

Используя рекуррентные соотношения Ньютона, можно доказать справедливость следующих обзримых матричных представлений для искомых симметрических функций.

Для полинома второй степени

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k, \quad \lambda_1^k \lambda_2^k = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k$$

Для полинома третьей степени

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k, \quad \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k$$

$$\sum_{i=j}^3 \lambda_j^k \lambda_i^k = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 2a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k + \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{k-1}$$

Для полинома степени  $n$  это представление имеет вид

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \end{vmatrix}_k$$

(Значками снизу отмечен порядок определителей.)

Легко усматриваемые закономерности в структуре написанных выше определителей указывают на возможность получения более общих результатов для полиномов  $n$ -й степени.

Поступила 2 IV 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П а р о д и М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
2. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
3. К р ы л о в А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехтеориздат, 1950.

### ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СВОЙСТВ ОДНОЙ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

К. С. Колесников (Москва)

Рассматривается плоское возмущенное движение системы, состоящей из жесткого прямолинейного стержня с некоторым числом устойчивых математических маятников одинаковой длины, подвешенных на продольной оси стержня. На стержень действует сила, направление которой всегда совпадает с продольной осью стержня. Такая маятниковая система является неконсервативной и при некоторых соотношениях параметров ее движение становится неустойчивым. В работе выявлены эти соотношения, показана возможность осуществления динамически подобной системы в лабораторных условиях и дана простая интерпретация причин, вызывающих неустойчивость.

Обозначим через  $m$  — массу стержня с маятниками,  $I$  — момент инерции стержня с закрепленными в невозмущенном положении маятниками относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести системы,  $P$  — действующую на стержень силу,  $m_n$  — массу  $n$ -го маятника,  $L_n$  — расстояние от центра тяжести невозмущенной системы до этой массы (считается положительным, если масса  $m_n$  расположена выше центра тяжести),  $l$  — длину маятников,  $k$  — число маятников.

Вертикальное движение стержня с постоянным ускорением

$$\ddot{y}_c = \frac{P}{m} - g$$

будем считать невозмущенным. Примем за малые возмущения системы (фиг. 1) величины  $x_c, \vartheta, \lambda_n$ . При этом с точностью до величин второго порядка малости возмущения  $x_c, \vartheta, \lambda_n$  не оказывают влияния на ускорение  $\ddot{y}_c$ . Точка  $C$  зафиксирована на продольной оси стержня и совпадает с центром тяжести системы, когда все  $\lambda_n = 0$ .

Если расстояние от точки  $C$  до произвольной точки стержня обозначить через  $y_1$  ( $y_1 > 0$ , если отсчет ведется в направлении вектора силы  $P$ ), то положение любой точки стержня в абсолютной системе координат  $xoy$  будет

$$x = x_c + y_1 \vartheta, \quad y = y_c + y_1 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \quad (-l_1 < y_1 < +l_2)$$

Координаты маятников

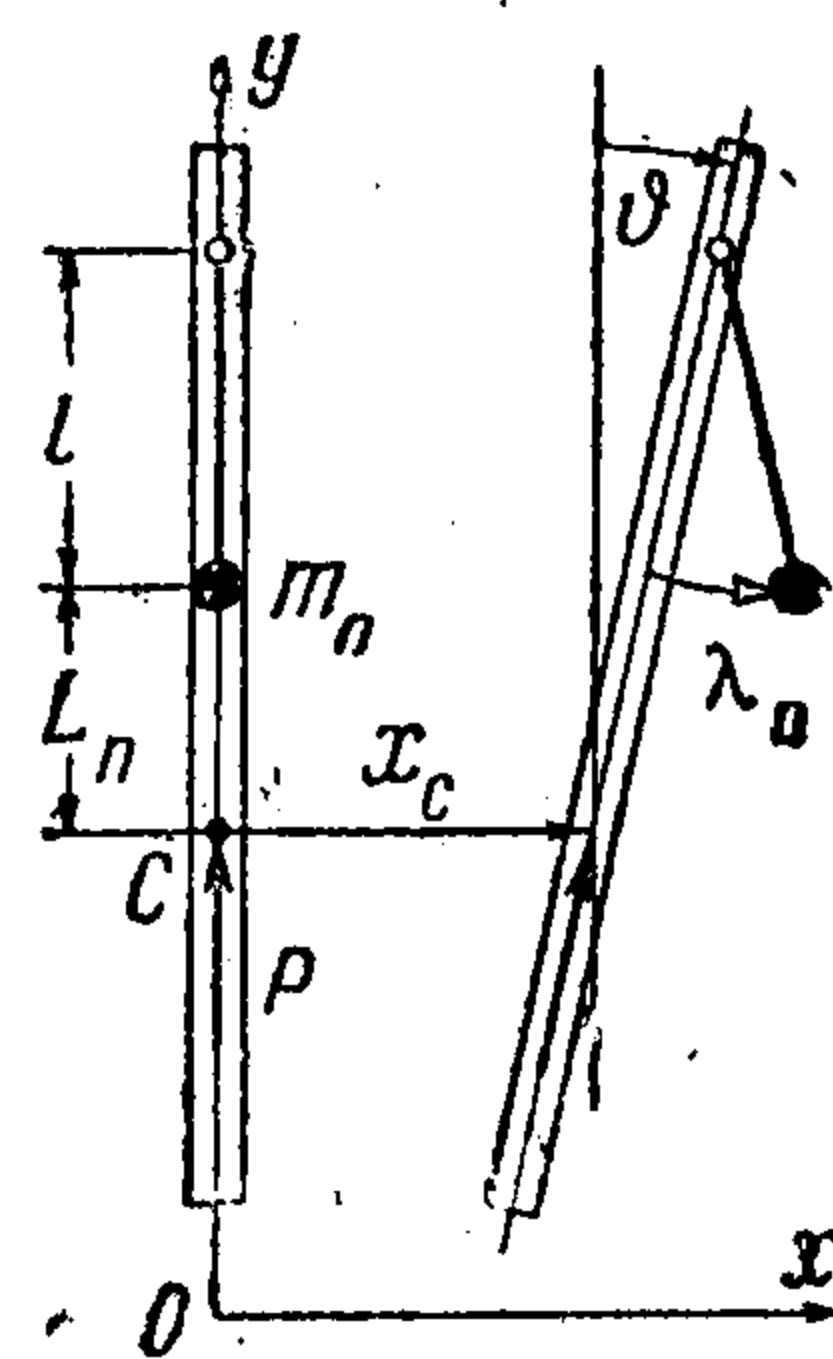
$$x_n = x_c + L_n \vartheta + \lambda_n, \quad y_n = y_c + L_n \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) + \frac{\lambda_n^2}{2l} - \lambda_n \vartheta$$

Выражения координат  $x, x_n$  и  $y, y_n$  выписаны с точностью до величин первого и второго порядков малости соответственно.

Кинетическую и потенциальную энергии системы можно представить как сумму энергий стержня и маятников

$$T = \frac{1}{2} \left[ \int_{-l_1}^{+l_2} m(y_1) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dy_1 + \sum_{n=1}^{n=k} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) \right]$$

$$U = g \int_{-l_1}^{+l_2} m(y_1) y dy_1 + g \sum_{n=1}^{n=k} m_n y_n$$



Фиг. 1

Линеаризованные уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$m \ddot{x}_c + \sum_{n=1}^{n=k} m_n \ddot{\lambda}_n = P \vartheta, \quad I \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{n=k} m_n L_n \ddot{\lambda}_n - \frac{P}{m} \sum_{n=1}^{n=k} m_n \lambda_n = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\lambda}_n + \frac{P}{lm} \lambda_n + L_n \ddot{\vartheta} - \frac{P}{m} \vartheta + \ddot{x}_c = 0 \quad (n = 1, \dots, k)$$

Положим

$$\ddot{x}_c = M e^{rt}, \quad \vartheta = N e^{rt}, \quad \lambda_n = Q_n e^{rt}, \quad r = \omega_0 \rho \quad \left( \omega_0 = \sqrt{\frac{P}{lm}} \right)$$

Тогда характеристическое уравнение системы (1) можно представить в виде:

$$\rho^2 (a_0 \rho^4 + a_1 \rho^2 + a_2) = 0 \quad (2)$$

Здесь  $a_0, a_1, a_2$  — вещественные числа,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho$  — безразмерные параметры системы:

$$a_0 = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) - \mu_3^2, \quad a_1 = 2 - \mu_1 - \mu_2 + \frac{\mu_3}{\rho}, \quad a_2 = 1 + \frac{\mu_3}{\rho}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{n=k} m_n, \quad \mu_2 = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^{n=k} m_n L_n^2, \quad \mu_3 = \frac{1}{m \rho_0} \sum_{n=1}^{n=k} m_n L_n$$

$$\rho = \rho_0 / l, \quad \rho_0 = \sqrt{I/m}$$

Согласно обозначениям пределы изменения параметров будут

$$0 < \mu_1 < 1, \quad 0 < \mu_2 < 1, \quad -1 < \mu_3 < 1, \quad \mu_3^2 \leq \mu_1 \mu_2, \quad 0 < \rho < \infty$$

При равных длинах маятников наибольшая степень уравнения (2) равна шести.

Значение корня  $\rho^2 = 0$  уравнения (2) не вносит никаких особенностей и соответствует такому движению системы, когда все  $\lambda_n \equiv 0$  и  $M = NP/m$ . Рассмотрим поэтому второй сомножитель

$$a_0 \rho^4 + a_1 \rho^2 + a_2 = 0 \quad (3)$$

При больших значениях  $\rho$  дискриминант уравнения (3)

$$D = 4a_0a_2 - a_1^2 = bc \quad (b = 2\sqrt{a_0a_2} - a_1, c = 2\sqrt{a_0a_2} + a_1)$$

является отрицательным и система имеет две частоты собственных колебаний

$$\omega_1^2 = \frac{a_1 + \sqrt{-D}}{2a_0}, \quad \omega_2^2 = \frac{a_1 - \sqrt{-D}}{2a_0}$$

Если, кроме того

$$\left(\frac{\mu_3}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 \ll 1$$

то первая  $\omega_1$  и вторая  $\omega_2$  частоты очень мало отличаются от парциальных частот

$$\omega_1^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_1}}, \quad \omega_2^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_2}}$$

которые имеет система, когда  $\vartheta \equiv 0$  или  $\ddot{x}_c \equiv 0$ . При  $\mu_3 = 0$

$$\omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*$$

С уменьшением  $\rho$  при  $\mu_3 > 0$  система сохраняет прежние свойства. С ростом параметра  $\mu_3/\rho$  лишь увеличивается различие между частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

При малых значениях  $\rho$  и  $\mu_3 < 0$  дискриминант  $D$  уравнения (3) может стать положительным и тогда система будет обладать принципиально другими свойствами. Корни  $p_{1,2}$  биквадратного уравнения (3) будут комплексными сопряженными с отрицательной вещественной частью. При переходе к искомому  $\rho$  получим

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm j\omega, \quad p_{3,4} = +\varepsilon \pm j\omega \quad \left(\varepsilon = \sqrt{\frac{b}{2a_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{2a_0}}\right) \quad (4)$$

Заметим, что два комплексных сопряженных корня решения (4) будут иметь положительную вещественную часть. Собственные колебания с частотой  $\omega$  будут нарастающими.

Так как  $\mu_3^2 \ll \mu_1\mu_2$ , то  $D > 0$  возможно, если  $a_2 > 0$ . Последнее означает, что решение (4) может существовать, если параметр  $\mu_3/\rho$  находится в пределах

$$-1 < \frac{\mu_3}{\rho} < 0$$

Условие  $b > 0$  может быть выполнено, когда

$$\frac{\mu_3}{\rho} \approx -(\mu_1 + \mu_2), \quad \mu_1\mu_2 > \mu_3^2$$

Инкремент нарастания колебаний будет тем больше, чем больше величины  $\mu_1\mu_2 - \mu_3^2$  и  $(\mu_1 + \mu_2)$ . Для выяснения механизма нарастания колебаний уравнение системы на основании (3) представим в виде

$$\ddot{z} + \frac{a_1}{a_0} \dot{z} = -\frac{a_2}{a_0} \int_0^t \int_0^t z dt^2 \quad (5)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, причем вынуждающая сила пропорциональна двойному интегралу от перемещения. Эту силу условно назовем внешней.

В случае  $D < 0$  колебания будут гармоническими и на основании (5) получим

$$\frac{a_1}{a_0} = \omega^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{\omega^2} \quad (6)$$

Левая часть равенства характеризует силу пружины, а правая часть — силу инерции системы и внешнюю силу, которые при  $a_2 > 0$  действуют в фазе.

Различным соотношениям параметров системы при  $\mu_3 > 0$  соответствуют различные частоты  $\omega_1, \omega_2$ , но соотношения между силой пружины и внешней силой удовлетворяют равенству (6). Колебания остаются стационарными потому, что внешняя сила не увеличивает энергию системы. На величину внешней силы уменьшается сила инерции.

Колебания с частотой  $\omega < 1$  и  $\omega > 1$  схематически можно представить как колебания маятника относительно точек, лежащих выше и ниже точки подвеса (фиг. 2).

Если  $\mu_3 = 0$ , то  $\omega_1 = \omega_1^*$  и  $\omega_2 = \omega_2^*$ . С уменьшением  $\mu_3/\rho$  сила пружины уменьшается в большей степени, чем коэффициент  $a_2/a_0$ , низкая и высокая частоты сближаются. При  $D = 0$  сила инерции равна внешней силе. Дальнейшее уменьшение  $\mu_3/\rho$  приводит к тому, что правая часть равенства (6) становится больше левой и упругая сила пружины при неизменной амплитуде не может уравновесить силу инерции и внешнюю силу. Работа внешней силы пойдет на увеличение колебаний колебания будут нарастать. Маятники в системе являются тем механизмом, при помощи которого работа внешней силы идет на раскачку системы.

Когда на стержень подвешен только один маятник, характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2(1 - \mu_1 - \mu_2) + 1 + \frac{\mu_3}{\rho} = 0$$

и при  $\mu_3/\rho > -1$  система имеет одну частоту собственных колебаний

$$\omega^2 = \frac{1 + \mu_3/\rho}{1 - \mu_1 - \mu_2}$$

При  $\mu_3/\rho < -1$  движение такой системы неустойчиво, причем неустойчивость имеет аperiодический характер.

Если все маятники обладают малым трением, пропорциональным  $\epsilon_n \dot{\lambda}_n$ , то характеристическое уравнение (2) будет содержать слагаемые и с нечетными степенями  $p$  и его можно представить в виде

$$p^2(p^2 + \epsilon_1 p + \omega_1^2)(p^2 + \epsilon_2 p + \omega_2^2) = 0$$

Вычисления показывают, что если  $D < 0$ , то  $\epsilon_1 > 0$  и  $\epsilon_2 > 0$ . При  $D > 0$  или  $\epsilon_1$ , или  $\epsilon_2$  могут быть отрицательными, если  $\epsilon > \epsilon_n$ .

Маятниковую систему, обладающую аналогичными свойствами, легко осуществить в лабораторных условиях. Для этого стержень с маятниками подвешивается в точке  $C$  на поперечной оси вращения, которая может перемещаться без трения по горизонтальным направляющим в плоскости  $xoy$ . Стержень связан с сервоприводом, способным вырабатывать горизонтальную силу  $P_x$ , пропорциональную углу  $\vartheta$  поворота стержня. Сила  $P_x$  приложена к оси вращения стержня и действует в плоскости  $xoy$ , причем  $P_x = mg\vartheta$ .

Если положение лабораторной маятниковой модели определять координатами  $x_c(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\lambda_n(t)$  и  $y_c = \text{const}$ , то линеаризованные уравнения возмущенного движения модели будут такими же, как и уравнения (1), если в последних положить  $P = mg$ . Безразмерные параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\rho$  можно назвать коэффициентами подобию,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — масштабом частоты.

Для возникновения нарастающих колебаний нужен приток энергии в систему. Источником энергии в лабораторной модели является сервопривод, в исходной системе — сила  $P$ , которые при возникновении угла  $\vartheta$  совершают работу на перемещениях  $x_c$

$$A = P \int_0^t \vartheta \dot{x}_c dt$$

Приняв

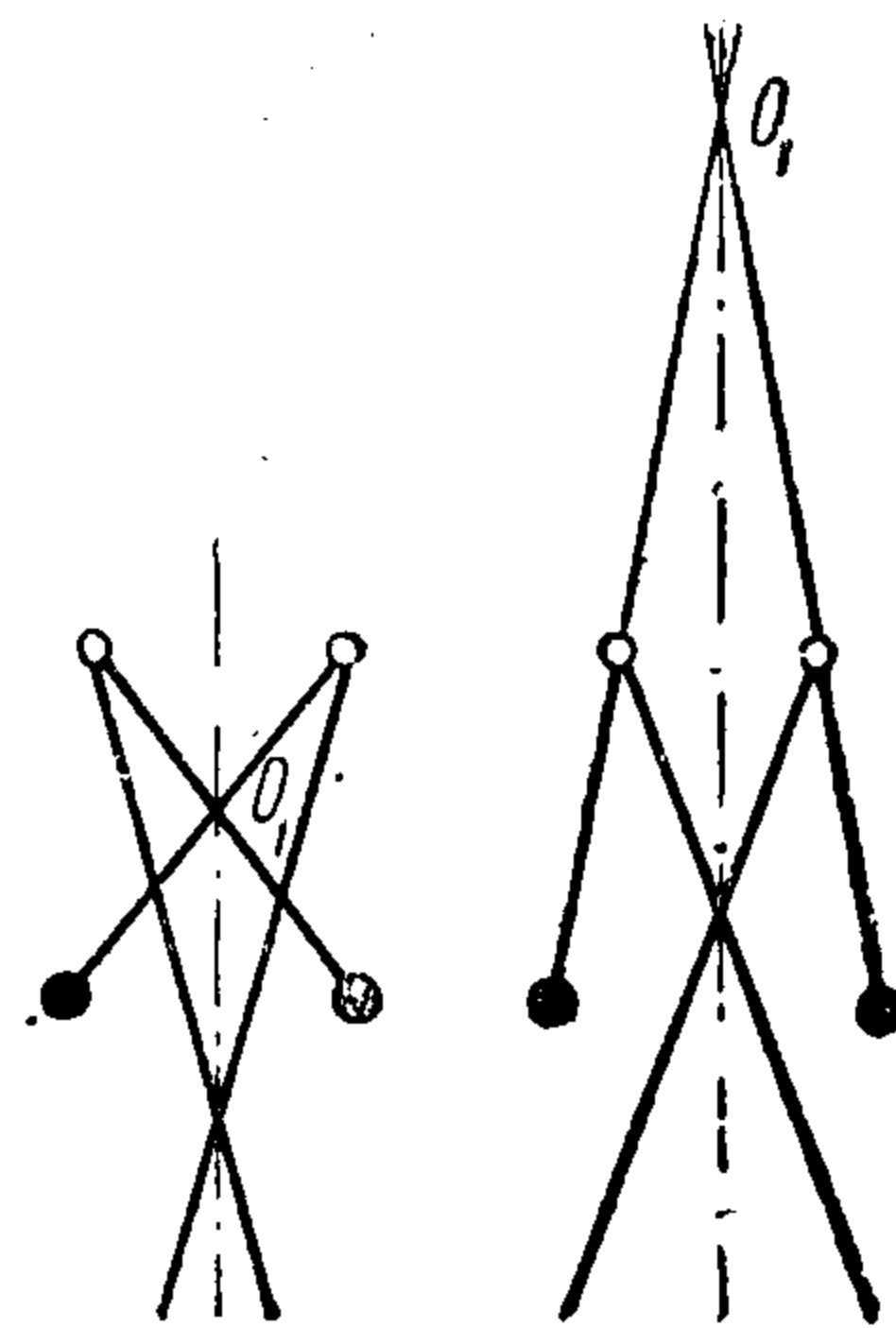
$$\dot{x}_c = \frac{1}{\omega_0 \rho} M e^{\omega_0 \rho t}, \quad M = N l \omega_0^2 \eta(p)$$

где  $\eta(p)$  — безразмерный коэффициент распределения амплитуд, получим

$$A = P l \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_\alpha e^{p_\alpha t} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} N_\alpha \eta_\alpha(p_\alpha) e^{p_\alpha t} dt$$

Работа  $A$  будет неограниченно возрастать только тогда, когда среди корней  $p_\alpha$  характеристического уравнения системы будет по крайней мере один положительный или два комплексных сопряженных с положительной вещественной частью. В этих случаях энергия, сообщаемая системе внешней силой, пойдет на раскачку системы, амплитуды координат  $x_c$ ,  $\vartheta$ ,  $\lambda_n$  будут увеличиваться.

Поступила 12 V 1962



Фиг. 2