_N^\circ + G_M^\circ$ источника мощности $G_N^\circ = \alpha N_0 / G_0$ и осредненного запаса рабочего вещества $G_M^\circ = 1 - G_k / G_0$, потребного для осуществления заданного маневра при известной зависимости вероятности повреждения источника мощности в единицу времени от числа работающих секций, величины мощности, координат тела и от времени¹.

Величина G° , которая может быть выражена следующей формулой:

$$G^\circ = \frac{\Phi / G_N^\circ}{1 + \Phi / G_N^\circ} + G_N^\circ \quad \left(\Phi = \frac{\alpha}{2g} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} a^2 dt \right) \quad (1.3)$$

монотонно убывает с уменьшением Φ (под t_j здесь и всюду в дальнейшем понимаются осредненные моменты повреждений). Поэтому, задачу можно разбить на две:

1°. Для заданных величин N_0 , n и для известной зависимости вероятности повреждения источника мощности от указанных выше параметров определить такой закон $a_{\text{ext}}(t)$ изменения ускорения от реактивной тяги по времени, чтобы при перемещении между двумя заданными точками фазового пространства

$$\{\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0\}, \{\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \dot{\mathbf{r}}(t_k) = \dot{\mathbf{r}}_k\}$$

при заданных моментах времени t_0 и t_k функционал Φ имел бы минимум

$$\Phi [a_{\text{ext}}(t)] = \Phi_{\min}(N_0, n)$$

2°. Для заданных величин G_0 и ΔN_{\min} , а также при известных зависимостях $\alpha = \alpha(n)$ и $\Phi = \Phi_{\min}(N_0, n)$ определить оптимальные значения величин N_0 и n , обеспечивающие минимум функции G° , определяемой формулой (1.3). Далее рассматривается первая из сформулированных задач.

2. Уравнения вариационной проблемы. Рассмотрим два типа случайных процессов повреждения источника мощности, характер которых существенно влияет на уравнения вариационной проблемы:

(а) процессы, обусловленные неоднородными внешними условиями (вероятность повреждения зависит от \mathbf{r});

(б) внутренние процессы и процессы, зависящие от однородных внешних условий (вероятность повреждения не зависит от \mathbf{r}). Считая случайный процесс выхода из строя некоторой секции источника мощности не зависящим от выхода из строя других секций, запишем вероятность p выхода из строя одной из работающих секций в момент времени t следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad p(\mathbf{r}, t) &= p_0(N_0) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \rho_1(\mathbf{r}, t) \\ \text{(б)} \quad p(t) &= p_0(N_0) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \rho_2(t) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ j = 0, 1, \dots, \nu \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Здесь $p_0(N_0) \rho_1(\mathbf{r}_0, t_0)$ и $p_0(N_0) \rho_2(t_0)$ — вероятности повреждения источника мощности в начале движения; ρ_1 и ρ_2 — функции, определяемые характером случайного процесса и особенностями источника мощности. Осредненный момент времени t_{j+1} определяется из условия обращения в единицу интеграла по времени от вероятности $p(t)$, вычисляемого вдоль траектории $\mathbf{r}(t)$ от осредненного момента времени t_j предыдущего повреждения. Момент последнего ожидаемого повреждения ($t = t_\nu$) находится из того условия, что этот интеграл от t_ν до t_k меньше или равен единице. При вероятности p , определяемой для t_j (2.1), получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_1[\mathbf{r}(t), t] dt &= \frac{1}{p_0(1 - j/n)}, \quad \int_{t_\nu}^{t_k} \rho_1[\mathbf{r}(t), t] dt \leq \frac{1}{p_0(1 - \nu/n)} \\ \text{(б)} \quad \Phi(t_{j+1}) - \Phi(t_j) &= \frac{1}{p_0(1 - j/n)}, \quad \Phi(t_k) - \Phi(t_\nu) \leq \frac{1}{p_0(1 - \nu/n)} \\ &\quad \left(j = 0, 1, \dots, \nu - 1; \Phi(t) = \int \rho_2(t) dt \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹ Вероятность повреждения может зависеть и от других параметров, определяемых конкретным типом случайного процесса; введение их не влечет трудностей.

Исключая в выражении для Φ (формула (1.3)) ускорение a от реактивной тяги при помощи уравнений движения в гравитационном поле $\ddot{\mathbf{r}} = a - \mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ — ускорение от гравитационных сил, преобразуем функционал Φ к виду

$$\Phi = \frac{\alpha}{2g} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}, \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}) dt \quad (2.3)$$

Для минимума функционала Φ необходимо, чтобы траектория состояла из экстремалей функционалов

$$(a) \quad I_j = \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [(\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}, \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}) + \lambda_j \rho_1(\mathbf{r}, t)] dt \quad (2.4)$$

$$(б) \quad I_j = \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}, \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}) dt$$

где $j = 0, 1, \dots, \nu$; λ_j — постоянные в условиях изопериметричности (первые два уравнения (2.2)); т. е. в инерциальной декартовой системе координат $\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\}$ вдоль траектории должны выполняться следующие уравнения Эйлера:

$$(a) \quad \ddot{a}^{(i)} + \left(a, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r^{(i)}} \right) + \lambda_j \frac{\partial \rho_1}{\partial r^{(i)}} = 0 \quad \text{при } t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

$$(б) \quad \ddot{a}^{(i)} + \left(a, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r^{(i)}} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 0, 1, \dots, \nu; \lambda_\nu = 0) \quad (2.5)$$

Из первого уравнения (2.5) видно, что при пространственно неоднородных внешних условиях (производная $\partial \rho_1 / \partial r^{(i)} \neq 0$) размерность экстремальной траектории может возрасти, т. е. одномерная или двумерная без учета повреждений траектория может стать соответственно двумерной или трехмерной. Второе уравнение (2.5), как показано в работе [1], в случае центрального гравитационного поля допускает два первых интеграла, а в случае однородного гравитационного поля имеет аналитическое решение $a(t) = c_1 + c_2 t$.

Приравнявая нулю сумму коэффициентов при вариациях радиуса-вектора и скорости при $t = t_j$ в выражении для первой вариации функционала Φ на экстремалах, получаем следующие условия для ускорения a и его производной:

$$\frac{1}{\varepsilon_j} a_j^+ = \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} a_j^-, \quad \frac{1}{\varepsilon_j} \dot{a}_j^+ = \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \dot{a}_j^- \quad (j = 1, 2, \dots, \nu) \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_j^+ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} a(t_j + \delta), & a_j^- &= \lim_{\delta \rightarrow 0} a(t_j - \delta) \\ \dot{a}_j^+ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \dot{a}(t_j + \delta), & \dot{a}_j^- &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \dot{a}(t_j - \delta) \end{aligned} \quad (\delta > 0)$$

Таким образом, при повреждении источника мощности, в момент $t = t_j$, величина ускорения a и величина производной от этого ускорения по времени должны иметь разрыв, причем обе эти величины уменьшаются при переходе через разрыв в $\varepsilon_j / \varepsilon_{j-1}$ раз.

В случае (а), когда вероятность повреждения зависит от траектории, при составлении первой вариации функционала Φ нужно еще варьировать моменты времени t_j . Это дает дополнительные условия

$$\rho_1(t_j) \left(\frac{\lambda_j}{\varepsilon_j} - \frac{\lambda_{j-1}}{\varepsilon_{j-1}} \right) + \frac{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}{\varepsilon_j^2} (a_j^+, \dot{a}_j^+) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu - 1) \quad (2.7)$$

После этого задача сводится к нахождению решения уравнений движения совместно с системой (2.5), удовлетворяющего граничным условиям и условиям (2.2), (2.6), а для случая (а) еще и условиям (2.7), причем неравенства в условиях (2.2) служат для определения ν .

3. **Предельный случай**¹. При большом числе секций источника мощности решение вариационной задачи в точной постановке затруднительно. Но, если число секций достаточно велико, так что $n - \nu \gg 1$, и если секции полностью автономны, т. е. $\varepsilon_j = 1 - j/n$, то ступенчатый закон уменьшения мощности

$$N(t) = N_0 (1 - j/n) \quad \text{при } t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, \nu) \quad (3.1)$$

где t_j определяются формулами (2.2), можно приближенно заменить непрерывными

$$\dot{N} = -\frac{1}{n} p_0(N_0) \rho(r, t) N \quad (3.2)$$

В самом деле, интегрируя уравнение (3.2) в пределах от t_j до t_{j+1} , убеждаемся, что $N(t_j) - N(t_{j+1}) = N_0/n$ с точностью до членов порядка $1/(n-j)^2$, т. е. уменьшение мощности от одного момента повреждения до другого в предельном случае и в точной постановке одинаково.

Рассматриваемая в предыдущем разделе задача сводится к отысканию экстремалей функционала

$$\Phi = \frac{\alpha}{2g} \int_{t_0}^{t_k} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\ddot{r} + R, \ddot{r} + R) + \sigma(t) \left[\dot{\varepsilon} + \frac{1}{n} p(r, t) \varepsilon \right] \right\} dt \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = N/N_0, \quad p(r, t) = p_0(N_0) \rho(r, t)$$

где $\sigma(t)$ — переменный множитель Лагранжа дифференциальной связи (3.2).

Дифференциальные уравнения для экстремалей такого функционала в инерциальной декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\ddot{a}^{(i)} + \frac{2}{n} p \dot{a}^{(i)} + \frac{1}{n} \dot{p} a^{(i)} + \left(a, \frac{\partial R}{\partial r^{(i)}} \right) + \frac{1}{2n} \sigma \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial r^{(i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\varepsilon^2} (a, a) - \frac{1}{n} \sigma p = 0, \quad \dot{\varepsilon} + \frac{1}{n} p \varepsilon = 0$$

Таким образом, вместо условий (2.2), (2.6) и (2.7) точной постановки в предельном случае имеем два дифференциальных уравнения (два последних уравнения системы (3.4)). Из примеров, приведенных далее, видно существенное упрощение решения в предельном случае по сравнению с точной постановкой.

4. **Примеры**¹. В качестве примера рассмотрим случай, когда источник мощности состоит из полностью автономных секций ($\varepsilon_j = 1 - j/n$), случайный процесс повреждения элементов источника мощности относится к типу (б), причем $\rho_2(t) \equiv 1$, а движение происходит по прямой в бессиловом поле ($R(r, t) \equiv 0$) при следующих граничных условиях:

$$r(t_0) = \dot{r}(t_0) = 0, \quad r(t_k) = L, \quad \dot{r}(t_k) = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_k = T \quad (4.1)$$

Точная постановка. Интегрируя второе уравнение (2.5) с учетом второго условия (2.2) и (2.6), получаем

$$\dot{a}_j^+ = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \dot{a}_0^+, \quad a_j^+ = \left(1 - \frac{j}{n}\right) (a_0^+ + \dot{a}_0^+ t), \quad t_j = \frac{1}{p_0} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{1 - i/n}$$

$$\dot{r}_j = \frac{1}{p_0} \left[j a_0^+ + \dot{a}_0^+ \left(\sum_{i=1}^{j-1} t_i + \frac{1}{2} t_j \right) \right] \quad (4.2)$$

$$r_j = \frac{1}{p_0^2} \left[a_0^+ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i + 1/2}{1 - i/n} + \dot{a}_0^+ \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{1 - i/n} \sum_{l=1}^i t_l + \frac{1}{6p_0} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(1 - i/n)^2} \right) \right]$$

¹ В предельном случае разделение процессов повреждения на типы (а) и (б) при выписывании уравнений несущественно, поэтому уравнения выводятся для более общего случая (а).

Величины a_0^+ и \dot{a}_0^+ определяются решением системы линейных алгебраических уравнений, полученных из граничных условий

$$a_0^+ \left[\frac{v}{p_0} + \left(1 - \frac{v}{n}\right) (T - t_v) \right] + \dot{a}_0^+ \left[\frac{1}{p_0} \left(\sum_{j=1}^{v-1} t_j + \frac{1}{2} t_v \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{n}\right) (T^2 - t_v^2) \right] = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & a_0^+ \left\{ \frac{1}{p_0^2} \sum_{j=0}^{v-1} \frac{j+1/2}{1-j/n} + (T - t_v) \left[\frac{v}{p_0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{n}\right) (T - t_v) \right] \right\} + \\ & + \dot{a}_0^+ \left\{ \frac{1}{p_0^2} \left(\sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{1-j/n} \sum_{i=1}^j t_i + \frac{1}{6p_0} \sum_{j=0}^{v-1} \frac{1}{(1-j/n)^2} \right) + \right. \\ & \left. + (T - t_v) \left[\frac{1}{p_0} \left(\sum_{j=1}^{v-1} t_j + \frac{1}{2} t_v \right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{v}{n}\right) (T - t_v) (T + 2t_v) \right] \right\} = L \end{aligned} \quad (4.4)$$

а число повреждений за все время движения v определяется согласно второму условию (2.2) из неравенства

$$\frac{1}{p_0} \sum_{j=0}^{v-1} \frac{1}{1-j/n} \leq T \leq \frac{1}{p_0} \sum_{j=0}^v \frac{1}{1-j/n}$$

После этого функционал Φ на экстремальной траектории становится функцией α , p_0 , n и граничных условий

$$\begin{aligned} \Phi_{\min} = & \frac{\alpha}{2g} \left\{ \frac{1}{p_0} \sum_{j=0}^{v-1} \left[(a_0^+ + \dot{a}_0^+ t)^2 + (a_0^+ + \dot{a}_0^+ t) \frac{\dot{a}_0^+}{p_0(1-j/n)} + \frac{(\dot{a}_0^+)^2}{3p_0^2(1-j/n)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{v}{n}\right) (T - t_v) \left[(a_0^+ + \dot{a}_0^+ t)^2 + (a_0^+ + \dot{a}_0^+ t) \dot{a}_0^+ (T - t_v) + \frac{1}{3} (\dot{a}_0^+)^2 (T - t_v)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решения, аналогичные приведенным, получаются и в случае произвольного движения в однородном гравитационном поле ($R(r, t) \equiv g_0 \neq 0$).

Предельный случай. Экстремальный закон $a_{\text{ext}}(t)$ изменения ускорения от реактивной тяги по времени для описанного выше движения в предельном случае имеет следующий вид:

$$a_{\text{ext}}(t) = \frac{L}{T^2} \frac{p_*^3}{1 - e^{-p_*} - p_*^2 / (e^{p_*} - 1)} \left[\left(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{e^{p_*} - 1} \right) - \frac{t}{T} \right] e^{-p_* t/T} \left(p_* = \frac{p_0 T}{n} \right) \quad (4.6)$$

а минимальное значение функционала Φ равно

$$\Phi_{\min} = \frac{\alpha L^2}{2gT^3} p_*^3 \left(1 - \frac{e^{-p_*}}{e^{p_*} - 1} - \frac{p_*^2}{e^{p_*} - 1} \right)^{-1} \quad (4.7)$$

В пределе при $p_* \rightarrow 0$, т. е. при отсутствии повреждений, формулы (4.6) и (4.7) переходят в следующие:

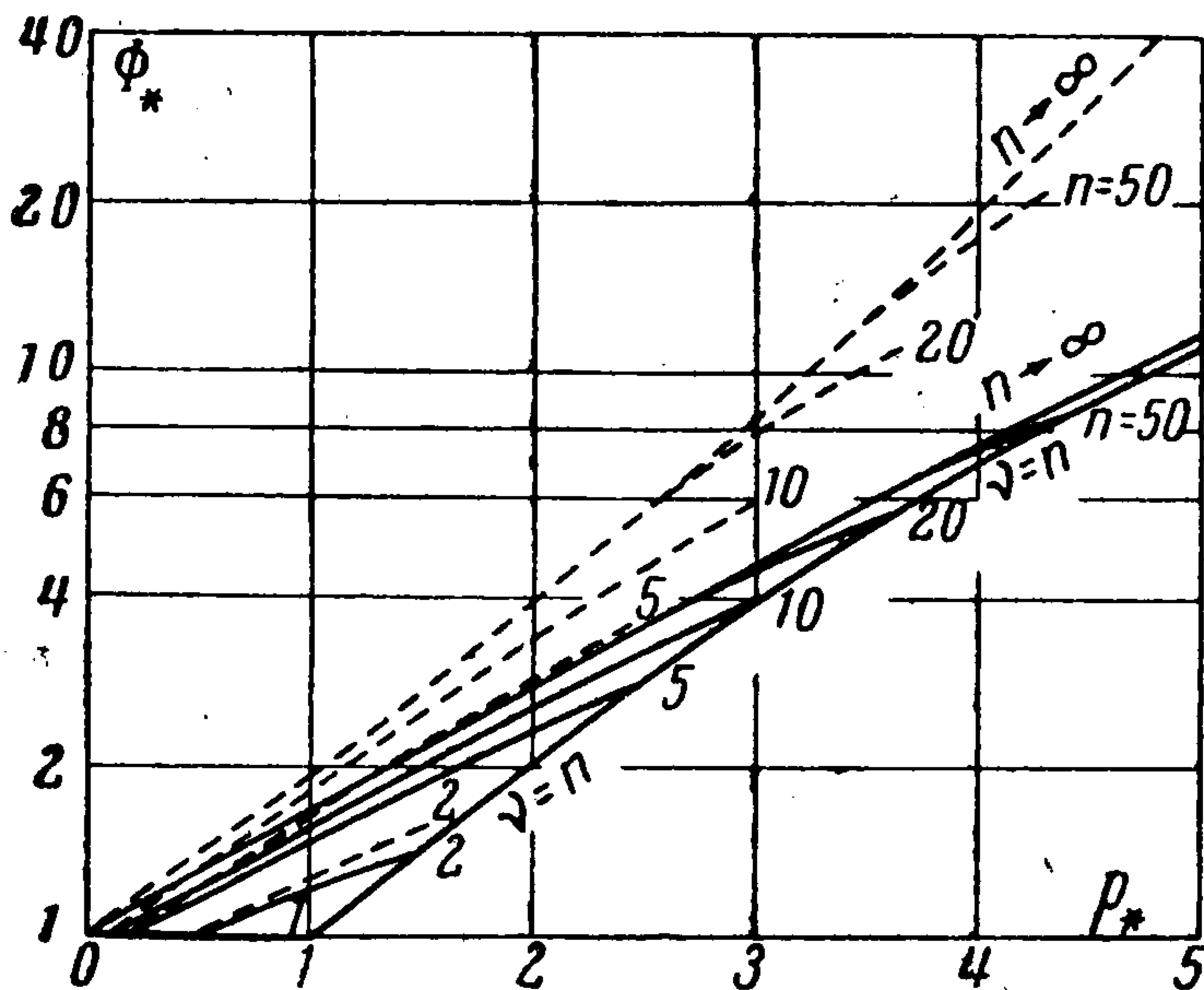
$$a_{\text{ext}}(t) |_{p_* \rightarrow 0} = \frac{6L}{T^2} \left(1 - 2 \frac{t}{T} \right), \quad \Phi_{\min} |_{p_* \rightarrow 0} = \frac{6\alpha L^2}{gT^3} \quad (4.8)$$

При $T \rightarrow \infty$ и фиксированной величине p_0/n величина Φ_{\min} монотонно убывает до значения $(\alpha/2g) L^2 (p_0/n)^3$. Если же движение при наличии повреждений ($p_0/n \neq 0$) происходит по линейному закону $a(t)$, оптимальному в случае отсутствия повреждений, то при $T \rightarrow \infty$ и фиксированном p_0/n величина функционала Φ стремится к бесконечности и существует оптимальное время движения $T_{\text{opt}} \approx 3.52 (n/p_0)$, при котором Φ имеет минимальную величину, приблизительно равную $3.46 (\alpha/2g) L^2 (p_0/n)^3$; при законе $a_{\text{ext}}(t)$, оптимальном для такой же величины p_0/n , и при $T = T_{\text{opt}}$ функционал Φ_{\min} равен $1.68 (\alpha/2g) L^2 (p_0/n)^3$.

На фиг. 1 сплошными кривыми показаны зависимости

$$\Phi_* = \Phi_{\min} / \frac{6\alpha L^2}{gT^3} = \Phi_{\min} / \Phi_{\min}|_{p_*=0}$$

от величины p_* в точной постановке для $n = 1, 2, 5, 10, 20, 50$, а также для предельного случая $n \rightarrow \infty$. Из фигуры видно, что, начиная с $n = 10$, точные и предельные значения функционала Φ_* достаточно близки; кривая $\nu = n$, нанесенная



Фиг. 1

сплошной линией на фиг. 1, определяет для данного значения n максимально допустимую величину p_* .

Для сопоставления на фиг. 1 пунктирными линиями нанесены аналогичные кривые, соответствующие движению при наличии повреждений по линейному закону $a(t)$ (пунктирная линия на фиг. 2), который был оптимален в случае отсутствия повреждений.

Пример зависимости

$$a_* = \frac{a_{\text{ext}}}{6L/T^2} = \frac{a_{\text{ext}}}{a_{\text{ext}}(0)} \Big|_{p_*=0}$$

от $\theta = \frac{t}{T}$

оптимальной с учетом повреждений при $n = 2$ и $p_* = 3/2$ показан на фиг. 2 сплошной линией.

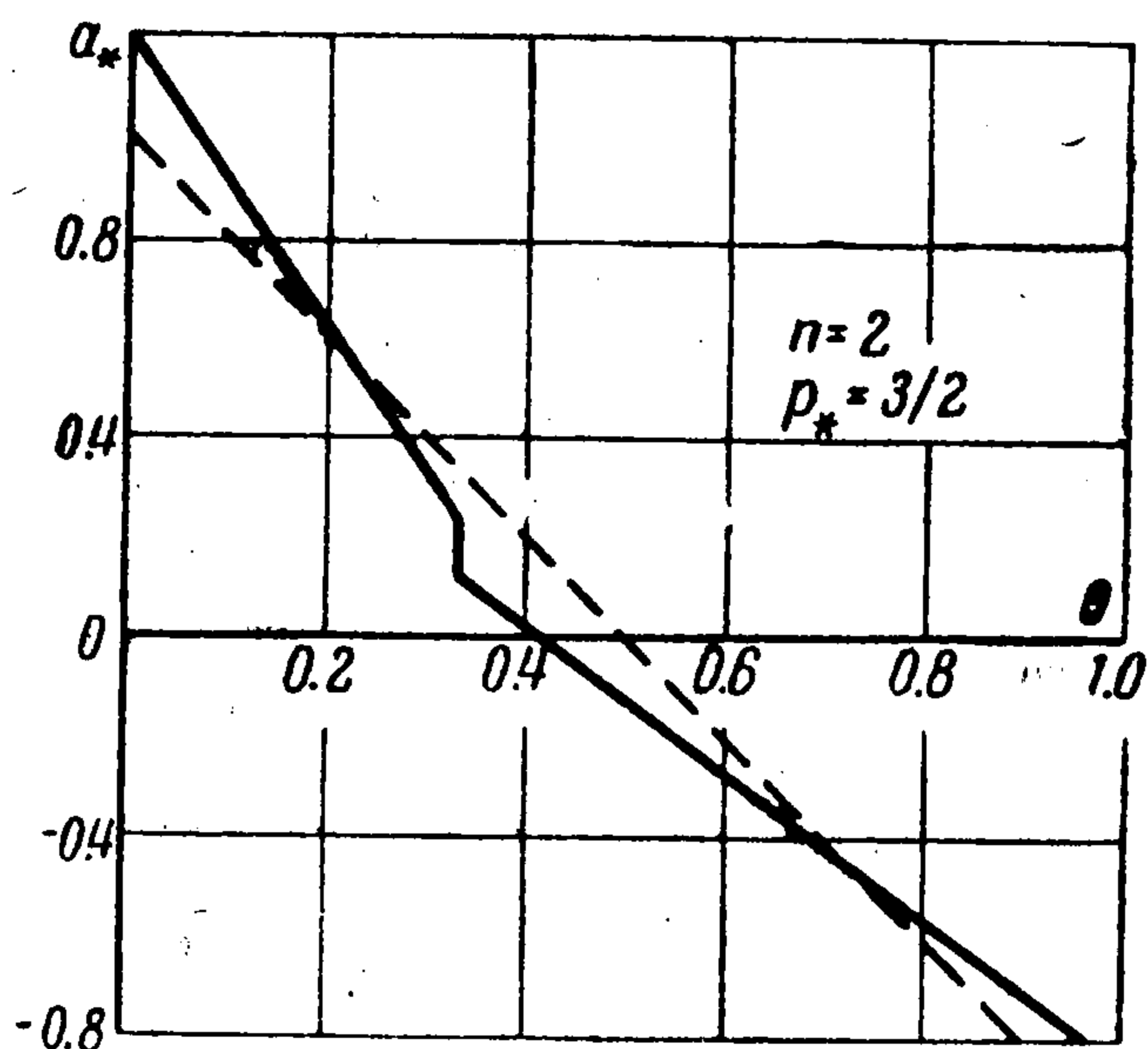
Движение с пассивным участком. Пусть задано безразмерное время ϑ работы источника мощности N :

$$N(t) \equiv a(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (0 < t_1 \leq t \leq t_2 < T), \quad \vartheta = 1 - (t_2 - t_1)/T \leq 1$$

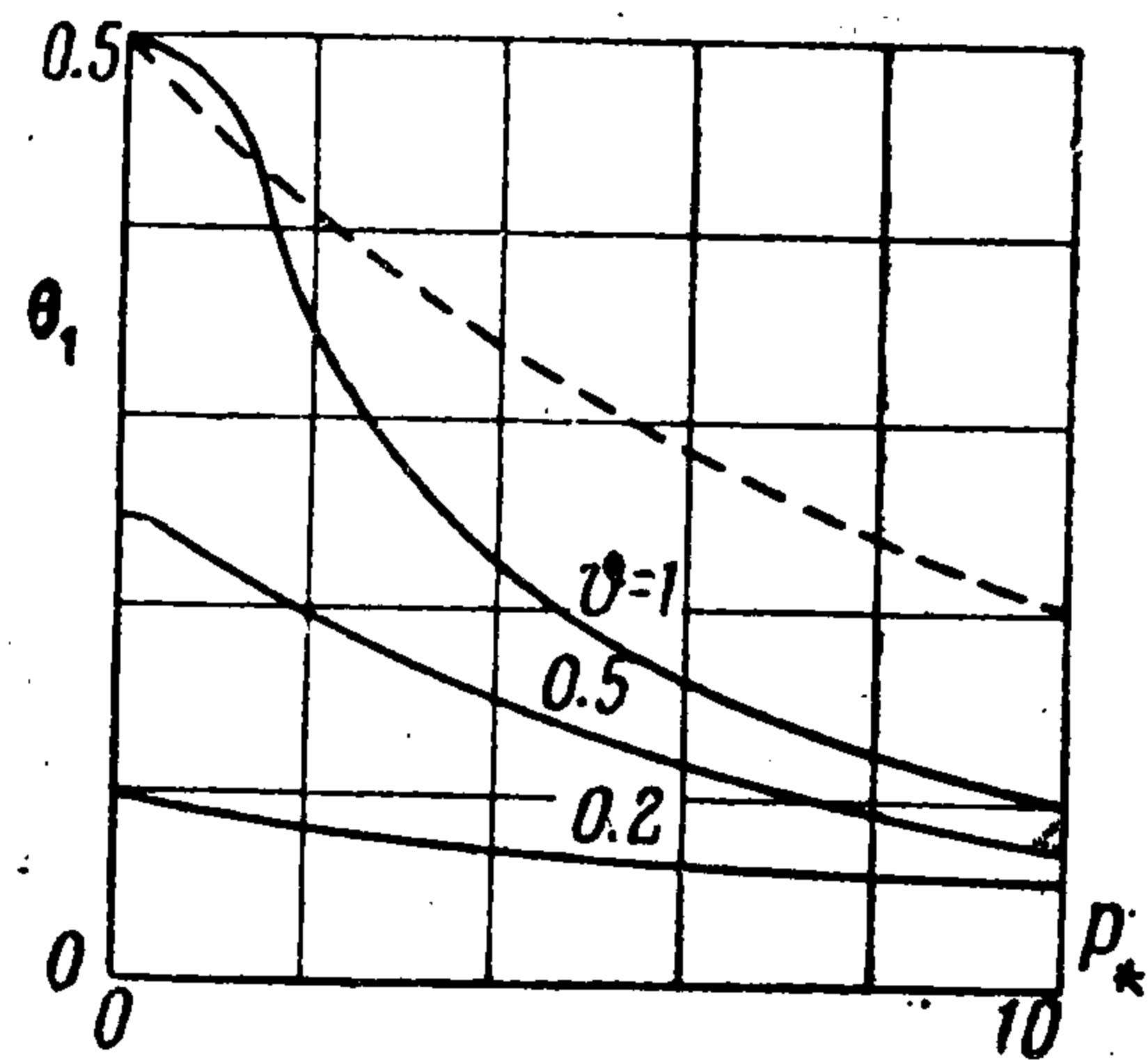
Считая, что при выключенном источнике мощности можно избежать повреждений его секций, рассмотрим функцию $p(t)$ следующего вида:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \neq 0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, & t_2 \leq t \leq T \\ 0 & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Применяя уравнения предельного случая, получаем следующую особенность такого движения: если при $p_* = 0$ оптимальное значение $\theta_1 = t_1/T = \vartheta/2$, т. е. пассивный участок расположен симметрично, то при $p_* \neq 0$ пассивный участок



Фиг. 2



Фиг. 3

сдвигается по времени к началу траектории (см. сплошные кривые на фиг. 3 — зависимость θ_1 от p_* при $\vartheta = 1, 0.5, 0.2$). Несмотря на то, что $p = 0$ при $a = 0$, функционал Φ на экстремальной траектории монотонно возрастает с уменьшением ϑ .

Движение с возвращением. Пусть

$$r(0) = \dot{r}(0) = 0, \quad r(t_1) = L, \quad \dot{r}(t_1) = 0, \quad r(T) = \dot{r}(T) = 0 \quad (0 < t_1 < T)$$

Тогда для этого движения характерна особенность, подобная отмеченной выше особенности движения с пассивным участком: оптимальное перемещение до $r = L$ происходит быстрее, чем возвращение к $r = 0$ (см. пунктирную кривую на фиг. 3 — зависимость θ_1 от p_*); другими словами: на начальном участке движения, пока мощность уменьшилась еще незначительно, выгодно иметь большую реактивную тягу, чем на последующем участке, так как при этом можно обеспечить достаточно высокую скорость истечения рабочего вещества.

Поступила 25 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н. и Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле. ДАН СССР, 1964, т. 137, № 5.
2. Иванов Ю. Н. Оптимальное изменение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.

О СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЕЙ

И. Б. Чекмарев
(Ленинград)

При изучении течений электропроводной жидкости в каналах различной конфигурации имеет значение учет сжимаемости, а также зависимости коэффициентов переноса от параметров состояния ионизованного газа. При довольно широких предположениях относительно свойств газа Блевисс [1] получил и исследовал решение для магнитогазодинамического течения Куэтта. Учет зависимости проводимости от температуры позволил обнаружить гистерезисный характер изменения трения на стенке, подтвержденный позднее Бушем [2] при рассмотрении сжимаемого магнитогазодинамического пограничного слоя на пластине.

Ниже показывается, что при произвольном заданном законе изменения коэффициентов вязкости и электропроводности от температуры можно получить решение задачи о стационарном течении ионизованного газа в плоском канале для случая, когда движение создается внешними скрещенными магнитным и электрическим полями.

Рассмотрим стационарное движение электропроводного газа в бесконечно длинном плоском канале при наличии поперечных однородных магнитного и электрического полей. Оси правой системы координат выберем так, что

$$v_x = u(y), \quad B_y = B_0, \quad E_z = -E_0, \quad j_z = j(y)$$

Так как все величины в данном случае зависят только от поперечной координаты y , то исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du}{dy} \right) = jB_0, \quad \frac{dp}{dy} = jB_x, \quad p = R\rho T \quad (1)$$

$$\frac{d}{dy} \left[\eta \frac{d}{dy} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{c_p T}{P} \right) \right] = jE_0, \quad j = -\frac{dH_x}{dy} = \sigma (B_0 u - E_0) \quad \left(P = \frac{\eta c_p}{\lambda} \right)$$

Здесь число Прандтля P и удельная теплоемкость c_p считаются постоянными, η и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Исключив плотность тока j из уравнений движения и энергии, получим

$$\frac{d}{dy} \left[\eta \frac{d}{dy} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{c_p T}{P} - \frac{E_0}{B_0} u \right) \right] = 0 \quad (2)$$