ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

В. Г. Дегтярев (Москва)

Замкнутые периодические движения этой задачи хорошо изучены. Исследовалась и устойчивость таких движений; укажем, например, на доказательство В. Г. Деминым [1] устойчивости эллиптических движений в плоскости обоих центров по отношению к большой полуоси и эксцентриситету эллипса.

§ 1. Общий вид условий устойчивости. Пусть свободная материальная точка единичной массы движется под действием сил, потенциальная функция которых в цилиндрических координатах r, ψ, z имеет вид $V = \varphi\,(r,\ z)$. Живая сила

$$T = 1/2\ (r'^2 + r^2\psi'^2 + z'^2)$$

и потенциальная функция не зависят явно от ψ, поэтому ψ является циклической координатой, которой отвечает интеграл

$$p = r^2\psi' = \beta = \text{const} \tag{1.1}$$

Отсюда функция Рауса имеет вид

$$R = \frac{1}{2}(r'^2 + z'^2) - \varphi - \frac{\beta^2}{2r^2}$$

а уравнения движения точки

$$r'' + \varphi_r - \frac{\beta^2}{r^3} = 0, \qquad z'' + \varphi_z = 0, \qquad p' = 0 \tag{1.2}$$

где φ_r, φ_z — соответственно производные по r и по z от функции φ. Для стационарного движения должны выполняться условия $\partial R / \partial r = 0$, $\partial R / \partial z = 0$. Пусть этим условиям удовлетворяют

$$r = r_0, \qquad z = z_0 \tag{1.3}$$

для этого очевидно должно выполняться

$$(\varphi_r)_0 - \frac{\beta^2}{r_0^3} = 0, \qquad (\varphi_z)_0 = 0, \qquad \psi'' = 0 \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем индексом 0 у скобок обозначается значение величины в точке $r = r_0$, $z = z_0$. Используя теорему Рауса, Н. Г. Четаев [2] обнаружил для стационарного движения (1.3) следующие достаточные условия устойчивости:

$$(\varphi_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(\varphi_r)_0 > 0, \qquad \left[(\varphi_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(\varphi_r)_0\right](\varphi_{zz})_0 - (\varphi_{rz})_0^2 > 0 \tag{1.5}$$

Теорема Рауса обеспечивает устойчивость по отношению к величинам r, r', z, z' при условии, что интеграл (1.1) не возмущается. Известно [3,4], однако, что последнее ограничение несущественно. Покажем, что условия (1.5) будут также и необходимыми. Возмутим стационарное движение (1.3)

$$r = r_0 + \xi, \qquad z = z_0 + \eta, \qquad p = \beta + \zeta \tag{1.6}$$

Используя уравнения движения (1.2) и (1.4), получим следующие уравнения первого приближения для уравнений возмущенного движения:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left[(\varphi_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(\varphi_r)_0\right]\xi + (\varphi_{rz})_0\,\eta = 0, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} + (\varphi_{rz})_0\,\xi + (\varphi_{zz})_0\,\eta = 0, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = 0 \tag{1.7}$$

Характеристическое уравнение системы (1.7)

$$\lambda\,[\lambda^4 + (a + c)\,\lambda^2 + (ac - b^2)] = 0, \qquad a = (\varphi_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(\varphi_r)_0, \qquad b = (\varphi_{rz})_0, \qquad c = (\varphi_{zz})_0$$

будет иметь корни (1.8)

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3,4,5} = \pm\left(-\frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + c)^2}{4} - (ac - b^2)}\right)$$

Пусть

$$a < 0, \qquad ac - b^2 < 0 \tag{1.9}$$

Тогда уравнение (1.8) будет иметь положительный корень, если выполняется хотя бы одно из неравенств (1.9). Из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению сразу следует неустойчивость стационарного движения (1.3) при выполнении условий (1.9). Итак, необходимость условий (1.5) доказана.

§ 2. Устойчивость в задаче двух неподвижных центров. Назовем линию, соединяющую два неподвижных притягивающих центра M_1 и M_2, центровой линией. Пусть M_1 соответствует массе m_1, а M_2 — массе m_2. Систему координат выберем так: начало координат возьмем на центровой линии между точками M_1 и M_2 на расстояниях c_1 и c_2 от них соответственно, ось z направим вдоль центровой линии к M_1, плоскость xy — перпендикулярна к ней. Координаты центров притяжения будут $M_1(0, 0, c_1)$, $M_2(0, 0 - c_2)$. В цилиндрических координатах

$$\varphi = -\frac{fm_1}{\sqrt{r^2+(z-c_1)^2}} - \frac{fm_2}{\sqrt{r^2+(z+c_1)^2}} \tag{2.1}$$

где f — постоянная тяготения. Если выполняются условия

$$\psi' = \omega = \mathrm{const}, \qquad \psi'^2 = \omega^2 = \frac{fm_1}{(r_0^2+c_1^2)^{3/2}} + \frac{fm_2}{(r_0^2+c_2^2)^{3/2}}, \qquad \frac{m_1c_1}{(r_0^2+c_1^2)^{3/2}} = \frac{m_2c_2}{(r_0^2+c_2^2)^{3/2}}$$

то в плоскости xy будут возможны круговые движения точки $r = r_0$, $z = 0$.

Кроме того, так как расстояние между центрами $M_1M_2 = c$ не меняется, то

$$c_1 + c_2 = c \tag{2.2}$$

Найдем условия устойчивости кругового движения (2.2). Необходимые производные в точке $r = r_0$, $z = 0$ будут иметь следующие значения: (2.3)

$$(\varphi_r)_0 = \frac{fm_1r_0}{(r_0^2+c_1^2)^{3/2}} + \frac{fm_2r_0}{(r_0^2+c_0^2)^{3/2}}, \qquad (\varphi_{rr})_0 = \frac{fm_1(c_1^2-2r_0^2)}{(r_0^2+c_1^2)^{5/2}} + \frac{fm_2(c_2^2-2r_0^2)}{(r_0^2+c_2^2)^{5/2}}$$

$$(\varphi_{zz})_0 = \frac{fm_1(r_0^2-2c_1^2)}{(r_0^2+c_1^2)^{5/2}} + \frac{fm_2(r_0^2-2c_2^2)}{(r_0^2+c_2^2)^{5/2}}, \qquad (\varphi_{rz})_0 = 3r_0\left[\frac{fm_1c_1}{(r_0^2+c_1^2)^{5/2}} - \frac{fm_2c_2}{(r_0^2+c_2^2)^{5/2}}\right]$$

Первое из условий (1.5) в рассматриваемом случае выполняется. Действительно

$$(\varphi_{rr})_0 + \frac{3}{r_0}(\varphi_r)_0 = \frac{fm_1(r_0^2+4c_1^2)}{(r_0^2+c_1^2)^{5/2}} + \frac{fm_2(r_0^2+4c_2^2)}{(r_0^2+c_2^2)^{5/2}} > 0$$

второе условие после сокращения неравенства на f^2 дает

$$\frac{m_1^2[r_0^4-7r_0^2c_1^2-8c_1^4]}{(r_0^2+c_1^2)^5} + \frac{m_2^2[s_0^4-7r_0^2c_0^2-8c_2^4]}{(r_0^2+c_2^2)^5} +$$
$$+2\frac{m_1m_2[r_0^4+r_0^2e_1^2+r_0^2c_2^2+9r_0^2c_1c_2-8c_1^2c_2^2]}{[(r_0^2+c_1^2)(r_0^2+c_2^2)]^{5/2}} > 0 \tag{2.4}$$

Параметры r_0, c_1 и c_2 связаны соотношениями (2.1) и (2.2). Можно исключить два параметра, например r_0 и c_2, и тогда (2.4) будет зависеть лишь от c_1.

§ 3. Пример. Потенциал земного эллипсоида может быть аппроксимирован потенциалом двух неподвижных центров, лежащих на оси вращения Земли, причем один центр является притягивающим, а второй — отталкивающим (масса отрицательна). Если за единицу расстояния взять радиус Земли $R = 6371$ км, за единицу массы — массу Земли $M = 0.5974 \cdot 10^{27}$, за единицу времени — солнечные сутки и считать, что один из центров (отталкивающий) лежит на расстоянии $a_2 = 1$, тогда

$$m_1 = 1.1, \qquad m_2 = -0.1, \qquad a_1 = 0.09$$

Для круговых движений точки в плоскости, перпендикулярной к земной оси и проходящей на расстоянии $\varkappa = 0.052$ от центра Земли $c_1 = 0.038$, $c_2 = 0.948$, $r_0 = 1{,}14$.

Высота точки над поверхностью Земли $h \sim 900$ км. Условие (2.4) дает $0.0034 > 0$, т. е. движение будет устойчиво.

Поступила 7V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Демин В. Г. Об эллиптических орбитах задачи двух неподвижных центров. Сообщения ГАИШ, 1960, № 115.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, М.— Л., 1955.
3. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, 1954.
4. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.