Это означает, что корреляция между ортогональными составляющими со временем уменьшается, т. е. для достаточно большого времени фаза становится равновероятной, вне зависимости от ее начального распределения.

Поступила 6 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы. Автоматика и телемеханика, 1958, т. 19, № 8.
2. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд-во Сов. радио, 1961.
3. Дьяков Ю. Е. Вынужденные колебания контура со случайно меняющейся емкостью. Радиотехника и электроника, 1960, т. V, № 5.
4. Стратонович Р. Л. и Романовский Ю. М. Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы. Науч. докл. высш. школы, физ.-матем. науки, 1958, № 3.
5. Bertram I. E., Sarachik P. E. Stability of systems with time — variing parameters. IRE Transactions on cirquits theory, 1959, vol CT-6, spec. suppl.
6. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Физматгиз, 1957.
7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.

К ОПТИМИЗАЦИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

Л. С. Гноенский (Москва)

Пусть уравнение

$$L_n(y) \equiv a_0(t)\, y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = f(t) + c(t)\, f'(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \ldots y^{(n-1)}(0) = f(0) = 0 \tag{2}$$

описывает следящую систему, на вход которой для улучшения ее качества наряду с управляющим воздействием $f(t)$ подается его производная $f'(t)$, усиливаемая переменным коэффициентом усиления $c(t)$. Предполагается, что поступающая на вход следящей системы функция $f(t)$ отфильтрована от высокочастотных шумов и помех. Относительно $f(t)$ известно лишь, что

$$|f'(t)| \leqslant m \tag{3}$$

и $f'(t)$ на конечном интервале времени имеет конечное число точек разрыва.

Функция $c(t)$ должна удовлетворять ограничению

$$|c(t)| \leqslant M \tag{4}$$

Через $\delta(t, f(\tau), c(\tau))$ обозначим рассогласование $y(t) - f(t)$.

Предположим, что в фиксированный момент времени T модуль рассогласования при любом $f'(t)$ из (3) не должен превосходить заданной величины т. е.

$$\sup_f |\delta(T, f(t), c(t))| \leqslant A, \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T] \tag{5}$$

и пусть выполняется неравенство

$$\begin{gathered} \inf_c \sup_f |\delta(T, f(t), c(t))| = A^\circ < A \\ |c(t)| \leqslant M, \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T] \end{gathered} \tag{6}$$

Сформулируем теперь задачу. Из множества интегрируемых функций $c(t)$, удовлетворяющих условиям (4), (5), требуется найти функцию $c_{\min}(t)$, на которой реализуется

$$\inf_c \sup_f |\delta_T'(T, f(t), c(t))| \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T]$$

В момент времени T достигается наибольшая возможная в данных условиях степень близости первого порядка между $y(T)$ и $f(T)$ при любом $f(t)$ из (3).

Рассматриваемая задача непосредственно связана с методом накопления возмущения Б. В. Булгакова [1], так как относительно $f(t)$ известно лишь условие [3].

Отметим, что метод, при котором на вход следящей системы подается линейная комбинация задающего воздействия $f(t)$ и его производной, довольно широко применяется на практике.

В ряде случаев дифференцирование задающего воздействия может быть произведено практически точно. Например, когда $f'(t)$ получается при помощи тахометра. В других случаях, например, при дифференцировании при помощи RC-цепочек погрешность при определении производной проявляется в том, что вместо функции $f'(t)$ получают функцию $S(t)$, являющуюся решением уравнения

$$T^* \frac{dS}{dt} + S = \frac{df}{dt}$$

При достаточно малых значениях постоянной времени T^* считают, что $S(t) \approx f'(t)$. В заметке предполагается, что дифференцирование осуществляется точно. Однако постановка задачи сохраняет свой смысл и в случае, когда на вход системы вместо $f'(t)$ подается $S(t)$.

Ниже будем предполагать, что на $[0, T_0]$, где $T_0 > T$, каждый коэффициент $a_i(t)$ уравнения (1) есть функция, имеющая $n-i$ непрерывных производных, и $a_0(t)$ не обращается в нуль на $[0, T_0]$. Эти условия облегчают вычисление некоторых вводимых ниже функций. Представив $f(t)$ в виде

$$f(t) = \int_0^t f'(\tau)\,d\tau$$

поменяв порядок интегрирования в полученном повторном интеграле, учитывая (2), рассогласование $\delta(T, f, c)$ можно представить в виде

$$\delta(T, f, c) = \int_0^T [K_0(T, \tau) + c(\tau) K(T, \tau)] f'(\tau)\,d\tau$$

$$K_0(T, \tau) = \int_\tau^T K(T, u)\,du - 1, \qquad K(T, \tau) = \sum_{r=1}^n y_r(T) \frac{W_r(\tau)}{a_0(\tau) W(\tau)}$$

Здесь $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений, однородного уравнения соответствующего уравнению (1), $W(\tau)$ — определитель Вронского этой системы, $W_r(\tau)$ — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу последней строки и r-го столбца определителя Вронского. Поэтому

$$K(T, T) = 0, \qquad K_0(T, T) = -1$$

Напомним, что функции $Z_r(\tau) = W_r(\tau) / a_0(\tau) W(\tau)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$M_n(Z) \equiv (-1)^n (a_0 Z)^{(n)} + (-1)^{n-1} (a_1 Z)^{(n-1)} + \ldots - (a_{n-1} Z)' + a_n Z = 0 \qquad (7)$$

Здесь M_n — оператор сопряженный к L_n.

Так как $c(\tau)$ и $f'(\tau)$ интегрируемы; $K(T, \tau)$, $K_0(T, \tau)$ и их производные по T непрерывны по T и по τ; $K(T, T) = 0$, $K_0(T, T) = -1$, то

$$\delta_T'(T, f, c) = \int_0^T [K_0'(T, \tau) + c(\tau) K'(T, \tau)] f'(\tau)\,d\tau - f'(T),$$

если $f'(\tau)$ непрерывна в T. Если $f'(\tau)$ имеет в T разрыв, то для левосторонней, соответственно правосторонней производных второй член формулы равен $f'(T_{-0})$, соответственно $f'(T_{+0})$. Производные от $K_0(T, \tau)$, $K(T, \tau)$ вычисляются по аргументу T. Так как $f'(t)$ заранее не известна и удовлетворяет лишь условию (3), то

$$\sup_f |\delta(T, f, c)| = m \int_0^T |K_0(T, \tau) + c(\tau) K(T, \tau)|\,d\tau$$

$$\sup_f |\delta_T'(T, f, c)| = m \int_0^T |K_0'(T, \tau) + c(\tau) K'(T, \tau)|\,d\tau + m$$

Поэтому

$$\inf_c \sup_f \delta|_T{}' (T, f, c)|, \qquad \inf_c m \int_0^T |K_0'(T,\tau) + c(\tau) K'(T,\tau)|\, d\tau$$

реализуются на одной и той же функции $c_{\min}(\tau)$.

В [2] показано, что (6) реализуется на функции $c^\circ(\tau)$

$$\begin{aligned} c^\circ(\tau) &= -\frac{K_0(T,\tau)}{K(T,\tau)} \quad \text{при} \quad \left|\frac{K_0(T,\tau)}{K(T,\tau)}\right| < M \\ c^\circ(\tau) &= -M \operatorname{sign} \frac{K_0(T,\tau)}{K(T,\tau)} \quad \text{при} \quad \left|\frac{K_0(T,\tau)}{K(T,\tau)}\right| \geqslant M \end{aligned} \tag{8}$$

Положим

$$\begin{aligned} K_0(T,\tau) + c(\tau) K(T,\tau) &= N(\tau) + \varphi(\tau) K(\tau) \\ K_0'(T,\tau) + c(\tau) K'(T,\tau) &= R(\tau) + \varphi(\tau) G(\tau) \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} N(\tau) = K_0(T,\tau) + c^\circ(\tau) K(T,\tau), \qquad R(\tau) = K_0'(T,\tau) + c^\circ(\tau) K'(T,\tau) \\ \varphi(\tau) = c(\tau) - c^\circ(\tau), \qquad K(\tau) = K(T,\tau), \qquad G(\tau) = K'(T,\tau) \end{gathered} \tag{10}$$

$$a(\tau) = -M - c^\circ(\tau) \leqslant \varphi(\tau) \leqslant M - c^\circ(\tau) = b(\tau) \tag{11}$$

Поставленная выше задача эквивалентна, таким образом, следующей. На множестве D функций $\varphi(\tau)$, удовлетворяющих (11) и условию

$$Q(\varphi) = m \int_0^T |N(\tau) + \varphi(\tau) K(\tau)|\, d\tau < A \tag{12}$$

найти функцию $\varphi_{\min}(\tau)$, на которой реализуется

$$\inf_\varphi E(\varphi) = \inf_\varphi m \int_0^T |R(\tau) + \varphi(\tau) G(\tau)|\, d\tau \tag{13}$$

Положим

$$\begin{gathered} \varphi^\circ(\tau) = a(\tau) \quad \text{при} \quad -\frac{R(\tau)}{G(\tau)} \leqslant a(\tau), \qquad \varphi^\circ(\tau) = b(\tau) \quad \text{при} \quad -\frac{R(\tau)}{G(\tau)} \geqslant b(\tau) \\ \varphi^\circ(\tau) = -\frac{R(\tau)}{G(\tau)} \quad \text{при} \quad a(\tau) < -\frac{R(\tau)}{G(\tau)} < b(\tau) \end{gathered}$$

Пусть $\sigma(y)$ — принадлежащее $[0, T]$ множество, такое, что если $\tau \in \sigma(y)$, то

$$\frac{G(\tau)}{K(\tau)} \geqslant y, \qquad y \in [B^-, B^+], \qquad B^- = \inf_\tau \frac{G(\tau)}{K(\tau)}, \qquad B^+ = \sup_\tau \frac{G(\tau)}{K(\tau)}$$

Введем в рассмотрение зависящую от параметра y функцию $\psi(\tau, y)$

$$\psi(\tau, y) = \varphi^\circ(\tau) \quad \text{при} \quad \tau \in \sigma(y), \qquad \psi(\tau, y) = 0 \quad \text{при} \quad \tau \in \lambda(y) = [0, T] \setminus \sigma(y)$$

и функцию

$$\Phi(y) = m \int_0^T |N(\tau) + \psi(\tau, y) K(\tau)|\, d\tau$$

Заметим теперь, что для любой произвольной постоянной d уравнение

$$\frac{G(\tau)}{K(\tau)} = d$$

может иметь на $[0, T]$ лишь конечное число нулей. Действительно

$$G(\tau) = \sum_{r=1}^n y_r'(T) Z_r(\tau), \qquad K(\tau) = \sum_{r=1}^n y_r(T) Z_r(\tau)$$

$$Z^\circ(\tau) \equiv G(\tau) - dK(\tau) = \sum_{r=1}^n [y_r'(T) - d y_r(T)] Z_r(\tau)$$

В последнем равенстве хотя бы один из коэффициентов $y_r'(T) - d y_r(T)$ отличен от нуля, так как иначе был бы равен нулю определитель Вронского. Поэтому $Z^\circ(\tau)$ есть нетривиальное решение уравнения (7). Но это решение на $[0, T]$ может иметь лишь конечное число нулей. Функция $\Phi(y)$ монотонно убывает при изменении y от B^- до B^+ и непрерывна.

Действительно если $y_2 > y_1$, то $\sigma(y_2) \subset \sigma(y_1)$. Поэтому $|\psi(\tau, y_1)| \geqslant |\psi(\tau, y_2)|$. Из (8) — (11) следует, что если $N(\tau)\psi(\tau, y)K(\tau) \neq 0$, то

$$\operatorname{sign}[N(\tau) + \psi(\tau, y)K(\tau)] = \operatorname{sign} N(\tau) = \operatorname{sign} \psi(\tau, y)K(\tau)$$

Эти равенства можно получить следующим образом; имеем

$$\operatorname{sign} N = \operatorname{sign} K_0, \qquad c^\circ = -M \operatorname{sign}\frac{K_0}{K}, \qquad |K_0| > M|K|, \qquad \psi = \varphi^\circ$$

поэтому

$$a = M\left(-1 + \operatorname{sign}\frac{K_0}{K}\right) \leqslant \varphi^\circ \leqslant M\left(1 + \operatorname{sign}\frac{K_0}{K}\right) = b, \qquad -M \leqslant M\operatorname{sign}\frac{K_0}{K} - \varphi \leqslant M$$

Так как

$$N + \psi K = K_0 - K\left(M\operatorname{sign}\frac{K_0}{K} - \varphi^\circ\right)$$

то

$$\operatorname{sign}(N + \psi K) = \operatorname{sign} K_0 = \operatorname{sign} N$$

Далее $\operatorname{sign}\psi K = \operatorname{sign}\varphi^\circ K = \operatorname{sign} K_0 = \operatorname{sign} N$, так как

$$-2M \leqslant \varphi^\circ < 0 \quad \text{при } \operatorname{sign}\frac{K_0}{K} = -1, \qquad 0 < \varphi^\circ \leqslant 2M \quad \text{при } \operatorname{sign}\frac{K_0}{K} = 1$$

Поэтому $\Phi(y_1) \geqslant \Phi(y_2)$. Непрерывность $\Phi(y)$ следует из отмеченного свойства $G(\tau)/K(\tau)$. Возможны два случая: либо $\Phi(B^-) > A$, либо $\Phi(B^-) \leqslant A$.

В первом случае

$$\varphi_{\min}(\tau) = \psi(\tau, y_0) \equiv \psi^\circ(\tau) \tag{14}$$

где y_0 — наименьший корень уравнения

$$\Phi(y) = A \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет хотя бы один корень, так как

$$\Phi(B^+) = m\int_0^T |N(\tau)|\,d\tau = A^\circ < A$$

Из сказанного следует, что $\psi(\tau, y_i) \equiv \psi(\tau, y_j)$, если y_i и y_j удовлетворяют (15).

Во втором случае

$$\varphi_{\min}(\tau) = \psi(\tau, B^-) = \varphi^\circ(\tau)$$

Очевидно, что $\psi^\circ(\tau)$ и $\varphi^\circ(\tau)$ принадлежат к множеству D.

Докажем соотношение (14). Пусть $\varphi(\tau)$ произвольная функция из D.

Учитывая, что при любом τ из $\sigma(y_0)$

$$|\varphi| + |\psi^\circ| \geqslant \left|\frac{R}{G} + \varphi\right| - \left|\frac{R}{G} + \psi^\circ\right| = \left|\frac{R}{G} + \varphi\right| - \left|\frac{R}{G}\right| + |\psi^\circ| \geqslant |\psi^\circ| - |\varphi|$$

$$\left|\frac{R}{G} + \varphi\right| \geqslant \left|\frac{R}{G} + \psi^\circ\right|, \qquad \frac{G(\mu)}{K(\mu)} > \frac{G(\nu)}{K(\nu)} \quad \text{для } \mu \in \sigma(y_0),\ \nu \in \lambda(y_0)$$

$$\frac{A}{m} = \int_0^T |N + \psi^\circ K|\,d\tau = \int_0^T |N|\,d\tau + \int_{\sigma(y_0)} |\psi^\circ|\,|K|\,d\tau = \frac{A^\circ}{m} + \int_{\sigma(y_0)} |\psi^\circ|\,|K|\,d\tau$$

$$\frac{Q(\varphi)}{m} = \int_0^T |N + \varphi K|\,d\tau \geqslant \frac{A^\circ}{m} + \int_0^T |\varphi|\,|K|\,d\tau$$

имеем

$$\int_0^T [\,|R + \varphi G| - |R + \psi^\circ G|\,]\,d\tau = \int_{\sigma(y_0)} |K|\left|\frac{G}{K}\right|\left[\left|\frac{R}{G} + \varphi\right| - \left|\frac{R}{G} + \psi^\circ\right|\right]d\tau +$$

$$+ \int_{\lambda(y_0)} |K|\left|\frac{G}{K}\right|\left[\left|\frac{R}{G} + \varphi\right| - \left|\frac{R}{G}\right|\right]d\tau = \left|\frac{G(\tau^*)}{K(\tau^*)}\right| \int_{\sigma(y_0)} |K|\left[\left|\frac{R}{G} + \varphi\right| -\right.$$

$$\left. - \left|\frac{R}{G} + \psi^\circ\right|\right]d\tau + \int_{\lambda(y_0)} |K|\left|\frac{G}{K}\right|\left[\left|\frac{R}{G} + \varphi\right| - \left|\frac{R}{G}\right|\right]d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{G(\tau^*)}{K(\tau^*)}\right| \int\limits_{\sigma(y_0)} |K|\,[\,|\psi^\circ| - |\varphi|\,]\,d\tau - \left|\frac{G(\tau^{**})}{K(\tau^{**})}\right| \int\limits_{\lambda(y_0)} |K|\,|\varphi|\,d\tau =$$

$$= \left|\frac{G(\tau^*)}{K(\tau^*)}\right| \frac{(A - A^\circ)}{m} - \left|\frac{G(\tau^*)}{K(\tau^*)}\right| \int\limits_{\sigma(y_0)} |K|\,|\varphi|\,d\tau -$$

$$- \left|\frac{G(\tau^{**})}{K(\tau^{**})}\right| \int\limits_{\lambda(y_0)} |K|\,|\varphi|\,d\tau \geqslant \frac{1}{m}\left|\frac{G(\tau^*)}{K(\tau^*)}\right| [A - A^\circ - (Q(\varphi) - A^\circ)] \geqslant 0$$

Показано, таким образом, что на $\psi^\circ(\tau)$ реализуется $\inf E(\varphi)$, т. е. справедливо равенство (14). Аналогично доказывается соотношение (16).

Остановимся на вычислительной стороне рассматриваемой задачи. Определение функции $K(T,\tau)$ сводится к вычислению фундаментальных систем решений $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ и $Z_1(t), \ldots, Z_n(t)$. Методы нахождения этих решений при помощи цифровых быстродействующих машин или моделей непрерывного действия хорошо известны. Определение после этого функций $N(\tau)$, $R(\tau)$, $\varphi^\circ(\tau)$ не вызывает затруднений. Так как $\Phi(y)$ монотонная непрерывная функция, то для решения с наперед заданной степенью точности уравнения (15) удобно применить известный численный метод последовательных приближений — метод ложного положения.

Из отмеченного выше свойства функции $G(\tau)/K(\tau)$ следует, что для любого заданного y множество $\sigma(y)$ состоит из конечного числа интервалов. Границы этих интервалов есть корни уравнения

$$\frac{G(\tau)}{K(\tau)} = y$$

Нахождение корней этого уравнения сводится к нахождению нулей решения

$$z^\circ(\tau) = \sum_{r=1}^{n} [y_r'(T) - y y_r(T)] Z_r(\tau)$$

уравнения (7), что может быть проделано на машинах дискретного или непрерывного действия. Вычисление значения функции $\Phi(y)$ после определения структуры множества $\sigma(y)$ сводится к вычислению конечного числа интегралов.

Для иллюстрации способа определения функции $\Phi(y)$ рассматривается пример. Пусть задано уравнение

$$y'' + y = f(t) + c(t) f'(t), \qquad y(0) = y'(0) = f(0) = 0, \quad |f'(t)| \leqslant m; \ |c(t)| \leqslant M$$

Как известно, для этого уравнения $K(T, \tau) = \sin(T - \tau)$. Для простоты положим $T = 2\pi n$, где n — положительное целое число. Тогда

$$K(T, \tau) = -\sin\tau, \qquad K_0(T, \tau) = \int\limits_\tau^T K(T, u)\,du - 1 = -\cos(T - \tau) = -\cos\tau$$

$$K'(T, \tau) = \cos(T - \tau) = \cos\tau, \qquad K_0'(T, \tau) = \sin(T - \tau) = -\sin\tau$$

$$c^\circ(\tau) = -\operatorname{ctg}\tau \quad \text{при } |\operatorname{ctg}\tau| \leqslant M, \qquad c^\circ(\tau) = -M \operatorname{sign}\operatorname{ctg}\tau \quad \text{при } |\operatorname{ctg}\tau| \geqslant M$$

Используя формулы (10), (11), получаем

$$\begin{array}{lll}
N(\tau) = 0, & R(\tau) = -\operatorname{cs}c\,\tau & (|\operatorname{ctg}\tau| \leqslant M) \\
N(\tau) = -\cos\tau + M\sin\tau, & R(\tau) = -\sin\tau - M\cos\tau & (\operatorname{ctg}\tau \geqslant M) \\
N(\tau) = -\cos\tau - M\sin\tau, & R(\tau) = -\sin\tau + M\cos\tau & (\operatorname{ctg}\tau \leqslant -M)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
a(\tau) = -M + \operatorname{ctg}\tau, & b(\tau) = M + \operatorname{ctg}\tau & (|\operatorname{ctg}\tau| \leqslant M) \\
a(\tau) = 0, & b(\tau) = 2M & (\operatorname{ctg}\tau \geqslant M) \\
a(\tau) = -2M, & b(\tau) = 0 & (\operatorname{ctg}\tau \leqslant -M)
\end{array}$$

$$\frac{G(\tau)}{K(\tau)} = -\operatorname{ctg}\tau, \qquad \begin{array}{lll}
-\dfrac{R(\tau)}{G(\tau)} = \dfrac{1}{\sin\tau\cos\tau} = \dfrac{2}{\sin 2\tau} & & (|\operatorname{ctg}\tau| \leqslant M) \\
-\dfrac{R(\tau)}{G(\tau)} = \dfrac{\sin\tau + M\cos\tau}{\cos\tau} = \operatorname{tg}\tau + M & & (\operatorname{ctg}\tau \geqslant M) \\
-\dfrac{R(\tau)}{G(\tau)} = \dfrac{\sin\tau - M\cos\tau}{\cos\tau} = \operatorname{tg}\tau - M & & (\operatorname{ctg}\tau \leqslant -M)
\end{array}$$

Следовательно, $\tau \in \sigma(y)$, если $-\operatorname{ctg}\tau \geqslant y$. Пусть τ_y — принадлежащее $[0, \pi]$ значение $\operatorname{arcctg}(-y)$. Тогда $\sigma(y)$ состоит из интервалов $[\tau_y, \pi]$, $[\tau_y+\pi+2\pi], \ldots, \tau_y+\pi(2n-1), 2\pi n)$. Предположим для определенности, что $M>1$. Тогда из определения $\varphi^\circ(t)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
&\varphi^\circ(\tau) = \operatorname{tg}\tau + M && (\operatorname{ctg}\tau \geqslant M)\\
&\varphi^\circ(\tau) = \operatorname{tg}\tau + \operatorname{ctg}\tau && (M \geqslant |\operatorname{ctg}\tau| \geqslant M^{-1})\\
&\varphi^\circ(\tau) = M + \operatorname{ctg}\tau && (M^{-1} \geqslant \operatorname{ctg}\tau \geqslant 0)\\
&\varphi^\circ(\tau) = -M + \operatorname{ctg}\tau && (-M^{-1} \leqslant \operatorname{ctg}\tau < 0)\\
&\varphi^\circ(\tau) = \operatorname{tg}\tau - M && (\operatorname{ctg}\tau < -M)
\end{aligned}
$$

На интервале $[0, \pi]$

$$\psi(\tau, y) = \varphi^\circ(\tau) \quad \text{при } \tau \in [\tau_y, \pi], \qquad \psi(\tau, y) = 0 \quad \text{при } \tau \in [0, \tau_y]$$

пусть

$$\operatorname{ctg}\tau_0 = M, \qquad \operatorname{ctg}\tau_1 = M^{-1} \qquad (\tau_0, \tau_1 \in [0, \pi])$$

Тогда при $y \leqslant -M$

$$
\begin{aligned}
\Phi(y) = 4\pi nm \Bigg\{ &\int_0^{\tau_y} |-\cos\tau + M\sin\tau|\, d\tau + \int_{\tau_y}^{\tau_0} \left| -\frac{1}{\cos\tau} \right| d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left| \frac{1}{\cos\tau} \right| d\tau + \\
&+ \int_{\tau_1}^{\pi/2} |(M + \operatorname{ctg}\tau)(-\sin\tau)|\, d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi-\tau_1} |(-M + \operatorname{ctg}\tau)(-\sin\tau)|\, d\tau + \\
&+ \int_{\pi-\tau_1}^{\pi-\tau_0} \left| -\frac{1}{\cos\tau} \right| d\tau + \int_{\pi-\tau_0}^{\pi} \left| -\frac{1}{\cos\tau} \right| d\tau \Bigg\} = \\
= 4\pi nm \Bigg\{ &\frac{1 - My}{\sqrt{1+y^2}} + 2 - M + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1} \left(\frac{\sqrt{1+M^2}+M}{\sqrt{1+M^2}-M} \right)^2 \right] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Проделав аналогичные вычисления, получаем, что

$$\Phi(y) = 4\pi nm \left\{ \sqrt{1+M^2} + 2 - M + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1} \left(\frac{\sqrt{1+M^2}+M}{\sqrt{1+M^2}-M} \right)^2 \right] \right\} \qquad (-M \leqslant y \leqslant -M^{-1})$$

$$\Phi(y) = 4\pi nm \left\{ \sqrt{1+M^2} + 2 - M - \frac{My+1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+M^2}+M}{\sqrt{1+M^2}-M} \right\} \qquad (-M^{-1} \leqslant y \leqslant 0)$$

$$\Phi(y) = 4\pi nm \left\{ \sqrt{1+M^2} - M + \frac{1-My}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+M^2}+M}{\sqrt{1+M^2}-M} \right\} \qquad (0 \leqslant y \leqslant M^{-1})$$

$$\Phi(y) = 4\pi nm \left\{ \sqrt{1+M^2} - M + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}-1} \right\} \qquad (M^{-1} \leqslant y \leqslant M)$$

$$\Phi(y) = 4\pi nm \left\{ 2\sqrt{1+M^2} - M - \frac{1+My}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}-1} \right\} \qquad (M \leqslant y < \infty)$$

Заметим, что

$$\Phi(B^-) = \Phi(-\infty) = 4\pi nm \left[2 + \ln\frac{\sqrt{1+M^2}+M}{\sqrt{1+M^2}-M} \right]$$

$$\Phi(B^+) = \Phi(\infty) = 8\pi nm \left[\sqrt{1+M^2} - M \right]$$

Поступила 20 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. ДАН СССР, 1946, т. 51, № 5.
2. Гноенский Л. С. Об одном способе оптимизации следящих систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.