КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

И. Б. Челпанов (Ленинград)

Исследование статистических свойств решений дифференциальных уравнений, параметры которых являются случайными функциями времени, представляет собой достаточно сложную задачу. Конечные выражения для статистических характеристик (в частности, для моментов) могут быть получены лишь в тех случаях, когда решение уравнения удается записать в виде явного выражения при произвольной зависимости параметров от времени. Так непосредственно исследуются свойства решений уравнения первого порядка, где коэффициент представляет собой случайную функцию времени, если уравнение интегрируется разделением переменных. Такое исследование для линейного уравнения проведено в работе В. И. Тихонова [1]. Однако уже для уравнения второго порядка, когда коэффициенты представляют собой случайные функции времени, решение в общем виде не может быть записано и непосредственное исследование статистических свойств решений невозможно.

При использовании приближенных методов, основанных на предположениях о медленности изменения параметров, о малости их флюктуаций и т. п., находятся решения для гораздо более широкого класса дифференциальных уравнений и соответственно могут быть оценены их статистические свойства (см., например, [2-5]).

В предлагаемой работе рассматривается уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + [1 + \varepsilon_1 \xi(t)]\, x = 0 \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — случайная функция времени, а ε_1 — малый параметр. Корреляционная функция

$$R(\Delta t) = \overline{\xi(t + \Delta t)\, \xi(t)}$$

считается известной, математическое ожидание $\xi(t)$ принято равным нулю

$$\overline{\xi(t)} = 0$$

В случае периодической функции времени $\xi(t)$ задача представляет собой хорошо исследованную классическую задачу параметрического резонанса (см., например, [6]). Случай, когда $\xi(t)$ — случайная функция, рассмотрен в книге Р. Л. Стратоновича [2]. Некоторые свойства решений в этом случае получены в работах [3,4].

Стандартной заменой переменных

$$z = e^{nt}x, \qquad \tau = t\sqrt{1+n^2}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z = -\varepsilon\xi(\tau)\, z \qquad \left(\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{1+n^2}\right) \tag{2}$$

При этом предполагается, что $n \ll 1$. Так как ε — малый параметр, то решение уравнения близко к гармоническому и его целесообразно искать в форме

$$z(\tau) = a(\tau)\cos\tau + b(\tau)\sin\tau \tag{3}$$

Построим сначала приближенное решение детерминированной задачи, т. е. найдем $a(\tau)$ и $b(\tau)$, считая $\xi(\tau)$ произвольной заданной функцией времени. Используя метод Лагранжа и оперируя с правой частью, как с известной функцией времени, получим следующие выражения для производных функций $a(\tau)$ и $b(\tau)$:

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon\xi(\tau)\, z(\tau)\sin\tau, \qquad \frac{db}{d\tau} = -\varepsilon\xi(\tau)\, z(\tau)\cos\tau \tag{4}$$

После подстановки в правую часть выражения (3) получаем

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon\xi(\tau)(a\sin\tau\cos\tau + b\sin^2\tau) \qquad \frac{db}{d\tau} = -\varepsilon\xi(\tau)(a\cos^2\tau + b\sin\tau\cos\tau) \tag{5}$$

Функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ ищем в виде разложений по степеням ε

$$a(\tau) = a^{(0)}(\tau) + \varepsilon a^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 a^{(2)}(\tau) + \ldots, \quad b(\tau) = b^{(0)}(\tau) + \varepsilon b^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 b^{(2)}(\tau) + \ldots \tag{6}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{da^{(0)}}{d\tau}=0, \qquad \frac{db^{(0)}}{d\tau}=0 \\
\frac{da^{(1)}}{d\tau}=\xi(\tau)\left(a^{(0)}\sin\tau\cos\tau+b^{(0)}\sin^2\tau\right) \\
\frac{db^{(1)}}{d\tau}=-\xi(\tau)\left(a^{(0)}\cos^2\tau+b^{(0)}\sin\tau\cos\tau\right) \\
\frac{da^{(2)}}{d\tau}=\xi(\tau)\left[a^{(1)}(\tau)\sin\tau\cos\tau+b^{(1)}(\tau)\sin^2\tau\right] \\
\frac{db^{(2)}}{d\tau}=-\xi(\tau)\left\{a^{(1)}(\tau)\cos^2\tau+b^{(1)}(\tau)\sin\tau\cos\tau\right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Отсюда

$$
a^{(0)}(\tau)=a^{(0)}\ (=\mathrm{const}), \qquad b^{(0)}(\tau)=b^{(0)}\ (=\mathrm{const})
$$

$$
\begin{gathered}
a^{(1)}(\tau)=a^{(0)}\int_{\tau_0}^{\tau}\xi(\tau_1)\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1+b^{(0)}\int_{\tau_0}^{\tau}\xi(\tau_1)\sin^2\tau_1\,d\tau_1 \\
b^{(1)}(\tau)=-a^{(0)}\int_{\tau_0}^{\tau}\xi(\tau_1)\cos^2\tau_1\,d\tau_1-b^{(0)}\int_{\tau_0}^{\tau}\xi(\tau_1)\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1 \\
a^{(2)}(\tau)=\int_{\tau_0}^{\tau}a^{(1)}(\tau_1)\,\xi(\tau_1)\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1+\int_{\tau_0}^{\tau}b^{(1)}(\tau_1)\,\xi(\tau_1)\sin^2\tau_1\,d\tau_1 \\
b^{(2)}(\tau)=-\int_{\tau_0}^{\tau}a^{(1)}(\tau_1)\,\xi(\tau_1)\cos^2\tau_1\,d\tau_1-\int_{\tau_0}^{\tau}b^{(1)}(\tau_1)\,\xi(\tau_1)\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Далее будут рассматриваться значения $z(\tau)$ и соответственно $a(\tau)$ и $b(\tau)$ через период, т. е. в моменты времени $\tau=0, 2\pi, \ldots, 2\pi(i-1), 2\pi i, \ldots$ Возьмем переход от момента времени $\tau=2\pi(i-1)$ к моменту $\tau=2\pi i$. Пусть

$$
a\,|_{\tau=2\pi(i-1)}=a_{i-1}=a^{(0)}
$$

$$
b\,|_{\tau=2\pi(i-1)}=b_{i-1}=b^{(0)}, \qquad a^{(k)}\,|_{\pi=2\pi(i-1)}=b^{(k)}\,|_{\tau=2\pi(i-1)}=0 \qquad (k=1,2,\ldots)
$$

Тогда

$$
a_i=a\,|_{\tau=2\pi i}=a_i^{(0)}+\varepsilon a_i^{(1)}+\varepsilon^2 a_i^{(2)}+\ldots, \quad b_i=b\,|_{\tau=2\pi i}=b_i^{(0)}+\varepsilon b_i^{(1)}+\varepsilon^2 b_i^{(2)}+\ldots
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
a_i^{(0)}=a_{i-1}, \qquad b_i^{(0)}=b_{i-1} \\
a_i^{(1)}=a_i^{(0)}\int_0^{2\pi}\xi\left[2\pi(i-1)+\tau_1\right]\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1+b_i^{(0)}\int_0^{2\pi}\xi\left[2\pi(i-1)+\tau_1\right]\sin^2\tau_1\,d\tau_1 \\
b_i^{(1)}=-a_i^{(0)}\int_0^{2\pi}\xi\left[2\pi(i-1)+\tau_1\right]\cos^2\tau_1\,d\tau_1-b_i^{(0)}\int_0^{2\pi}\xi\left[2\pi(i-1)+\tau_1\right]\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Рассмотрим статистические свойства решений, когда $\xi(\tau)$ — случайная функция времени. Начальные условия при $\tau=2\pi(i-1)$ также будем считать случайными, причем примем, что математические ожидания a_{i-1} и b_{i-1} равны нулю

$$
\bar{a}_{i-1}=\bar{b}_{i-1}=0 \tag{10}
$$

Очевидно, что в этом случае получим

$$
\bar{a}_i=\bar{b}_i=0 \tag{11}
$$

что останется справедливым, таким образом, при любом i. Для вторых корреляционных моментов a_i и b_i, осредняя по множеству, находим

$$\begin{aligned}\overline{a_i^2} &= \overline{a_i^{(0)2}} + 2\varepsilon\overline{a_i^{(0)}a_i^{(1)}} + \varepsilon^2(\overline{a_i^{(1)2}} + 2\overline{a_i^{(0)}a_i^{(2)}}) + \ldots\\ \overline{b_i}^2 &= \overline{b_i^{(0)2}} + 2\varepsilon\overline{b_i^{(0)}b_i^{(1)}} + \varepsilon^2(\overline{b_i^{(1)2}} + 2\overline{b_i^{(0)}b_i^{(2)}}) + \ldots\\ \overline{a_ib_i} &= \overline{a_i^{(0)}b_i^{(0)}} + \varepsilon(\overline{a_i^{(0)}b_i^{(1)}} + \overline{b_i^{(0)}a_i^{(1)}}) + \varepsilon^2(\overline{a_i^{(0)}b_i^{(2)}} + \overline{a_i^{(1)}b_i^{(1)}} + \overline{b_i^{(0)}a_i^{(2)}})\end{aligned}\tag{12}$$

Начальные условия для данного этапа $a_i^{(0)}$ и $b_i^{(0)}$ и коэффициенты $a_i^{(k)}$ и $b_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не будут, вообще говоря, некоррелированными. В дальнейшем будем, считать, что интервал корреляции $\xi(\tau)$ значительно меньше периода. Имея в виду (11), получим

$$\overline{a_i^{(0)}a_i^{(1)}} = \overline{a_i^{(0)}}\,\overline{a_i^{(1)}} = 0 \tag{13}$$

Следовательно, система уравнений (12) может быть записана в форме

$$\overline{a_i}^2 = \overline{a_i^{(0)2}} + \varepsilon^2\overline{a_i^{(1)2}} + 2\overline{a_i^{(0)}a_i^{(2)}})+ \ldots, \qquad \overline{b_i}^2 = \overline{b_i^{(0)2}} + \varepsilon^2(\overline{b_i^{(1)2}} + 2\overline{b_i^{(0)}b_i^{(2)}}) + \ldots$$

$$\overline{a_ib_i} = \overline{a_i^{(0)}b_i^{(0)}} + \varepsilon^2(\overline{a_i^{(0)}b_i^{(2)}} + \overline{a_i^{(b)}b_i^{(1)}} + \overline{b_i^{(0)}b_i^{(2)}}) + \ldots \tag{14}$$

Если сохранить слагаемые только второго порядка относительно ε, то в развернутой форме эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\overline{a_i}^2 &= (1 + \varepsilon^2 J_1)\overline{a_{i-1}^2} + \varepsilon^2 J_2\overline{b_{i-1}^2} + \varepsilon^2 J_3\overline{a_{i-1}b_{i-1}}\\ \overline{b_i}^2 &= \varepsilon^2 J_4\overline{a_{i-1}^2} + (1 + \varepsilon^2 J_1)\overline{b_{i-1}^2} + \varepsilon^2 J_5\overline{a_{i-1}b_{i-1}}\\ \overline{a_ib_i} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^2 J_5\overline{a_{i-1}^2} + -\frac{1}{2}\varepsilon^2 J_3\overline{b_{i-1}^2} + (1 + \varepsilon^2 J_6)\overline{a_{i-1}b_{i-1}}\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь

$$J_1 = 3J'_1 - 2J'_6, \qquad J'_1 = \int_0^{2\pi}\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\sin\tau_2\cos\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2$$

$$J_6 = J'_1 - 3J'_6, \qquad J_2 = \int_0^{2\pi}\sin^2\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\sin^2\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2$$

$$J_3 = 2\int_0^{2\pi}\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\sin^2\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2$$

$$J_4 = \int_0^{2\pi}\cos^2\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\cos^2\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2, \qquad J_6' = \int_0^{2\pi}\sin^2\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\cos^2\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2$$

$$J_5 = 2\int_0^{2\pi}\sin\tau_1\cos\tau_1\,d\tau_1\int_0^{2\pi}\cos^2\tau_2 R(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2 \tag{16}$$

Уравнения (15) представляют собой систему уравнений в конечных разностях относительно корреляционных моментов $\overline{a_i}^2$, $\overline{b_i}^2$ и $\overline{a_ib_i}$. Так как $\xi(\tau)$ — стационарная случайная функция, то $J_1, \ldots, J_6$ не зависят от i. Решение в этом случае ищется в форме [7]

$$\overline{a_i}^2 = \eta\overline{a_{i-1}^2}, \qquad \overline{b_i}^2 = \eta\overline{b_{i-1}^2}, \qquad \overline{a_ib_i} = \eta\overline{a_{i-1}b_{i-1}} \tag{17}$$

Характеристические показатели η_1, η_2 и η_3 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} -\eta + 1 + \varepsilon^2 J_1 & \varepsilon^2 J_2 & \varepsilon^2 J_3\\ \varepsilon^2 J_4 & -\eta + 1 + \varepsilon^2 J_1 & \varepsilon^2 J_5\\ -\frac{1}{2}\varepsilon^2 J_5 & -\frac{1}{2}\varepsilon^2 J_3 & -\eta + 1 + \varepsilon^2 J_6\end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Заметим, что если отбросить слагаемые второго порядка малости (с множителем ε^4), то окажется, что $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1$, т. е. $\xi(\tau)$ не влияет на устойчивость системы, описываемой уравнением (2). Это же следует из формул Р. Л. Стратоновича [2]: если $\xi(\tau)$ не представляет собой узкополосный сигнал с медленно или мало меняющейся фазой, то с точностью до первого порядка демпфирование не меняется.

В рассматриваемом случае (с точностью до второго порядка) получится $\eta_1 \neq \eta_2 \neq \eta_3 \neq 1$. Статистические свойства решений уравнения (1) определяются преобразованными характеристическими показателями

$$\xi = \eta \exp\left(-\frac{2\pi n}{\sqrt{1+n^2}}\right) \approx \eta(1-2\pi n) \tag{19}$$

Для устойчивости необходимо, чтобы все $|\zeta_i| < 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Доведем вычисления до конца, когда корреляционная функция переменной $\xi(\tau)$ имеет вид

$$R(\Delta\tau) = e^{-\beta|\Delta\tau|} \tag{20}$$

Вычисляя интегралы (16), получаем

$$\begin{aligned}
J_1' &= \frac{1}{2(\beta^2+4)}\left[\pi\beta + \frac{4}{\beta^2+4}(1-e^{-2\pi\beta})\right]\\
J_2 &= \frac{1}{2\beta(\beta^2+4)}\left[\pi(3\beta^2+8) - \frac{16}{\beta(\beta^2+4)}(1-e^{-2\pi\beta})\right]\\
J_3 &= -\frac{2}{\beta^2+4}\left[\pi + \frac{4}{\beta^2}(1-e^{-2\pi\beta})\right]\\
J_4 &= \frac{1}{2\beta(\beta^2+4)}\left[\pi(3\beta^2+8) - \frac{4(\beta^2+2)^2}{\beta(\beta^2+4)}(1-e^{-2\pi\beta})\right]\\
J_5 &= \frac{2}{\beta^2+4}\left[\pi - \frac{2(\beta^2+2)}{\beta^2+4}(1-e^{-2\pi\beta})\right]\\
J_6' &= \frac{1}{2\beta}\left[\pi - \frac{8(\beta^2+2)}{\beta(\beta^2+4)^2}(1-e^{-2\pi\beta})\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

Как ранее указывалось, интервал корреляции $\xi(\tau)$ считается малым, т. е. $\beta \gg 1$. Поэтому в выражениях (21) оставим слагаемые только первого порядка малости относительно β^{-1}. Тогда получим

$$J_1 \approx \frac{\pi}{2\beta}, \qquad J_2 \approx J_4 \approx \frac{3\pi}{2\beta}, \qquad J_6 \approx -\frac{\pi}{\beta}, \qquad J_3 = J_5 \approx 0 \tag{22}$$

Легко видеть, что при этом последнее уравнение системы (15) отделяется. Соответствующий характеристический показатель оказывается равным

$$\eta_1 \approx 1 - \varepsilon^2\frac{\pi}{\beta} \tag{23}$$

Два другие уравнения системы (15) остаются связанными. Для них получаем

$$\eta_{2,3} \approx 1 + \varepsilon^2\frac{\pi}{2\beta}(1 \pm \sqrt{3}) \tag{24}$$

Наибольший по абсолютной величине преобразованный характеристический показатель

$$\xi_3 \approx 1 - 2\pi n + \varepsilon^2\frac{2\pi}{2\beta}(1+\sqrt{3}) \tag{25}$$

определяет статистическую устойчивость решений исходного уравнения (1):

при $\xi_3 < 1$, т. е. при $n\beta\varepsilon^{-2} > 0.68$ среднеквадратичное значение амплитуды убывает, и решения статистически устойчивы;

при $\xi_3 > 1$, т. е. при $n\beta\varepsilon^{-2} < 0.68$ среднеквадратичное значение амплитуды неограниченно возрастает и решения неустойчивы.

Отметим, что для преобразованного характеристического показателя, соответствующего взаимному корреляционному моменту $\overline{a_i b_i}$, имеем всегда, независимо от того, выполнено ли условие устойчивости или нет

$$\xi_1 = 1 - 2\pi n - \varepsilon^2\frac{\pi}{\beta} < 1$$

Это означает, что корреляция между ортогональными составляющими со временем уменьшается, т. е. для достаточно большого времени фаза становится равновероятной, вне зависимости от ее начального распределения.

Поступила 6 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Т и х о н о в В. И. Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы. Автоматика и телемеханика, 1958, т. 19, № 8.
2. С т р а т о н о в и ч Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Изд-во Сов. радио, 1961.
3. Д ь я к о в Ю. Е. Вынужденные колебания контура со случайно меняющейся емкостью. Радиотехника и электроника, 1960, т. V, № 5.
4. С т р а т о н о в и ч Р. Л. и Р о м а н о в с к и й Ю. М. Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы. Науч. докл. высш. школы, физ.-матем. науки, 1958, № 3.
5. B e r t r a m I. E., S a r a c h i k P. E. Stability of systems with time — variing parameters. IRE Transactions on cirquits theory, 1959, vol CT-6, spec. suppl.
6. Х а я с и Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Физматгиз, 1957.
7. Г е л ь ф о н д А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.

К ОПТИМИЗАЦИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

Л. С. Г н о е н с к и й (Москва)

Пусть уравнение

$$L_n(y) \equiv a_0(t)\,y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,y = f(t) + c(t)\,f'(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \ldots y^{(n-1)}(0) = f(0) = 0 \tag{2}$$

описывает следящую систему, на вход которой для улучшения ее качества наряду с управляющим воздействием $f(t)$ подается его производная $f'(t)$, усиливаемая переменным коэффициентом усиления $c(t)$. Предполагается, что поступающая на вход следящей системы функция $f(t)$ отфильтрована от высокочастотных шумов и помех. Относительно $f(t)$ известно лишь, что

$$|f'(t)| \leqslant m \tag{3}$$

и $f'(t)$ на конечном интервале времени имеет конечное число точек разрыва.

Функция $c(t)$ должна удовлетворять ограничению

$$|c(t)| \leqslant M \tag{4}$$

Через $\delta(t, f(\tau), c(\tau))$ обозначим рассогласование $y(t) - f(t)$.

Предположим, что в фиксированный момент времени T модуль рассогласования при любом $f'(t)$ из (3) не должен превосходить заданной величины т. е.

$$\sup_f |\delta(T, f(t), c(t))| \leqslant A, \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T] \tag{5}$$

и пусть выполняется неравенство

$$\begin{gathered} \inf_c \sup_f |\delta(T, f(t), c(t))| = A^\circ < A \\ |c(t)| \leqslant M, \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T] \end{gathered} \tag{6}$$

Сформулируем теперь задачу. Из множества интегрируемых функций $c(t)$, удовлетворяющих условиям (4), (5), требуется найти функцию $c_{\min}(t)$, на которой реализуется

$$\inf_c \sup_f |\delta_T'(T, f(t), c(t))| \qquad |f'(t)| \leqslant m, \qquad t \in [0, T]$$

В момент времени T достигается наибольшая возможная в данных условиях степень близости первого порядка между $y(T)$ и $f(T)$ при любом $f(t)$ из (3).

Рассматриваемая задача непосредственно связана с методом накопления возмущения Б. В. Булгакова [1], так как относительно $f(t)$ известно лишь условие [3].