ОБ ОТДЕЛЕНИИ И ВЫЧИСЛЕНИИ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. М. Мархашов (Москва)

В прикладных вопросах часто возникает задача вычисления корней алгебраического уравнения. В предлагаемой заметке рассмотрены некоторые подчиненные этой задаче способы их отделения и оценки.

1. Широко известные методы локализации корней алгебраического уравнения [1,2], в том числе классические методы Штурма и Бюдана — Фурье, решают задачу об определении числа корней, содержащихся внутри произвольной наперед заданной области (или отрезка вещественной оси).

Представляет интерес в некотором смысле обратная задача — нахождение областей (или отрезков), внутри каждой из которых имеется точно один корень, независимо от специализации коэффициентов уравнения.

Рассмотрим уравнение с вещественными коэффициентами

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

все корни которого вещественны, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

Задача состоит в нахождении $n-1$ таких рациональных функций $\mu_\nu(a_1, \ldots, a_n)$, что всякое определенное соотношение между $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1}$, возникающее при любом частном выборе a, необходимо влечет выполнение неравенств

$$-\infty < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n < \infty \tag{1.1}$$

Таким образом, если функции μ существуют, то они определяют «подвижные» границы корней; при этом структура μ может меняться только в зависимости от степени уравнения. Покажем, что по крайней мере для уравнений третьей степени

$$f(z) \equiv z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \tag{1.2}$$

такие функции μ действительно существуют. В самом деле, примем в качестве μ следующие функции коэффициентов уравнения (1.2):

$$\mu' = -\frac{a_1}{3}, \qquad \mu'' = \frac{a_1 a_2 - 9a_3}{6a_2 - 2a_1^2} \tag{1.3}$$

Если обозначить через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ последовательность главных миноров возрастающего порядка ганкелевой матрицы, соответствующей уравнению (1.2)

$$\begin{Vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{Vmatrix}$$

то можно непосредственно убедиться в справедливости тождеств

$$f(\mu') = (\mu'' - \mu')\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}, \qquad f(\mu'') = (\mu' - \mu'')\frac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta_2^2} \tag{1.4}$$

Если все корни уравнения (1.2) вещественны, то

$$\Delta_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

и из (1.4) следует

$$-\infty < \lambda_1 < \mu' < \lambda_2 < \mu'' < \lambda_3 < \infty, \quad \text{если } \mu' < \mu''$$
$$-\infty < \lambda_1 < \mu'' < \lambda_2 < \mu' < \lambda_3 < \infty, \quad \text{если } \mu'' < \mu'$$
$$\mu' = \lambda_2 = \mu'', \quad \text{если } \mu' = \mu''.$$

Заметим, что знаменатели в (1.3) лишь знаком отличаются от Δ_1 и Δ_2 и в силу (1.5) в нуль не обращаются.

Следует упомянуть, что в качестве μ'' и μ' взяты выражения, совпадающие, соответственно, со значениями двух- и трехкратного корней уравнения (1.2) во всех случаях, когда таковые существуют. Последние найдены путем простых рациональных операций: μ'' — как решение для первой степени μ системы уравнений

$$f(\mu) = 0, \qquad f'(\mu) = 0, \qquad \mu f'(\mu) = 0$$

в которой степени μ рассматриваются как независимые переменные; μ' — из уравнения $f''(\mu) = 0$. Аналогично может быть найдено выражение для k-кратного корня уравнения n-й степени. Однако соответствующий процесс неоднозначен —

значение кратного корня может быть определено с точностью до слагаемого, обращающегося в нуль вместе с последовательностью результантов $R\ (f,\ f')$, $R\,(f',\ f''), \ldots,$ отвечающей кратности корня.

Это обстоятельство осложняет приложение описанного приема к случаям $n \geqslant 4$.

2. В теории автоматического регулирования часто требуется знание траекторий корней характеристического уравнения, построенного для линейных систем с варьируемым параметром. Иногда значения корней алгебраического уравнения являются объектом промежуточных операций некоторого аналитического алгоритма.

В этих случаях удобно иметь достаточно простую и точную аналитическую зависимость корней уравнения от его коэффициентов.

Для получения ее можно использовать способ, родственный методу малого параметра Пуанкаре. В отличие от случая дифференциального уравнения разложение решения алгебраического уравнения в ряд по степеням параметра можно построить путем непосредственного вычисления производных, существование которых можно гарантировать в окрестности всякой точки, в которой производная существует, Это позволяет точно определить области аналитичности решения и, следовательно, области сходимости ряда, представляющего это решение.

Рассмотрим алгебраическое уравнение, вещественные коэффициенты которого аналитически зависят от некоторого параметра

$$f\,(\mu,\ z) = 0$$

Из результата дифференцирований этого уравнения по параметру

$$f_z'\,\frac{\partial z}{\partial\mu} + f'_\mu = 0,\quad f_z'\,\frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2} + f_z''\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2 + 2\,f''_{\mu z}\,\frac{\partial z}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} = 0, \ldots$$

видно, что последовательность производных $\partial z\,/\,\partial\mu,\ \partial^2 z\,/\,\partial\mu^2, \ldots$ может быть вычислена для любых значений μ°, для которых z°, удовлетворяющее уравнению $f\,(\mu^\circ,\ z^\circ) = 0$, конечно[1], и если $f_z'\,(\mu^\circ,\ z^\circ) \neq 0$. Таким образом, ряд

$$z\,(\mu) = z^\circ + \left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^\circ (\mu - \mu^\circ) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2}\right)^\circ (\mu - \mu^\circ)^2 + \ldots$$

сходится и представляет аналитическую функцию при всех μ, для которых результант $R\,(f,\ f')$ сохраняет знак, который он будет иметь при $\mu = \mu^\circ$.

Прочие параметры, от которых могут зависеть коэффициенты уравнения, следует рассматривать как некоторые фиксированные величины. Такими параметрами могут служить, в частности, сами коэффициенты уравнения. В качестве μ° желательно выбрать такие величины, для которых z° легко вычисляются.

Проиллюстрируем описанный прием на примере кубического уравнения

$$z^3 + pz + q = 0$$

Рассматривая q как параметр, и отправляясь от его нулевого значения, найдем

$$z_1 = -\frac{q}{p} - \frac{q^3}{p^4} - 3\,\frac{q^5}{p^7} + \ldots$$

$$z_2 = \sqrt{-p} + \frac{q}{2p} + \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{-p}}{p^3}\,q^2 - \frac{1}{2}\,\frac{q^3}{p^4} - \frac{105}{128}\,\frac{\sqrt{-p}}{p^6}\,q^4 + \ldots$$

$$z_3 = -\sqrt{-p} + \frac{q}{2p} - \frac{3}{8}\,\frac{\sqrt{-p}}{p^3}\,q^2 - \frac{1}{2}\,\frac{q^3}{p^4} + \frac{105}{128}\,\frac{\sqrt{-p}}{p^6}\,q^4 + \ldots$$

Ряды сходятся при $R\,(f,\ f') \equiv -4p^3 + 27q^2 < 0 \quad p > 0$ (либо $-4p^3 + 27q^2 > 0$, $p < 0$), притом тем быстрее, чем с большим запасом выполнено неравенство $pR > 0$.

3. В одном из наиболее эффективных методов вычисления корней алгебраического уравнения — методе Лобачевского [3] — требуется вычислять симметрические функции степеней корней через коэффициенты уравнения. Для этого указан некоторый алгоритмический процесс, приводящий, однако, к трудно обозримому результату.

---

[1] Особыми точками решения алгебраического уравнения в рассматриваемом случае могут быть лишь критические алгебраические точки, являющиеся точками ветвления решения; наличие полюсов исключено условием конечности z°.

Используя рекуррентные соотношения Ньютона, можно доказать справедливость следующих обозримых матричных представлений для искомых симметрических функций.

Для полинома второй степени

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k, \qquad \lambda_1^k \lambda_2^k = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k$$

Для полинома третьей степени

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k \qquad \lambda_1^k \lambda_2^k \lambda_3^k = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k$$

$$\sum_{i=j}^{3} \lambda_j^k \lambda_j^k = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ 2a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_k + \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{k-1}$$

Для полинома степени n это представление имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \end{vmatrix}_k$$

(Значками снизу отмечен порядок определителей.)

Легко усматриваемые закономерности в структуре написанных выше определителей указывают на возможность получения более общих результатов для полиномов n-й степени.

Поступила 2 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. П а р о д и М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
2. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
3. К р ы л о в А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехтеориздат, 1950.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СВОЙСТВ ОДНОЙ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

К. С. К о л е с н и к о в (Москва)

Рассматривается плоское возмущенное движение системы, состоящей из жесткого прямолинейного стержня с некоторым числом устойчивых математических маятников одинаковой длины, подвешенных на продольной оси стержня. На стержень действует сила, направление которой всегда совпадает с продольной осью стержня. Такая маятниковая система является неконсервативной и при некоторых соотношениях параметров ее движение становится неустойчивым. В работе выявлены эти соотношения, показана возможность осуществления динамически подобной системы в лабораторных условиях и дана простая интерпретация причин, вызывающих неустойчивость.

Обозначим через m — массу стержня с маятниками, I — момент инерции стержня с закрепленными в невозмущенном положении маятниками относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести системы, P — действующую на стержень илу, m_n — массу n-го маятника, L_n — расстояние от центра тяжести невозмущенной системы до этой массы (считается положительным, если масса m_n расположена выше центра тяжести), l — длину маятников, k — число маятников.