О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ ОСНОВНЫХ АМПЛИТУД

Г. В. Плотникова (Москва)

В работах [1, 2] исследован вопрос о построении периодических решений неавтономных квазилинейных систем с одной степенью свободы в случае простых корней уравнений основных амплитуд, а также в случае кратных корней при некотором дополнительном условии. Показано, что решение представляется в этих случаях в виде рядов по целым степеням малого параметра μ. В предлагаемой работе рассмотрен вопрос о построении периодических решений таких систем в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд в виде рядов как по целым степеням μ, так и по степеням $\mu^{1/2}$.

1. Имеем неавтономную колебательную систему с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = f(t) + \mu F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \mu\right) \tag{1.1}$$

Величина μ — малый положительный параметр. Пусть функция $f(t)$ — непрерывная периодическая функция времени t с периодом 2π, разложение которой в ряд Фурье не содержит гармоник m-го порядка (m — целое число); функция F — аналитическая по отношению к переменным x, $\dot{x}$, μ и непрерывная периодическая функция t с тем же периодом 2π.

Порождающее уравнение ($\mu = 0$) имеет общее решение

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0 \cos mt + \frac{B_0}{m} \sin mt$$

зависящее от двух произвольных постоянных A_0 и B_0. Функция $\varphi(t)$ — частное периодическое решение (1.1) при $\mu = 0$.

Периодическое решение системы (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в решение $x_0(t)$, ищем по методу Пуанкаре; при этом в качестве начальных условий берем

$$x(0) = x_0(0) + \beta_1, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) + \beta_2$$

где β_1 и β_2 — функции μ, равные нулю при $\mu=0$. Согласно [2] решение $x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu)$ представляется в виде

$$x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu) = \varphi(t) + (A_0 + \beta_1)\cos mt + \frac{B_0 + \beta_2}{m} \sin mt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n(t)}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial A_0\,\partial B_0}\beta_1\beta_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial B_0^2}\beta_2^2 + \ldots \right]\mu^n \tag{1.2}$$

Здесь

$$C_n(t) = \frac{1}{m}\int_0^t H_n(t_1)\sin m(t - t_1)\, dt_1 \tag{1.3}$$

Функции $H_n(t_1)$ вычисляются при помощи определенных соотношений (1.10)—(1.12) в обозначениях работы [2]. Запишем условия периодичности функции $x(t,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \mu)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(2\pi) + \frac{\partial C_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0\,\partial B_0}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial B_0^2}\beta_2^2 + \ldots\right]\mu^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dot{C}_n(2\pi) + \frac{\partial \dot{C}_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial \dot{C}_n}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \dot{C}_n}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \frac{\partial^2 \dot{C}_n}{\partial A_0\,\partial B_0}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \dot{C}_n}{\partial B_0^2}\beta_2^2 + \ldots\right]\mu^n = 0 \tag{1.4}$$

Здесь производные C_n и $\dot{C}_n$ по A_0 и B_0 взяты при $t = 2\pi$, $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$. Левые части (1.4) являются голоморфными в окрестности $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ функциями. Уравнения (1.4) служат для определения значений $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$. Зная их, а также $C_n(t)$ из (1.3), можно найти периодическое решение (1.1) на основании (1.3).

Таким образом, задача приведена к определению условий существования и фактическому построению двух неявных функций β_1 и β_2 от переменной μ [3].

Для определения постоянных A_0 и B_0 в порождающем решении имеем уравнения основных амплитуд

$$C_1(2\pi) = 0, \qquad \dot{C}_1(2\pi) = 0 \tag{1.5}$$

Случай, когда эти уравнения превращаются в тождества, будет рассмотрен в работе особо п. 3. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial C_1/\partial A_0 & \partial C_1/\partial B_0 \\ \partial \dot{C}_1/\partial A_0 & \partial \dot{C}_1/\partial B_0 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \partial C_1/\partial B_0 & C_2 \\ \partial \dot{C}_1/\partial B_0 & \dot{C}_2 \end{vmatrix}$$

В случае простых корней уравнений (1.5) определитель $\Delta \neq 0$ и функции $\beta_1(\mu)$, $\beta_2(\mu)$, $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ построены в виде рядов по целым степеням μ в [2].

2. Условие $\Delta = 0$ означает, что корни уравнений основных амплитуд непростые. В дальнейшем будет рассматриваться только случай двукратных корней уравнений (1.5). Легко показать, что при этом

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial C_1}{\partial B_0} & \dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\dfrac{\partial C_1}{\partial A_0}\dfrac{\partial C_1}{\partial B_0} + \dfrac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)^2 \\ \dfrac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0} & \dfrac{\partial^2 \dot{C}}{\partial A_0^2}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 \dot{C}_1}{\partial A_0 \partial B_0}\dfrac{\partial C_1}{\partial A_0}\dfrac{\partial C_1}{\partial B_0} + \dfrac{\partial^2 \dot{C}_1}{\partial B_0^2}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)^2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.1}$$

Выражение для Δ^* не является единственным, так как в силу $\Delta = 0$, очевидно, можно заменить в (2.1) дифференцирование по A_0 дифференцированием по B_0 и наоборот. В случае, когда $C_1 = C_1(A_0)$, $\dot{C}_1 = \dot{C}_1(B_0)$ или $C_1 = C_1(B_0)$, $\dot{C}_1 = \dot{C}_1(A_0)$ условие двукратности корней (2.1) несправедливо и его нужно заменить на

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 \dot{C}_1}{\partial B_0^2} \neq 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 \dot{C}_1}{\partial A_0^2} \neq 0$$

Из выражения (2.1) для Δ^* следует, что ни один из членов $\partial C_1/\partial A_0$, $\partial C_1/\partial B_0$, $\partial \dot{C}_1/\partial A_0$, $\partial \dot{C}_1/\partial B_0$ не равен нулю. В силу $\partial C_1/\partial B_0 \neq 0$ на основании теории неявных функций [3] из первого уравнения (1.4) имеем

$$\beta_2 = \gamma_0(\mu) + \gamma_1(\mu)\beta_1 + \gamma_2(\mu)\beta_1^2 + \ldots \tag{2.2}$$

Здесь β_2 — голоморфная в окрестности $\mu = \beta_1 = 0$ функция $\gamma_j(\mu)$ — функции, голоморфные в окрестности $\mu = 0$. Заметим, что $\gamma_0(0) = 0$, так как β_2 должна обращаться в нуль при $\mu = 0$. Тогда функции $\gamma_j(\mu)$ представимы в виде

$$\gamma_j(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} M_{ij}\mu^i \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

Постоянные M_{ij} можно определить, подставляя (2.2) с учетом (2.3) в первое уравнение системы (1.4) и приравнивая в полученном тождестве нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ и β_1. В результате получим (2.4)

$$M_{10} = -C_2\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}, \qquad M_{01} = -\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}, \qquad M_{02} = -\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-3} P_1^2$$

$$M_{20} = -\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-3}\left[\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left(C_3\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - C_2\frac{\partial C_2}{\partial B_0}\right) + \frac{1}{2}C_2^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\right]$$

$$M_{11} = -\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-3}\left[\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial C_2}{\partial A_0} - \frac{\partial C_1}{\partial A_0}\frac{\partial C_2}{\partial B_0}\right) + C_2\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial A_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)\right]$$

$$M_{30} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-5}\left[-\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^3 M_{20}\left(\frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}C_2\right) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_2}{\partial B_0^2}C_2^2\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 + \frac{\partial C_3}{\partial B_0}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^3 C_2 - C_4\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^4\right]$$

$$M_{03} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-5}\left[P_1^2\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right) - P_1^3\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right] \qquad \text{и т. д.}$$

Здесь введены обозначения

$$P_n{}^k = P_n{}^k\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}, -\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{\partial}{\partial B_0}\left(-\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)\right]^k C_n \qquad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots \\ n=1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$
$$\dot P_n{}^k = \dot P_n{}^k\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}, -\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{\partial}{\partial B_0}\left(-\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)\right]^k \dot C_n$$

Итак, для β_2 имеем

$$\beta_2 = M_{10}\mu + M_{20}\mu^2 + M_{01}\beta_1 + M_{02}\beta_1^2 + M_{11}\mu\beta_1 + \ldots \tag{2.5}$$

Подставляя значение β_2 из (2.5) во второе уравнение системы (1.4), найдем

$$N_{10}\mu + N_{20}\mu^2 + N_{11}\mu\beta_1 + N_{02}\beta_1^2 + N_{30}\mu^3 + N_{21}\mu^2\beta_1 + N_{12}\mu\beta_1^2 + N_{03}\beta_1^3 + \ldots = 0 \tag{2.6}$$

Очевидно, что члена с β_1 в этом уравнении нет, так как

$$N_{01} = -\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}\Delta = 0$$

Учитывая выражение (2.1), получаем, что

$$N_{02} = -\Delta^*\left[2\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\right]^{-1} \neq 0$$

Остальные коэффициенты N_{ij} легко подсчитать. Так

$$N_{10} = \Delta_1\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}$$

$$N_{20} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-2}\left(\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0^2}C_2^2 - \frac{\partial \dot C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2\dot C_3\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\dot C_2^2 - \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\dot C_2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 C_3\right]\right\}$$

$$N_{11} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\right)^{-1}\left[\dot C_2\left(\frac{\partial^2 \dot C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\,\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial \dot C_1}{\partial A_0} - \frac{\partial^2 \dot C_1}{\partial A_0\,\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\left(\frac{\partial \dot C_2}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial A_0} - \frac{\partial \dot C_2}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial A_0} - \frac{\partial C_2}{\partial A_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}\right)\right] \quad \text{и т. д.} \tag{2.7}$$

Из (2.6) нужно найти неявную функцию $\beta_1 = \beta_1(\mu)$. Полагая в (2.6) $\mu = 0$, получим

$$N_{02}\beta_1^2 + N_{03}\beta_1^3 + \ldots = 0 \tag{2.8}$$

Согласно теореме Вейерштрасса о неявных функциях [3, 4], число неявных функций $\beta_1(\mu)$, определяемых уравнением (2.6), равно наименьшему показателю в разложении (2.8) по степеням β_1, т. е. в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд ($N_{02} \neq 0$) равно двум. Обе неявные функции разлагаются в сходящиеся ряды либо по целым степеням μ, либо по степеням $\mu^{1/2}$

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/l}\mu^{n/l} \qquad l = 1, 2 \tag{2.9}$$

где $A_{n/l}$ — постоянные коэффициенты. При этом одновременно те и другие разложения существовать не могут. Рассмотрим наиболее интересные случаи.

1°. Если $\Delta_1 \neq 0$, т. е. $N_{10} \neq 0$, то разложение для β_1 имеет вид (2.9) при $l = 2$. Для определения коэффициентов $A_{1/2}$ и A_1 имеем уравнения

$$\begin{gathered} N_{02}A_{1/2}{}^2 + N_{10} = 0 \\ 2N_{02}A_{1/2}A_1 + N_{03}A_{1/2}{}^3 + N_{11}A_{1/2} = 0 \\ 2N_{02}A_{1/2}A_{3/2} + \ldots = 0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

Учитывая выражения для N_{02} и N_{10}, получаем из первого уравнения (2.10) два значения $A_{1/2}$

$$A_{1/2}{}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\Delta^*}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}}, \qquad A_{1/2}{}^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{\Delta^*}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial \dot C_1}{\partial B_0}}$$

Нас интересуют лишь вещественные разложения; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\Delta_1}{\Delta^*}\,\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\,\frac{\partial \dot{C}_1}{\partial B_0} > 0 \qquad (2.11)$$

На основании (2.4) ряд (2.5) получаем в виде

$$\beta_2 = B_{1/2}{}^{(k)}\mu^{1/2} + B_1{}^{(k)}\mu + \ldots \qquad (k = 1, 2)$$

где

$$B_{1/2}{}^{(1)} = -\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1} A_{1/2}{}^{(1)}, \qquad B_{1/2}{}^{(2)} = -\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^{-1} A_{1/2}{}^{(2)}$$

$$B_1{}^{(k)} = M_{10} + M_{01}A_1{}^{(k)} + M_{02}A_{1/2}{}^{(k)2} \qquad (k = 1, 2) \text{ и т. д.}$$

2°. Если $\Delta_1 = 0$, т. е. $N_{10} = 0$, то для выяснения условий существования тех или иных разложений сделаем замену [3]

$$\beta_1 = (v + a_k)\,\mu \qquad (k = 1, 2) \qquad (2.12)$$

где a_1 и a_2 обозначают корни уравнения

$$S = N_{20} + N_{11}a + N_{02}a^2 = 0 \qquad (2.13)$$

Подставив β_1 из (2.12) в (2.6) и сократив полученное уравнение на μ^2, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} &v\,(N_{11} + 2N_{02}a_k) + \mu\,(N_{30} + N_{21}a_k + N_{12}a_k{}^2 + N_{03}a_k{}^3) + \\ &+ N_{02}v^2 + \mu v\,(N_{21} + 2N_{12}a_k + 3N_{03}a_k{}^2) + \mu^2 L + \ldots = 0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Здесь все невыписанные члены имеют μ в степени больше двух, а через L обозначен коэффициент при μ. Могут представиться лишь такие случаи.

а) Пусть корни уравнения (2.13) простые $a_1 \neq a_2$, тогда

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_{a=a_k} = N_{11} + 2N_{02}a_k \neq 0$$

В этом случае в (2.14) коэффициент при v не равен нулю, т. е. существует разложение для v по целым степеням μ

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}\mu^n \qquad (2.15)$$

где A_{n+1} — постоянные коэффициенты, определяемые из системы уравнений:

$$A_2\,(N_{11} + 2N_{02}a_k) + N_{30} + N_{21}a_k + N_{12}a_k{}^2 + N_{03}a_k{}^3 = 0$$

$$A_3\,(N_{11} + 2N_{02}a_k) + \ldots = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

Эта система имеет, очевидно, единственное решение для данного a_k. На основании (2.12), (2.5) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned} \beta_1{}^{(k)} &= \mu a_k + A_2{}^{(k)}\mu^2 + \ldots \\ \beta_2{}^{(k)} &= \mu B_1{}^{(k)} + B_2{}^{(k)}\mu^2 + \ldots \end{aligned} \qquad (k = 1, 2) \qquad (2.16)$$

где

$$B_1{}^{(k)} = M_{10} + M_{01}a_k, \qquad B_2{}^{(k)} = M_{20} + M_{01}A_2{}^{(k)} + M_{02}a_k{}^2 + 2M_{02}a_kA_2{}^{(k)} + M_{11}a_k$$

Итак, если корни уравнения (2.13) вещественные простые, имеем два разложения для $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ в виде рядов по целым степеням параметра μ.

Этот случай был рассмотрен в работе [2].

б) Пусть теперь корни уравнения (2.13) вещественные кратные, т. е. $a_1 = a_2 = a$. При этом очевидно

$$N_{11} + 2N_{02}a = 0, \qquad N_{11}{}^2 - 4N_{20}N_{02} = 0 \qquad (2.17)$$

Следовательно, коэффициент при v в уравнении (2.14) равен нулю.

Обозначим в (2.14) коэффициент при μ через K. Подставляя выражение для a из (2.17) в K, получим

$$K = (8N_{02})^{-3}\,(8N_{02}{}^3N_{30} - 4N_{21}N_{11}N_{02}{}^2 + 2N_{12}N_{11}{}^2N_{02} - N_{03}N_{11}{}^3)$$

При этом

$$N_{30}=\frac{\partial\dot C_1}{\partial B_0}M_{30}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial B_0^2}M_{10}M_{20}+\frac{\partial\dot C_2}{\partial B_0}M_{20}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial B_0^3}M_{10}^3+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial B_0^2}M_{10}^2+\frac{\partial\dot C_3}{\partial B_0}M_{10}+\dot C_4$$

$$N_{03}=\frac{\partial\dot C_1}{\partial B_0}M_{03}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0}M_{02}-\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial B_0^2}M_{01}M_{02}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0^2\partial B_0}M_{01}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0^2}M_{01}^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial B_0^3}M_{01}^3$$

$$N_{21}=\frac{\partial\dot C_1}{\partial B_0}M_{21}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0}M_{20}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial B_0^2}(M_{10}M_{11}+M_{01}M_{20})+$$
$$+\frac{\partial\dot C_2}{\partial B_0}M_{11}+\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0^2}M_{10}^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial B_0^3}(M_{10}^2M_{01})+\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial A_0\partial B_0}M_{10}+$$
$$+\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial B_0^2}M_{10}M_{01}+\frac{\partial\dot C_3}{\partial A_0}+\frac{\partial\dot C_3}{\partial B_0}M_{01}$$

$$N_{12}=\frac{\partial\dot C_1}{\partial B_0}M_{12}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0}M_{11}+\frac{\partial^2\dot C_1}{\partial B_0^2}(M_{10}M_{02}+M_{01}M_{11})+$$
$$+\frac{\partial\dot C_2}{\partial B_0}M_{02}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0^2\partial B_0}M_{10}+\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial A_0\partial B_0^2}M_{10}M_{01}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\dot C_1}{\partial B_0^3}M_{01}^2M_{10}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial A_0^2}+\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial A_0\partial B_0}M_{01}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\dot C_2}{\partial B_0^2}M_{01}^2$$

Пусть $K\neq 0$. Из (2.14) видно, что существует разложение для v в ряд по степеням $\mu^{1/2}$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_{(n+2)/12}\mu^{n/2} \tag{2.18}$$

где $A_{n+2/2}$ — постоянные коэффициенты, определяемые из системы уравнений

$$\begin{gathered}N_{02}A_{3/2}^2+K=0\\ 2N_{02}A_{3/2}A_2+N_{21}A_{3/2}+2N_{12}aA_{3/2}+3N_{03}a^2A_{3/2}=0\\ 2N_{02}A_{3/2}A_{5/2}+\ldots=0 \qquad \text{и т. д.}\end{gathered} \tag{2.19}$$

Из первого уравнения (2.19) найдем $A_{3/2}$, при этом $A_{3/2}\neq 0$, так как $K\neq 0$. Остальные уравнения являются линейными относительно неизвестных A_2, $A_{5/2},\ldots$ с коэффициентами при них, равными $2N_{02}A_{3/2}$. Так как эта величина не равна нулю, то уравнения (2.19) разрешаются единственным образом.

Заметим, что из первого уравнения (2.19) определяются два значения $A_{3/2}$

$$A_{3/2}^{(1)}=\sqrt{-KN_{02}^{-1}},\qquad A_{3/2}^{(2)}=-\sqrt{-KN_{02}^{-1}}$$

Для их вещественности необходимо и достаточно, чтобы $N_{02}K<0$.

На основании (2.12), (2.5) и (2.18) имеем

$$\beta_1^{(k)}=\mu a+A_{3/2}^{(k)}\mu^{3/2}+A_2^{(k)}\mu^2+\ldots$$
$$\beta_2^{(k)}=\mu B_1^{(k)}+B_{3/2}^{(k)}\mu^{3/2}+B_2^{(k)}\mu^2+\ldots$$

где

$$B_1^{(k)}=M_{10}+aM_{01},\qquad B_{3/2}^{(k)}=M_{01}A_{3/2}^{(k)}$$
$$B_2^{(k)}=M_{20}+A_2^{(k)}M_{01}+M_{02}a^2+M_{11}a$$

Итак, в случае $K\neq 0$ и $a_1=a_2$ при $N_{02}K<0$ имеем два разложения для $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ с вещественными коэффициентами по степеням $\mu^{1/2}$.

в) Пусть $K=0$, тогда из первого уравнения (2.19) получим $A_{3/2}=0$. Остальные уравнения системы становятся неопределенными. Однако, при $K=0$ уравнение (2.14) переходит в

$$v^2N_{02}+\mu v(N_{21}+2N_{12}a+3N_{03}a^2)+\mu^2L+\ldots=0$$

Таким образом, получено уравнение типа (2.6) при $N_{10}=0$, которое можно исследовать при помощи описанного выше приема, применяя подстановку типа (2.12).

Легко видеть, что виды разложений в этом случае будут зависеть от кратности корней b_i уравнения

$$R = L + b\,(N_{21} + 2N_{12}a + 3N_{03}a^2) + b^2 N_{02} = 0$$

При простых корнях этого уравнения существуют разложения $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ по целым степеням параметра μ, при кратных корнях нужно опять рассмотреть два случая и т. д. Анализ аналогичен предыдущему. Указанные преобразования, сколько бы раз их не применяли, всякий раз приводят, как легко видеть, снова к уравнению вида (2.6), так как $N_{02} \neq 0$.

3. Пусть уравнения (1.5) есть тождества. Тогда все производные C_1 и $\dot{C}_1$ по A_0 и B_0 равны нулю. Из уравнений (1.4), разделив их на μ, получаем:

$$\begin{aligned} &C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\beta_2 + C_3\mu + \ldots = 0 \\ &\dot{C}_2 + \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial B_0}\beta_2 + \dot{C}_3\mu + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Чтобы эти уравнения удовлетворялись при $\mu \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$C_2(2\pi) = 0, \qquad \dot{C}_2(2\pi) = 0 \tag{3.2}$$

Для определения основных амплитуд в этом особом случае служат, таким образом, уравнения (3.2), если они в свою очередь не удовлетворяются тождественно. Уравнения (3.1) записываются в виде, аналогичном (1.4), уже исследованном в п. 2.

Очевидно, если уравнения (4.2) удовлетворяются тождественно, то для определения основных амплитуд A_0 и B_0 служат уравнения

$$C_3(2\pi) = 0, \qquad \dot{C}_3(2\pi) = 0$$

4. Покажем, как практически найти периодические решения уравнений (1.1), условия существования которых установлены в п. 2. Легко видеть из (1.2), (1.3), что вид разложений решения $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ соответствует виду разложений $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ по μ. Поэтому в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд существуют вещественные разложения периодических решений системы (1.1) вида

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n/l}(t)\,\mu^{n/l} \tag{4.1}$$

где $x_{n/l}(t)$ — периодические функции, l равно или единице или двум. Других разложений по дробным степеням не существует. Рассмотрим все случаи из п. 2.

1°. Решение ищется в виде ряда по степеням $\mu^{1/2}$, т. е.

$$x^{(k)}(t) = x_0(t) + x_{1/2}^{(k)}(t)\,\mu^{1/2} + x_1^{(k)}(t)\,\mu + x_{3/2}^{(k)}(t)\,\mu^{3/2} + \ldots \qquad (k = 1, 2)$$

где $x_i^{(k)}(t)$ $(i = 0, 1/2, 1, \ldots)$ — функции, определяемые на основании (1.2), (2.9):

$$\begin{aligned} x_{1/2}^{(k)}(t) &= A_{1/2}^{(k)}\cos mt + \frac{B_{1/2}^{(k)}}{m}\sin mt \\ x_1^{(k)}(t) &= A_1^{(k)}\cos mt + \frac{B_1^{(k)}}{m}\sin mt + C_1(t) \qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

2°. Если корни уравнения (2.13) простые, то решение имеет вид (4.1) при $l = 1$.

$$x^{(k)}(t) = x_0(t) + x_1^{(k)}(t)\,\mu + x_2^{(k)}(t)\,\mu^2 + \ldots$$

где

$$x_1^{(k)}(t) = a_k\cos mt + \frac{1}{m}(M_{10} + M_{01}a_k)\sin mt + C_1(t)$$

$$\begin{aligned} x_2^{(k)}(t) = A_2\cos mt &+ \frac{1}{m}(M_{20} + M_{01}A_2 + M_{02}a_k^2 + 2M_{02}a_kA_2 + M_{11}a_k)\sin mt + \\ &+ C_2(t) + \frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0}a_k + \frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0}(M_{10} + M_{01}a_k) \qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

При кратных корнях уравнения (2.13) и $K \neq 0$ решение ищем в виде (4.1) при $l = 2$.

$$x^{(k)}(t) = x_0(t) + x_{1/2}^{(k)}(t)\,\mu^{1/2} + x_1^{(k)}(t)\,\mu + \ldots$$

где

$$x_{1/2}^{(k)}(t) = 0$$

$$x_1^{(k)}(t) = \dot{a}\cos mt + \frac{1}{m}(M_{10} + aM_{01})\sin mt + C_1(t) \qquad \text{и т. д.}$$

Вещественных разложений (4.1) нет, если:

1) не имеет места условие (2.11);

2) имеет место один из следующих случаев: либо корни уравнения (2.13) комплексны, либо при $a_1 = a_2$ выражение $N_{02}K > 0$.

При двукратных корнях уравнений (1.5) имеем неединственные представления решений в виде (4.1). В каждом случае существуют два периодических решения, отвечающих двум кратным корням уравнений основных амплитуд. Можно говорить о бифуркации решения порождающего уравнения.

Все полученные ряды (4.1) сходятся при малых значениях параметра μ. В работе не рассмотрен вопрос устойчивости полученных периодических решений.

Поступила 22 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
3. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. ГИТТЛ, 1936.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАЦИОНАРНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ АРГУМЕНТА МЕТОДОМ ХИЛЛА

К. Г. Валеев (Ленинград)

Показано, что метод Хилла [1] может быть применен к исследованию решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Изложение ведется на примере дифференциального уравнения второго порядка с сосредоточенными запаздываниями. Изложенный метод легко обобщается для системы m уравнений n-го порядка с сосредоточенными и непрерывно распределенными стационарными запаздываниями аргумента.

1. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sum_{k=0}^{s}\sum_{q=-l}^{l} a_{kq}e^{-iqt}y(t-\tau_k) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь a_{kq} — комплексные числа, τ_k — вещественные числа

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \tau_s \leqslant h,$$

l — конечное число, $l > 0$. Ищем при $t > 0$ решение $y(t)$ с начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t) \quad (h \leqslant t < 0), \qquad y(0) = y_0^{(0)}, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_0^{(1)} \tag{1.2}$$

Функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируемая на $h \leqslant t < 0$.

Пусть $f(p)$ — изображение по Лапласу [2] решения уравнения (1.1) $y(t)$ с начальными условиями (1.2).