ОПТИМАЛЬНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ МОЩНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Ю. Н. Иванов (Москва)

В работе устанавливается независимость оптимальной программы по мощности от регулирования прочих управляющих параметров; указывается предельный случай оптимальной программы по мощности, а также даются соотношения для ступенчатого уменьшения мощности.

1. Обобщая задачу работы [1], поставим следующую вариационную проблему: Пусть задан начальный относительный суммарный вес источника мощности и рабочего вещества, требуется определить: 1) закон уменьшения относительного веса источника мощности и 2) закон изменения вектора ускорения от реактивной тяги, обеспечивающие минимальное время перемещения между заданными положениями в фазовом пространстве (задача о максимальном быстродействии).

Введем следующие обозначения: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости точки; $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ — вектор ускорения от гравитационных сил; $\mathbf{a}$ — вектор ускорения от реактивной тяги; G_m, G_N — отнесенные к стартовому весу вес рабочего вещества и источника мощности; N — мощность реактивной струи; q — относительная полезная нагрузка.

Поставленная выше проблема описывается системой уравнений

$$\dot{G}_m = -\frac{(G_m + G_N + q)^2}{G_N} a^2 \frac{\alpha}{2g} \qquad (G_N = \alpha N, \quad q = 1 - G_m^{(0)} - G_N^{(0)}) \tag{1.1}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} + \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$$

и граничными условиями

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0); \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1) \tag{1.2}$$

Выделим класс допустимых функций для первой части поставленной задачи: будем считать допустимой любую кусочно-непрерывную невозрастающую функцию

$$\dot{G}_N \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Для решения задачи о максимальном быстродействии согласно принципу Л. С. Понтрягина составим гамильтонову функцию

$$H = -p_G \frac{(G_m + G_N + q)^2}{G_N} a^2 \frac{\alpha}{2g} + \mathbf{p}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{p}\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{R}) + p_t \tag{1.4}$$

Дифференциальное уравнение для импульса p_G имеет вид

$$\dot{p}_G = p_G 2 \frac{G_m + G_N + q}{G_N} a^2 \frac{\alpha}{2g} \tag{1.5}$$

Функция $H(G_N, \ldots)$ может достигать своей верхней границы при одной из функциональных зависимостей:

$$G_N = G_m + q \quad \text{или} \quad G_N = \text{const} \tag{1.6}$$

последняя следует из (1.3).

При указанных функциональных зависимостях (1.6) выражение, являющееся коэффициентом при $a^2\alpha/2g$ в равенстве (1.4), не зависит от времени, т. е.

$$p_G \frac{(G_m + G_N + q)^2}{G_N} = \text{const} \tag{1.7}$$

это может быть проверено дифференцированием последнего выражения с учетом (1.5)).

Тогда максимум гамильтоновой функции H соответствует оптимальному закону изменения вектора ускорения от реактивной тяги, доставляющему максимальное быстродействие при перемещении между двумя заданными положениями в фазовом пространстве при заданном

$$\Phi = \frac{\alpha}{2g} \int_0^T a^2\, dt \tag{1.8}$$

или, что равноценно, максимум H соответствует минимуму указанного функционала Φ при заданном времени перемещения [1].

Таким образом, поставленная в начале п. I вариационная проблема разделяется на две независимые:

1) по заданному начальному относительному суммарному весу источника мощности и рабочего вещества находится закон уменьшения веса источника мощности, составленный из экстремалей (1.6), обеспечивающий максимальное значение [1]

$$\Phi = -\int_{G_m^0}^{0} \frac{G_N dG_m}{(G_m + G_N + q)^2} \tag{1.9}$$

2) по заданному интегральному функционалу Φ находится минимальное время перемещения T между двумя заданными точками в пространстве координат и скоростей (эта часть задачи относится к двум последним уравнениям системы (1.1)).

Рассмотрение частных случаев указанной проблемы, например, при $a = \text{const}$ [2]: приводит к аналогичным результатам для закона изменения веса источника мощности.

2. Требуется определить кусочно-непрерывную функцию $G_N = G_N(G_m)$, составленную из участков $G_N = G_m + q$ и $G_N = \text{const}$ обеспечивающую максимум (1.9) при заданном значении q и при следующем начальном условии:

$$G_m^{(0)} + G_N^{(0)} + q = 1 \tag{2.1}$$

Отметим, прежде всего, что при $q \geqslant 0.5$ решение задачи $G_N(G_m)$ не может содержать прямую $G_N = G_m + q$, так как в этом случае теряет смысл условие (2.1). Следовательно, при $q \geqslant 0.5$ оптимальный закон

$$G_N(G_m) = G_N^0 = \text{const}$$

и

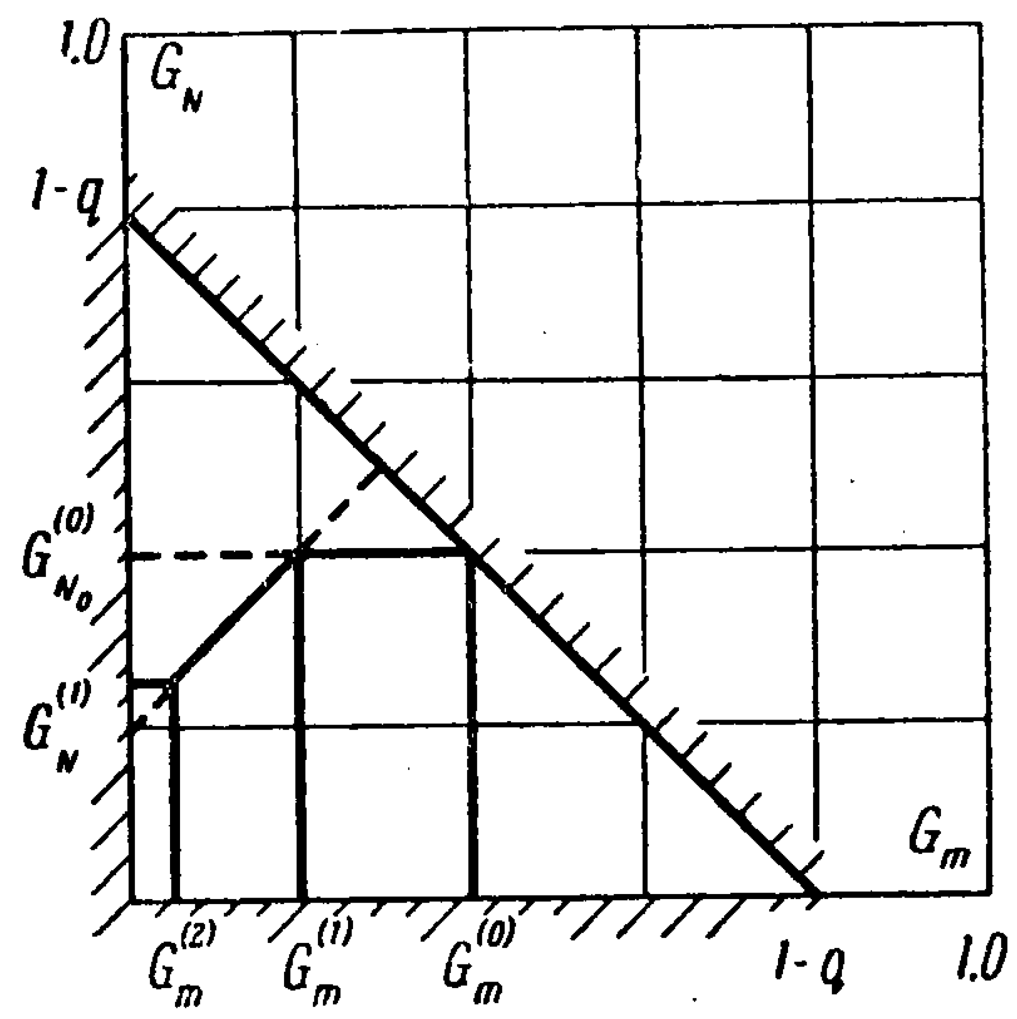
$$\int_0^{G_m^{(0)}} \frac{G_N^{(0)} dG_m}{(G_m + G_N^{(0)} + q)^2} = G_m^{(0)} \left(\frac{1}{G_N^{(0)} + q} - 1 \right)$$

Из условия максимума Φ имеем

$$G_N^{(0)} = \sqrt{q} - q \tag{2.2}$$

Тогда

$$\Phi = (1 - \sqrt{q})^2 \tag{2.3}$$



Фиг. 1

Если $q < 0.5$, то экстремаль $G_N(G_m)$ может состоять не более чем из трех прямых (фиг. 1)

$$\begin{aligned} &G_N = G_N^{(0)}, \quad && G_N^{(0)} - q \leqslant G_m \leqslant 1 - q - G_N^{(0)} \\ &G_N = G_m + q, \quad && G_N^{(1)} - q \leqslant G_m \leqslant G_N^{(0)} - q, \quad q \leqslant G_N^{(1)} \leqslant G_N^{(0)} \\ &G_N = G_N^{(1)}, \quad && 0 \leqslant G_m \leqslant G_N^{(1)} - q \end{aligned} \tag{2.4}$$

Соответственно, интеграл Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{G_N^{(1)}}{G_N^{(1)} + q} - \frac{1}{4} \ln G_N^{(1)} + \frac{1}{4} \ln G_N^{(0)} - G_N^{(0)} \tag{2.5}$$

Значения $G_N^{(0)}$ и $G_N^{(1)}$ находим из условия максимума Φ; имеем

$$G_N^{(1)} = q, \qquad G_N^{(0)} = 0.25 \tag{2.6}$$

Это соответствует тому, что ломаная экстремаль состоит из двух прямых

$$G_N = 0.25 \quad (0.75 - q \geqslant G_m \geqslant 0.25 - q), \qquad G_N = G_m + q \quad (0.25 - q \geqslant G_m \geqslant 0) \tag{2.7}$$

При указанных значениях $G_N^{(1)}$ и $G_N^{(0)}$

$$\Phi = 0.25 \left(1 + \ln \frac{1}{4q} \right) \tag{2.8}$$

[1] Эта постановка эквивалентна следующей: найти закон уменьшения веса источника мощности, обеспечивающий минимальный суммарный вес источника мощности и рабочего вещества при заданной величине интеграла (1.8).

Полученное решение справедливо для диапазона $0.25 \geqslant q \geqslant 0$, так как при этом не нарушается неравенство из (2.4). Здесь же заметим, что при $1 \geqslant q \geqslant 0{,}25$ экстремалями будут прямые $G_N = \mathrm{const} = \sqrt{q} - q$ (см. формулу (2.2)), а интеграл $\Phi = (1 - \sqrt{q})^2$ (см. формулу (2.3)).

На фиг. 2 зависимость $G = G_m^{(0)} + G_N^{(0)}$ от Φ представлена кривой $n = \infty$.

3. В предыдущем пункте получена оптимальная зависимость $\Phi(q)$, которая в известном смысле может быть названа предельной. Ниже рассматривается случай ступенчатого изменения мощности вдоль траектории и устанавливается из условия максимума функции $\Phi(q)$ оптимальный момент сброса и величина сбрасываемой мощности. Интеграл $\Phi(q)$ для этого случая выражается суммой n интегралов по участкам, на которых мощность остается постоянной

$$\Phi(q) = \sum_{i=1}^{n} G_N^{(i)} \left(-\frac{1}{G_N^{(i)} + G_m^{(i+1)} + q} + \frac{1}{G_N^{(i)} + G_m^{(i)} + q} \right) \tag{3.1}$$

Полученное выражение содержит $2n - 1$ неизвестных

$$G_N^{(1)}, \ldots, G_N^{(n)}; \qquad G_m^{(2)}, \ldots, G_m^{(n)}$$

Найдем неизвестные $G_N^{(i)}$, $G_m^{(i)}$ из условия обращения в максимум функции $\Phi(q)$ при дополнительных условиях $G_m^{(n+1)} + G_N^{(n)} + q = 1$, $G_m^{(1)} = 0$. Соответствующая система $2n - 1$ алгебраических уравнений выписана ниже

$$G_m^{(i)} + q = \sqrt{G_N^{(i)} G_N^{(i-1)}} \quad \text{или} \quad G_N^{(i-1)} = G_N^{(i)} \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

$$G_N^{(i)} = \sqrt{(G_m^{(i)} + q)(G_m^{(i+1)} + q)} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

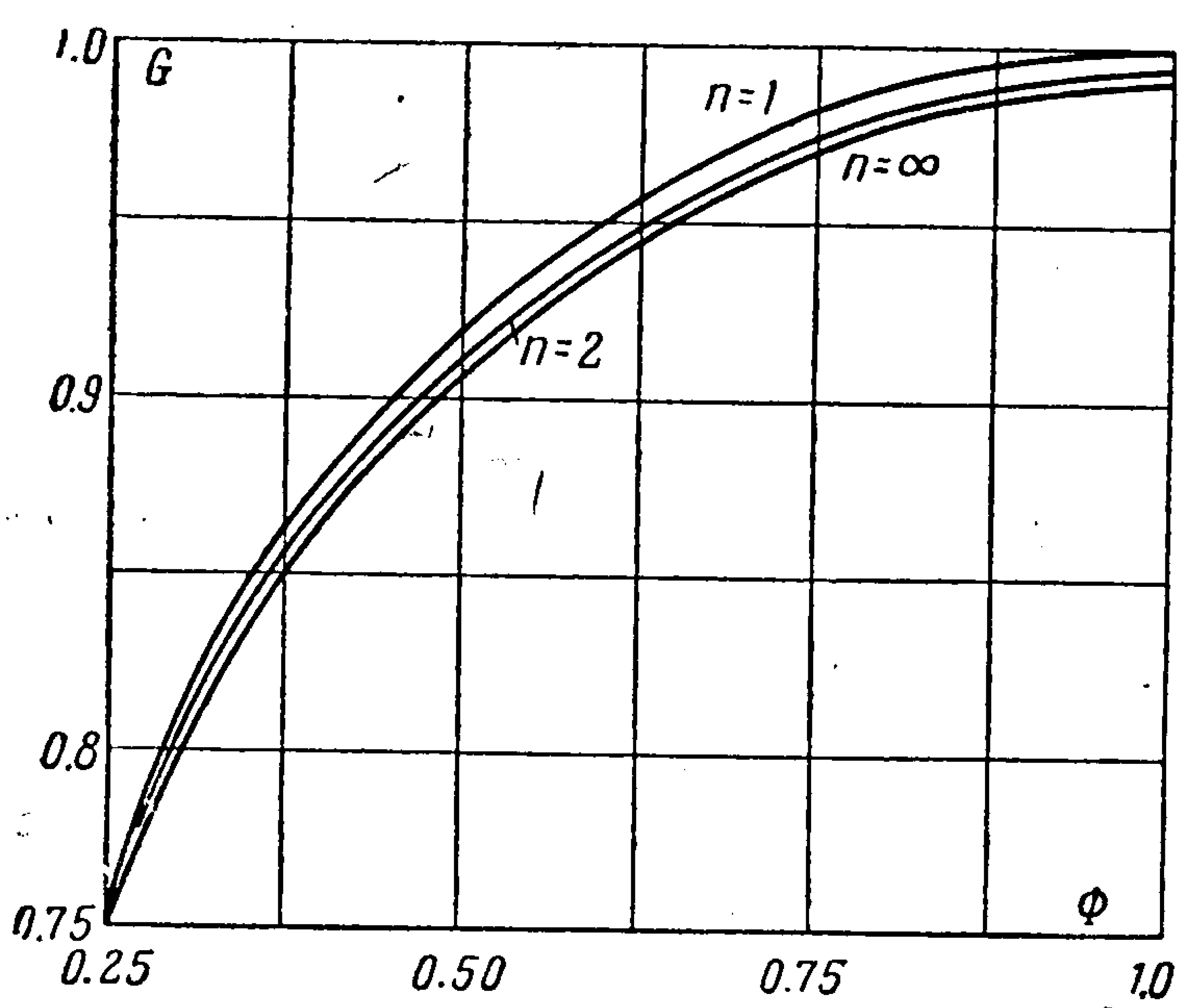
$$G_N^{n} = \sqrt{G_m^{n} + q} - G_m^{n} - q \tag{3.3}$$

Отметим, что из условия максимума Φ по $G_m^{(i)}$ получаются две непротиворечивые группы уравнений (3.2); вторая группа ($G_N^{(i-1)} = G_N^{(i)}$) указывает на возможность оптимальных режимов с постоянной мощностью вдоль всей траектории. В заключение укажем способ решения полученной системы алгебраических уравнений. Величины $G_m^{(i)}$ и $G_m^{(i+1)}$ связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$(G_m^{(i)} + q)^{i+1} = (G_m^{(i+1)} + q)^{i} q \qquad (i = 2, \ldots, n-1) \tag{3.4}$$

Это легко проверяется методом полной индукции, а $G_m^{(n)}$ определяется из уравнения

$$(G_m^{(n)} + q)^{n+1} = \left(1 - \sqrt{G_m^{(n)} + q}\right)^n q \tag{3.5}$$



Фиг. 2

Вычислив G_m^{n} для заданного q из (3.5) и найдя последовательно все $G_m^{(n-1)}, \ldots, G_m^{(2)}$, а по ним и $G_N^{(i)}$ из (3.3), можно определить величину Φ по (3.1).

На фиг. 2 приведены примеры зависимости $G = G_m^{(0)} + G_N^{(0)}$ от Φ для $n = 1, 2, \infty$.

Поступила 25 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 5.
2. Martelly. J. Optimization of interplanetary propulsion sistems, JRE, Trans. nucl. sci., 1962, v. 3—9, № 1.