При кратных корнях уравнения (2.13) и $K \neq 0$ решение ищем в виде (4.1) при $l = 2$.

$$x^{(k)}(t) = x_0(t) + x_{1/2}^{(k)}(t)\,\mu^{1/2} + x_1^{(k)}(t)\,\mu + \ldots$$

где

$$x_{1/2}^{(k)}(t) = 0$$

$$x_1^{(k)}(t) = \dot{a}\cos mt + \frac{1}{m}(M_{10} + aM_{01})\sin mt + C_1(t) \qquad \text{и т. д.}$$

Вещественных разложений (4.1) нет, если:

1) не имеет места условие (2.11);

2) имеет место один из следующих случаев: либо корни уравнения (2.13) комплексны, либо при $a_1 = a_2$ выражение $N_{02}K > 0$.

При двукратных корнях уравнений (1.5) имеем неединственные представления решений в виде (4.1). В каждом случае существуют два периодических решения, отвечающих двум кратным корням уравнений основных амплитуд. Можно говорить о бифуркации решения порождающего уравнения.

Все полученные ряды (4.1) сходятся при малых значениях параметра μ. В работе не рассмотрен вопрос устойчивости полученных периодических решений.

Поступила 22 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
3. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. ГИТТЛ, 1936.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАЦИОНАРНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ АРГУМЕНТА МЕТОДОМ ХИЛЛА

К. Г. Валеев (Ленинград)

Показано, что метод Хилла [1] может быть применен к исследованию решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Изложение ведется на примере дифференциального уравнения второго порядка с сосредоточенными запаздываниями. Изложенный метод легко обобщается для системы m уравнений n-го порядка с сосредоточенными и непрерывно распределенными стационарными запаздываниями аргумента.

1. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sum_{k=0}^{s}\sum_{q=-l}^{l} a_{kq}e^{-iqt}y(t-\tau_k) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь a_{kq} — комплексные числа, τ_k — вещественные числа

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \tau_s \leqslant h,$$

l — конечное число, $l > 0$. Ищем при $t > 0$ решение $y(t)$ с начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t) \quad (h \leqslant t < 0), \qquad y(0) = y_0^{(0)}, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_0^{(1)} \tag{1.2}$$

Функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируемая на $h \leqslant t < 0$.

Пусть $f(p)$ — изображение по Лапласу [2] решения уравнения (1.1) $y(t)$ с начальными условиями (1.2).

Умножая (1.1) на e^{-pt} и интегрируя по t в пределах от 0 до $+\infty$, получим разностное уравнение для отыскания $f(p)$

$$p^2 f(p) + \sum_{q=-l}^{l} b_q(p+qi) f(p+qi) = \psi(p) \tag{1.3}$$

Здесь

$$b_q(p) = \sum_{k=0}^{s} a_{kq}\, e^{-\tau_k p}, \qquad \psi(p) = p y_0^{(0)} + y_0^{(1)} - \sum_{q=-l}^{l} \psi_q(p+qi) \tag{1.4}$$

$$\psi_q(p) = \sum_{k=1}^{s} a_{kq} \int_{-\tau_k}^{0} \psi(\tau)\, e^{-p(\tau+\tau_k)}\, d\tau \tag{1.5}$$

Функции $b_q(p)$ (1.4) ограничены в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant c = \text{const}$. Подставим $(p+ki)$ в (1.3) вместо p и поделим получившееся разностное уравнение на $-k^2$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $f(p+ki)$

$$-k^{-2} f(p+ki) - \sum_{q=-l}^{l} k^{-2} b_q(p+(k+q)i) f(p+(k+q)i) = -k^{-2}\psi(p+ki) \tag{1.6}$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Комплексная переменная p в (1.6), (1.3) рассматривается как параметр. Решая систему уравнений (1.3), (1.6) по формулам Крамера, получим

$$f(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -[(p+i)^2 + b_0(p+i)] & -\psi(p+i) & -b_{-2}(p-i) & \cdot \\ \cdot & b_1(p+i) & \psi(p) & b_{-1}(p-i) & \cdot \\ \cdot & -b_2(p+i) & -\psi(p-i) & -[(p-i)^2 + b_0(p-i)] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

Здесь $\Delta(p)$ обзначает бесконечный определитель системы (1.3), (1.6)

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -[(p+i)^2 + b_0(p+i)] & -b_{-1}(p) & -b_{-2}(p-i) & \cdot \\ \cdot & b_1(p+i) & p^2 + b_0(p) & b_{-1}(p-i) & \cdot \\ \cdot & -b_2(p+i) & -b_1(p) & -[(p-i)^2 + b_0(p-i)] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Можно показать, что определитель $\Delta(p)$ (1.8) сходится абсолютно и равномерно [3] в любой конечной области Σ комплексной плоскости p. Произведение диагональных элементов $A(p)$ определителя $\Delta(p)$ можно представить в виде

$$A(p) = [p^2 + b_0(p)] \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2ip}{k} - \frac{p^2 + b_0(p+ki)}{k^2}\right)\left(1 + \frac{2ip}{k} - \frac{p^2 + b_0(p-ki)}{k^2}\right) \tag{1.9}$$

Сумма всех недиагональных элементов определителя $\Delta(p)$ (1.8) мажорируется сходящимся рядом

$$\left| \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{q=-l \\ q\neq 0}}^{l} -k^{-2} b_q(p+(k+q)i) \right| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{q=-l}^{l} \left| a_{kq} \right| \max_{p\in\Sigma} \left| e^{-\tau_k p} \right| \tag{1.10}$$

Из (1.9), (1.10) следует абсолютная сходимость определителя $\Delta(p)$ (1.8) при $p \in \Sigma$, аналогично определителя в (1.7). Если в (1.7), (1.8) взять определители конечного порядка, то получим приближенное решение $f(p)$. Его оригинал будет являться приближенным решением уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2).

2. Рассмотрим аналитические свойства определителя $\Delta(p)$ (1. 8). Из предыдущего следует, что $\Delta(p)$ является целой функцией p, а также целой функцией параметров a_{kq}, τ_k (1.1). Центральный элемент $c(p)$ определителя $\Delta(p)$

$$c(p) = p^2 + \sum_{k=0}^{s} a_{k0}\, e^{-\tau_k p} \tag{2.1}$$

будет целой функцией p. Эта функция не имеет нулей при $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$, если α достаточно большое число. Произведение уравнения диагональных элементов $A(p)$ (1.9) есть периодическая функция p с периодом i, так как

$$A(p+i) = c(p+i)\lim_{r\to\infty}\prod_{\substack{k=-r\\k\neq 0}}^{s}[-k^{-2}c(p+(k+1)i] = c(p)\lim_{r\to\infty}\prod_{\substack{k=-r\\k\neq 0}}^{r}[-k^{-2}c(p+$$

$$+ki)[\lim\frac{c(p+(r+1)i)}{c(p-ri)} = A(p) \qquad (2.2)$$

Введем обозначение

$$c_q(p) = b_q(p+qi)[p^2+b_0(p)]^{-1} \qquad (2.3)$$

Если из каждой строки определителя (1.8) вынесем диагональный элемент за знак определителя, то получим

$$\Delta(p) = D(p)A(p) \qquad (2.4)$$

где $D(p)$ — новый сходящийся определитель

$$D(p) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & c_{-1}(p+i) & c_{-2}(p+i) & \cdot \\ \cdot & c_1(p) & 1 & c_{-1}(p) & \cdot \\ \cdot & c_2(p-i) & c_1(p-i) & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

Очевидна периодичность определителя $D(p)$ с периодом i.

Таким образом установлена теорема.

Теорема 2. 1. Определитель Хилла $\Delta(p)$ (1.8), составленный для дифференциального уравнения (1. 1) с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента является целой периодической функцией p с периодом i.

Из (2.5), (2.3), (1.4) следует, что $D(p)\to 1$ при $\operatorname{Re} p\to+\infty$. Так как $b_0(p)\to a_{00}$ (1.4) при $\operatorname{Re} p\to+\infty$, то, удерживая наибольший по модулю член, получаем асимптотическое выражение для $A(p)$ (1. 9) при $\operatorname{Re} p\to+\infty$ (2.6)

$$A(p)\sim(p^2+a_{00})\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}[-k^{-2}((p+ki)^2+a_{00})] = \frac{1}{2\pi^2}(\operatorname{ch}2\pi p-\operatorname{ch}2\pi\sqrt{-a_{00}})\sim\frac{e^{2\pi p}}{4\pi^2}$$

В частном случае, когда запаздывания τ_k (1. 1) кратны 2π, функция $b_0(p)$ (1.4) будет периодична с периодом i и получаем при $\operatorname{Re} p\to+\infty$

$$A(p) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\operatorname{ch}2\pi p-\operatorname{ch}2\pi\left(-\sum_{k=0}^{s}a_{k0}\exp\{-\tau_k p\}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{e^{2\pi p}}{4\pi^2}+Q(1) \qquad (2.7)$$

Сделаем в определителе $\Delta(p)$ (1. 8) замену

$$\rho = \exp\{-2\pi p\} \qquad (2.8)$$

В силу периодичности определителя $\Delta(p)$ функция

$$\Phi(\rho) = \rho\Delta\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\rho\right)4\pi^2 = 1+O(\rho), \qquad \rho\to 0 \qquad (2.9)$$

является однозначной функцией, не имеющей полюсов на конечном расстоянии, т. е. целой функцией ρ. Из теоремы Вейерштрасса ([2], стр. 407) имеем

$$\Phi(\rho) = \exp(g(\rho))\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\rho}{\rho_n}\right)\exp\left\{\frac{\rho}{\rho_n}+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\rho_n^2}+\ldots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{\rho}{\rho_n}\right)^{k_n}\right\} \qquad (2.10)$$

Здесь $g(\rho)$ — целая функция ρ, $g(0)=0$, ρ_n — нули $\Phi(\rho)$, при $n\to\infty$, k_n — некоторые целые числа, обеспечивающие сходимость (2. 10). Обозначим $p_j = -0{,}5\pi^{-1}\ln\rho_j$, получим из (2. 10), (2. 9) общий вид аналитического представления $\Delta(p)$ (1.8)

$$\Delta(p) = 0{,}25\pi^{-2}\exp\{2\pi p\}\exp[g(\exp\{-2\pi p\})]\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}(1-\exp\{2\pi(p_j-p)\})\exp\{2\pi(p_j-p)\}+\ldots+\frac{1}{k_n}\exp\{2\pi k_n(p_j-p)\}\} \qquad (2.11)$$

$$g(\rho) = g_1\rho+g_2\rho^2+g_3\rho^3+\ldots+, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|g_n|} = 0, \qquad \operatorname{Re} p_n\to-\infty \quad \text{при } n\to\infty \qquad (2.12)$$

Определение поведения чисел p_n, g_n при $n\to\infty$ пока нерешенная задача.

3. Оценка чисел p_n, которые будем называть характеристическими показателями решений уравнения (1.1), будет решающей при исследовании устойчивости, решений уравнения (1.1). Из теоремы 2.1 следует, что изображение $f(p)$ решения $y(t)$ (1.7) является мероморфной функцией p с полюсами в точках

$$p_{nk} = p_n + ki \qquad (n = 1,2,\dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{3.1}$$

Отыскиваем оригинал $y(t)$, используя формально теорему разложения ([2], стр. 483), получаем теорему.

Теорема 3.1. Решение $y(t)$ уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) всегда может быть разложено в формальный ряд вида

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t), \qquad y_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\beta_{nk}^{(0)} + \beta_{nk}^{(1)} t + \dots + \beta_{nk}^{(r_n)} t^{r_n}) e^{(p_n+ki)t} \tag{3.2}$$

где r_n+1 — кратность нуля p_n определителя $\Delta(p)$ (1. 8). Рассмотрим ряд для $y_n(t)$ (3.2). Подставляя $y_n(t)$ в (1.1), можно убедиться, что $y_n(t)$ является решением (1.1).

Уравнения для $\beta_{nk}^{(r)}$ будут удовлетворены в силу того, что уравнения (1.3), (1. 6) удовлетворяются для $f(p)$, имеющей полюсы в p_{nk} (3.1) порядка r_n+1.

Поэтому $y_n(t)$ является целой функцией t, и ряд для $y_n(t)$ (3.2) сходится абсолютно и равномерно при конечных значениях t. Отсюда следует асимптотический характер ряда (3.2). Окончательно получаем теорему.

Теорема 3.2. Решение $y(t)$ уравнения (1.1) с наличными условиями (1.2) всегда может быть разложено в асимптотический при $t \to +\infty$ ряд вида

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{p_n t} (\alpha_n^{(0)}(t) + \alpha_n^{(1)}(t)\, t + \dots + \alpha_n^{(r_n)}(t)\, t^{r_n}) \tag{3.3}$$

Здесь $\alpha_n^{(r)}(t + 2\pi) \equiv \alpha_n^{(r)}(t)$, $\operatorname{Re} p_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$, при этом r_n+1 — кратность нуля p_n определителя $\Delta(p)$ (1. 8). Предполагая, без ограничения общности $\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \operatorname{Re} p_3 \geqslant \dots$ имеем для $y(t)$ при $\operatorname{Re} p^* < \operatorname{Re} p_{k+1}$

$$\lim_{t\to\infty} \left| y(t) - \sum_{n=1}^{k} y_n(t) \right| \exp\{p^* t\} = 0 \tag{3.4}$$

Теорема 3.2 позволяет судить об устойчивости решений (1.1), зная p_n — нули определителя $\Delta(p)$. Она может быть обобщена для системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента, например [3]. Для отыскания характеристических показателей p_n можно использовать условия существования решения $y(t)$ уравнения (1.1) вида

$$y(t) = e^{pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ikt} \tag{3.5}$$

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение Матье с запаздыванием

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda y(t) + 2\mu y(t-\tau) \cos 2t = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $\lambda, \mu \geqslant 0, \tau \geqslant 0$ — вещественные параметры. Уравнение (1.3) принимает вид

$$(p^2 + \lambda) f(p) + \mu e^{-(p+2i)\tau} f(p+2i) + \mu e^{-(p-2i)\tau} f(p-2i) = \psi(p) \tag{4.2}$$

Решение разностного уравнения вида (4.2) дано в ([4], стр. 983).

Из определителя $\Delta(p)$ получено уравнение [4]

$$f_0(p) - s(p) - h(p) = 0 \tag{4.3}$$

где введены обозначения ([4], стр. 984)

$$f_0(p) = p^2 + \lambda, \qquad f_1(p) = f_{-1}(p) = \mu e^{-p\tau}, \qquad \omega = 2i \tag{4.4}$$

$$s(p) = \cfrac{f_1(p+\omega) f_{-1}(p)}{f_0(p+\omega) - \cfrac{f_1(p+2\omega) f_{-1}(p+\omega)}{f_0(p+2\omega) - \dots}}, \qquad h(p) = \cfrac{f_{-1}(p-\omega) f_1(p)}{f_0(p+\omega) - \cfrac{f_{-1}(p-2\omega) f_1(p-\omega)}{f_0(p-2\omega) - \dots}} \tag{4.5}$$

Для уравнения (4.1) при $\lambda \neq k^2 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ уравнение (4.3) принимает вид

$$p^2 + \lambda - \frac{\mu^2 e^{-2\tau(p+i)}}{(p+2i)^2 + \lambda} - \frac{\mu^2 e^{-2\tau(p-i)}}{(p-2i)^2 + \lambda} + O(\mu^4) = 0 \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.6) находим характеристический показатель p, близкий к $i\sqrt{\lambda}$ при малых значениях μ

$$p = i\sqrt{\lambda} + i\frac{\mu^2}{4\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}(\cos 2\tau\sqrt{\lambda}\cos 2\tau + \sqrt{\lambda}\sin 2\tau \sin 2\tau\sqrt{\lambda}) +$$
$$+ \frac{\mu^2}{4\sqrt{\lambda}(1-\lambda)}(\sin 2\tau\sqrt{\lambda}\cos 2\tau - \sqrt{\lambda}\cos 2\tau\sqrt{\lambda}\sin 2\tau) + O(\mu^4) \tag{4.7}$$

Если запаздывание $\tau > 0$ достаточно мало, то

$$\operatorname{Re} p = -\frac{2}{3}\mu^2\tau^3 + O(|\mu^2\tau^5| + |\mu^4|) \tag{4.8}$$

Решения уравнения (4.1) будут асимптотически устойчивы при достаточно малых значениях $\mu > 0$, $\tau > 0$ и $\lambda \neq k^2 (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Пусть $\lambda = 0.25$, из (4.7) получаем

$$\operatorname{Re} p = -\frac{2}{3}\mu^2 \sin^3\tau + O(\mu^4) \tag{4.9}$$

При больших запаздываниях $\tau > 0$, $(2n+1)\pi < \tau < (2n+2)\pi$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и достаточно малых значениях $\mu > 0$ решения уравнения (4.1) неустойчивы.

5. Для исследования резонанса $\lambda = k^2 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ в уравнении (4.1) используем лемму.

Лемма 5.1. Пусть $\varphi(p, \mu)$ — голоморфная функция μ, p при $|\mu| < \varepsilon$, $|p| < \varepsilon$. Рассматривается уравнение

$$\varphi(p, \mu) \equiv a_0(\mu) + a_1(\mu)p + a_2(\mu)p^2 + a_3(\mu)p^3 + \ldots = 0 \tag{5.1}$$

$$O(a_0) = O(\mu^2), \quad O(a_1) = (\mu), \quad O(a_n) = O(1) \quad (n = 2, 3, \ldots), \quad a_2(\mu) > 0$$

Если известно, что два наименьших по модулю корня p_1, p_2 уравнения (5.1) комплексно сопряжены, то необходимым и достаточным условием отрицательности $\operatorname{Re} p_1$, $\operatorname{Re} p_2$ будут неравенства

$$\varphi(0, \mu) = a_0(\mu) > 0 \tag{5.2}$$

$$a_1 - \frac{a_0a_2a_3}{a_2^2 - a_1a_3} + \frac{a_0a_2a_4(a_1a_2 - a_0a_3)}{(a_2^2 - a_1a_3)^2} + O(\mu^4) > 0 \tag{5.3}$$

Доказательство леммы следует из теоремы Вейерштрасса ([5], стр. 9) выделением из $\varphi(p, \mu)$ (5.1) множителя — квадратной функции p — и применением условий Гурвица ([2], стр. 427).

Пример 5.1. Определим условия устойчивости решений (4.1) при $\mu \approx 0$, $\lambda \approx 0$. Применяя к уравнению (4.6) лемму 5.1, получим, учитывая члены порядка меньше чем $O(\mu^6 + \mu^4|\lambda| + \lambda^2\mu^2)$ условия, устойчивости при малых значениях $|\mu|$, $|\lambda|$

$$\lambda + 0.5\mu^2\cos 2\tau + 0.125\mu^2\lambda\cos 2\tau + \frac{\mu^4}{128}\cos 8\tau > 0 \tag{5.4}$$

$$\mu^2\left[\left(-\tau - \tau\lambda + \frac{2}{3}\tau^3\lambda\right)\cos 2\tau + \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \lambda\tau^2\right)\sin 2\tau\right] + \mu^4\left[\left(-\frac{\tau}{4} - \frac{\tau^3}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\tau}{4} - \frac{\tau^3}{3}\right)\cos 4\tau + \left(-\frac{1}{32} + \frac{\tau^2}{2}\right)\sin 4\tau - \frac{\tau}{32}\cos 8\tau + \frac{5}{256}\sin 8\tau\right] > 0 \tag{5.5}$$

Условие (5.4) при $\tau = 0$ переходит в условие устойчивости уравнения Матье. Условие (5.5) является вторым неочевидным условием устойчивости. При малых значениях $\tau > 0$ оно принимает вид

$$\frac{4}{3}\mu^2\tau^3 + O(|\mu^2\tau^5| + |\mu^2\lambda| + |\mu^4|) > 0 \tag{5.6}$$

и автоматически выполняется.

Пример 5.2. Найдем условие устойчивости решений уравнения (4.1) при малых значениях $|\lambda - 1|$, $|\mu|$.

Уравнение (4.3) перепишем в более удобной форме $(2i = \omega)$

$$[f_0(p) - s(p)][f_0(p-2i) - h(p-2i)] = f_{-1}(p-2i)f_1(p) \tag{5.7}$$

После подстановки (4.4) уравнение (5.7) принимает вид

$$\left[p^2+\lambda-\frac{\mu^2 e^{-2\tau(p+i)}}{(p+2i)^2+\lambda}-\frac{\mu^4 e^{-4\tau(p+2i)}}{[(p+2i)^2+\lambda]^2\,[(p+4i)^2+\lambda]}+O(\mu^6)\right]\left[(p-2i)^2+\lambda-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu^{2}e^{-2\tau(p-3i)}}{(p-4i)^2+\lambda}-\frac{\mu^4 e^{-4\tau(p+4i)}}{[(p-4i)^2+\lambda]^2\,[(p-6i)^2+\lambda]}+O(\mu^6)\right]=\mu^2 e^{-2\tau(p-i)} \qquad (5.8)$$

Положив в (5.8) $p=i+z$. Разлагая (5.8) по степеням z и применив лемму 5.1, получаем неравенства

$$\left(\lambda-1+\frac{\mu^2\cos 4\tau}{9-\lambda}+\frac{\mu^4\cos 12\tau}{1536}\right)^2+\frac{\mu^4\sin^2 4\tau}{64}>\mu^2+O(\mu^6+\mu^4\,|\,\lambda-1\,|) \qquad (5.9)$$

$$\frac{4}{3}\mu^2\tau^3+O(\mu^2(\lambda-1)^2+\mu^2\tau^5+\mu^4)>0 \qquad (5.10)$$

Пример 5.3. Исследуем устойчивость уравнения Матье с запаздыванием и трением

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\mu c\frac{dy(t)}{dt}+\lambda y(t)+2\mu\cos 2t\; y(t-\tau)=0, \qquad c>0 \qquad (5.11)$$

при достаточно малых значениях $|\,\lambda-1\,|$, $|\,\mu\,|$. Для нахождения характеристических показателей пригодно уравнение (5.7), где следует положить

$$f_0(p)=p^2+\mu cp+\lambda, \qquad f_1(p)=f_{-1}(p)=\mu e^{-p\tau}, \qquad \omega=2i \qquad (5.12)$$

Уравнение (5.7) принимает вид

$$\left[p^2+\mu cp+\lambda-\frac{\lambda^2 e^{-2\tau(p+i)}}{(p+2i)^2+\mu c(p+2i)+\lambda}+O(\mu^4)\right]\left[(p-2i)^2+\mu c(p-2i)+\lambda-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu^2 e^{-2\tau(p-3i)}}{(p+4i)^2+\mu c(p+4i)+\lambda}+O(\mu^4)\right]=\mu^2 e^{-2\tau(p-i)} \qquad (5.13)$$

Разлагая уравнение (5.13) по степеням $z=p-i$ и применяя лемму 5.1, получим условия устойчивости

$$\left(\lambda-1+\frac{\mu^2\cos 4\tau}{8}\right)^2+\mu^2\left(c-\frac{\mu}{8}\sin 4\tau\right)^2>\mu^2+O(\mu^4+\mu^3\,|\lambda-1\,|) \qquad (5.14)$$

$$\mu c+\frac{4}{3}\mu^2\tau^3+O(\mu^3+\mu^2\tau^5+\mu^2(\lambda-1)^2>0 \qquad (5.15)$$

6. При определении характеристических показателей удобно сделать преобразование бесконечного определителя Хилла (1.8), (2.5) в определитель конечного порядка, как это указано в [6]. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\lambda y(t)+2\mu\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kty(t-\tau_k)=0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|<\infty, \qquad h<\tau_k\leqslant 0 \quad (6.1)$$

Разностное уравнение для $f(p)$ (1.3) имеет вид

$$(p^2+\lambda)f(p)+\mu\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(e^{-\tau_k(p+ki)}f(p+ki)+e^{-\tau_k(p-ki)}f(p-ki)=\psi(p)\right. \qquad (6.2)$$

Пусть $|\,\lambda\,|\ll 1$, $|\,\mu\,|\ll 1$. При $\mu=0$ полюсы $f(p)$ в $\pm\sqrt{-\lambda}$. Поэтому можно искать нули определителя $\Delta(p)$ (1.8) в области Σ

$$|\,\lambda\,|<\varepsilon, \quad |\,\mu\,|<\varepsilon, \quad |\,p\,|<\varepsilon \qquad (6.3)$$

Вынесем из всех строк определителя $\Delta(p)$ диагональные элементы за знак определителя, за исключением центральной строки. При малых значениях $\varepsilon>0$ диагональные элементы $-k^{-2}[(\rho+ki)^2+\lambda]$ $(k\neq 0)$ не имеют нулей в области (6.3), поэтому оставшийся определитель $\operatorname{Det} D_1(p)$ с матрицей $D_1(p)$ сходится в (6.3)) Имеем

$$D_1(p)=\left\|\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & c_{-2}(p+i) & c_{-2}(p+i) & \cdot\\ \cdot & \mu a_1\exp\{-\tau_1(p+i)\} & p^2+\lambda & \mu a_1\exp\{-\tau_1(p-i)\} & \cdot\\ \cdot & c_2(p-i) & c_1(p-i) & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{matrix}\right\| \qquad (6.4$$

$$c_k(p)=\mu(p^2+\lambda)^{-1}a_{|k|}\exp\{-\tau_k(p+ki)\} \qquad (6.5)$$

При малых $\varepsilon > 0$ нули определителей $\Delta(p)$ (1.8), $\operatorname{Det} D_1(p)$ совпадают (в 6.3). Рассмотрим вспомогательную бесконечную матрицу $R(p)$ с определителем, отличным от нуля в (6.3)

$$R(p) = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & c_{-1}(p+i) & c_{-2}(p+i) & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & c_2(p-i) & c_1(p-i) & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \quad \operatorname*{Det}_{p\in\Sigma} R(p) \neq 0 \tag{6.6}$$

Матрица $R(p)$ совпадает с матрицей $D_1(p)$ (6.4) за исключением центральной строки, где все элементы заменены нулями, а диагональный элемент единицей.

Поэтому в матрице $D_1(p)\,R^{-1}(p)$, за исключением центральной строки, на главной диагонали будут единицы, а вне ее нули. $\operatorname{Det}(D_1(p)\,R^{-1}(p))$ сводится к скалярной функции p.

$$\operatorname{Det}(D_1(p)\,R^{-1}(p)) = \operatorname{Det} D_1(p)\operatorname{Det} R^{-1}(p), \quad \operatorname{Det} R^{-1}(p) \neq 0 \quad p \in \Sigma \tag{6.7}$$

Найдем матрицу $(E + C(p))^{-1}$, где обозначено

$$E = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \qquad C(p) = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & c_{-1}(p+i) & c_{-2}(p+i) & \cdot \\ \cdot & c_1(p) & 0 & c_{-1}(p) & \cdot \\ \cdot & c_2(p-i) & c_1(p-i) & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \tag{6.8}$$

$$(E + C(p))^{-1} = E - C(p) + C^2(p) - C^3(p) + \ldots \tag{6.9}$$

Если исключим из матрицы $(E + C(p))^{-1}$ элементы $c_k(p)$, которые могут иметь полюсы в области Σ (6.3), то получим $R^{-1}(p)$, уравнение $\Delta(p) = 0$ принимает вид

$$p^2 + \lambda - \mu^2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k a_{-k} \exp[-\tau_k(p+ki) - \tau_{-k}p]}{(p+ki)^2 + \lambda} +$$

$$+ \mu^3 \sum_{\substack{k,\,\alpha=-\infty \\ k,\,\alpha\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k a_{\alpha-k} a_{-\alpha} \exp\{-\tau_k(p+ki) - \tau_{\alpha-k}(p+\alpha i) - \tau_{-\alpha}p\}}{[(p+(\alpha-k)i)^2 + \lambda][(p+\alpha i)^2 + \lambda]} - \ldots = 0 \tag{6.10}$$

Здесь положено $\tau_k = \tau_{-k}$, $a_k = a_{-k}$. В других случаях $\lambda = 0.25k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует поступить аналогично, оставляя неизменными уже две строки: центральную и k-ую. Используя лемму 5.1, получаем условия устойчивости решений уравнения (6.1) при малых значениях $|\lambda|$, $|\mu|$

$$\lambda + 2\mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 \cos k\tau_k}{k^2 - \lambda} + O(\mu^3) > 0 \tag{6.11}$$

$$4\mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{\tau_k \cos k\tau_k}{\lambda - k^2} + \frac{k \sin k\tau_k}{(\lambda - k^2)^2} \right) + O(\mu^3 + \mu^2 |\lambda|) > 0 \tag{6.12}$$

Второе условие устойчивости не зависимое от первого.

Поступила 12 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill G. W. On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta Math, 1886, VIII, p. 1—36.
2. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Симпозиум по нелинейным колебаниям. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1961.
4. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
5. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.
6. Валеев К. Г. К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Определение характеристических показателей. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.