

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о л о т и н В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1961.
2. В о р о в и ч И. И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. D o o b D. The elementary Gaussian processes, Ann. of Math. Statistics, 1944, № 3.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во Сов. Радио, 1961.
5. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехтеориздат, 1956.
6. К о л м о г о р о в А. Н. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Math. Annalen, 1937, 104.
7. Я г л о м А. М. О статистической обратимости брауновского движения. Матем. сб., 1949, 24/66.
8. К р а м е р с Н. А. Brownian Motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, Physica, 1940, 7.
9. Г о н ч а р е н к о В. М. Применение марковских процессов в статистической теории устойчивости оболочек, Украин. матем. журнал, 1962, 14, № 2.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К. И. Огурцов, Л. С. Пахоменко, А. И. Сутягина

(Ленинград)

Во многих работах, появившихся в последнее время в печати, точные решения одних динамических задач теории упругости заменяются точными решениями других более простых задач или же приближенными решениями. При этом в ряде случаев не оценивается допускаемая погрешность и не определяются области возможного применения получаемых формул. Чтобы уменьшить вероятность возникновения ошибочных выводов, к которым при этом приходят, полезно сравнивать, где это возможно, результаты точных и приближенных оценок.

Значительная часть выполненных ранее исследований относится к окрестности оси симметрии волновых процессов в средах с плоско-параллельными границами. В этой окрестности меньше сказываются краевые эффекты, обуславливающие в твердых телах вдали от оси появление более сложных боковых и поверхностных (релеевских) волн. Однако и на оси при определенных встречающихся на практике граничных условиях волновые поля в различных задачах могут значительно отличаться одно от другого.

В статье [1] на основе качественного анализа уже утверждалась недопустимость расчетов по формулам акустического приближения напряжений на оси симметрии внутри среды в случае сосредоточенной силы, прикладываемой по нормали к поверхности. В предлагаемой работе в случае сосредоточенного и распределенных воздействий производится сравнение рассчитанных полей смещений и напряжений по точным формулам для полупространства и безграничной среды, по формулам акустического приближения и по формулам, получаемым при допущениях, сделанных в работе [2] (где полагались равными нулю горизонтальные смещения во всем полупространстве, а затем приравнивалась скорость распространения поперечных волн скорости распространения продольных волн).

Точные решения задач о колебаниях полупространства под действием усилий, прикладываемых на границе, неоднократно определялись в интегральной форме различными методами. Однако в силу некоторой сложности формул количественные исследования этих решений даже в случае сосредоточенного воздействия не проведены достаточно полно. В случае же различных распределенных воздействий получены пока лишь некоторые частные результаты. Учитывая это, представлялось целесообразным (из экономии места и времени) не останавливаться на выводе известных решений, а формулировать граничные и начальные условия и выписывать формулы для рассматриваемых волновых полей.

1. Введем цилиндрические координаты r, θ, z и зададим на границе $z = 0$ находившегося в покое полупространства $z \geq 0$ осесимметричные напряжения

$$\sigma_z = -\frac{n^2}{2\pi(1+n^2r^2)^{3/2}} \varepsilon(t), \quad \tau_{rz} = 0 \quad (1.1)$$

где $\varepsilon(t) = 0$ при $t < 0$, $\varepsilon(t) = 1$ при $t > 0$, а n — произвольный параметр [3].

Интегрируя напряжения (1.1) по всей границе полупространства, нетрудно убедиться, что их суммарный эффект соответствует единичной силе. При $n \rightarrow \infty$ эта сила сосредотачивается в начале координат. При малых n значение (1.1) медленно изменяется как функция конечных r , и, анализируя волновую картину в полупространстве вблизи границы около начала координат, естественно ожидать, что такое воздействие равносильно равномерному распределению нагрузки, создающему простую плоскую волну. Задаваясь различными значениями n , можно получать всевозможные «колоколообразные» распределенные воздействия, в большей или меньшей степени приближающиеся к упомянутым предельным случаям.

2. Полагая в формулах для горизонтальной q и вертикальной w составляющих смещений [3], соответствующих воздействию (1.1), значение r равным нулю (при этом оказывается $q = 0$), получим на оси симметрии

$$w = -\frac{1}{4\pi^2\mu i} \int_l \left[\frac{g\alpha}{\zeta R(\zeta) \left[bt\zeta - z\alpha - \frac{1}{n} \right]} - \frac{2\alpha}{\zeta R(\zeta) \left[bt\zeta - z\beta - \frac{1}{n} \right]} \right] d\zeta \quad (2.1)$$

где первое слагаемое описывает продольные волны, второе — поперечные волны

$$g = 2 + \zeta^2, \quad \alpha = \sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}, \quad \beta = \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad R(\zeta) = g^2 - 4\alpha\beta \\ \gamma = b/a, \quad b = \sqrt{\mu/\rho}, \quad a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (2.2)$$

причем λ и μ обозначают упругие постоянные Ляме, ρ — плотность, a — скорость распространения продольных волн, b — скорость распространения поперечных волн.

Контур интегрирования l проходит так, что справа от него слагаемые подынтегральной функции содержат полюс, если рассматривается область позади фронта волны. При рассмотрении же области впереди фронта соответствующее ему слагаемое не будет иметь полюса и интеграл от этого слагаемого обращается в нуль.

Если в формуле (2.1) ввести новые безразмерные величины

$$\tau = bt/z, \quad \kappa = 1/nz \quad (2.3)$$

то после деформации контура l в правую полуплоскость и интегрирования первого и второго слагаемого соответственно вокруг полюсов

$$\zeta_1 = \frac{\kappa\tau + \sqrt{\tau^2 - \gamma^2 + \gamma^2\kappa^2}}{\tau^2 - \gamma^2}, \quad \zeta_2 = \frac{\kappa\tau + \sqrt{\tau^2 - 1 + \kappa^2}}{\tau^2 - 1} \quad (2.4)$$

являющихся корнями уравнений $\tau\zeta - \alpha - \kappa = 0$, $\tau\zeta - \beta - \kappa = 0$ получаем

$$w = \frac{1}{4\mu z} \left[\frac{g\alpha^2}{2R(\zeta)(1+\kappa\alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) - \frac{\alpha\beta}{R(\zeta)(1+\kappa\beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (2.5)$$

Аналогично для напряжений находятся формулы

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{g^2\alpha}{2\zeta R(\zeta)(1+\kappa\alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) - \frac{2\alpha\beta^2}{\zeta R(\zeta)(1+\kappa\beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (2.6) \\ \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{[(1-2\gamma^2)\zeta^2 - 1]g\alpha}{2\zeta R(\zeta)(1+\kappa\alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) - \frac{\alpha\beta^2}{\zeta R(\zeta)(1+\kappa\beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right]$$

Решения для сосредоточенного воздействия вытекают из формул (2.4)–(2.6) предельным переходом $\kappa \rightarrow 0$. Эти решения уже приводились ранее в работах [1,3].

3. Рассмотрим теперь решения, получающиеся при первом допущении сделанном в работе [2]. В указанной работе горизонтальные смещения полагаются равными нулю во всем полупространстве, а вертикальные смещения определяются полностью при известных вертикальных силах на границе. На касательные напряжения при этом не приходится налагать какие-либо краевые условия: они сами будут однозначно определяться.

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (3.1)$$

при условии

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{n^2}{2\pi (1 + n^2 r^2)^{3/2}} \varepsilon(t) \quad (3.2)$$

Применяя метод неполного разделения переменных, смещения w на оси симметрии можно выразить в интегральной форме

$$w = - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 \mu i z} \int \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{1 + \zeta^2} (\tau \zeta - \gamma \sqrt{1 + \zeta^2} - \kappa)} \quad (3.3)$$

По теореме вычетов определяем

$$w = \frac{1}{\pi \mu z} \frac{\gamma}{2(\gamma + \kappa \sqrt{1 + \zeta_0^2})} \varepsilon(\tau - \gamma) \quad \left(\zeta_0 = \frac{\tau \kappa + \gamma \sqrt{\tau^2 - \gamma^2 + \kappa^2}}{\tau^2 - \gamma^2} \right) \quad (3.4)$$

Здесь ζ_0 — корень уравнения $\tau \zeta - \gamma \sqrt{1 + \zeta^2} - \kappa = 0$. Для напряжений имеем

$$\sigma_z = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \zeta_0^2}}{2\zeta_0 (\gamma + \kappa \sqrt{1 + \zeta_0^2})} \varepsilon(\tau - \gamma) \right\}, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = (1 - 2\gamma^2) \sigma_z \quad (3.5)$$

При $\kappa = 0$ оказывается

$$w = \frac{1}{\pi \mu z} \frac{1}{2} \varepsilon(\tau - \gamma), \quad \sigma_z = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\tau}{2\gamma^2} \varepsilon(\tau - \gamma) \right\} \quad (3.6)$$

Заметим, что фронт волны, соответствующей решению уравнения (3.1) при условии (3.2) в случае сосредоточенного воздействия ($\kappa = 0$) представляет собой эллипсоид вращения с большой полуосью at по оси z и с малой полуосью bt по оси r .

4. Если в задаче о полупространстве применять менее жесткие, чем в предыдущем параграфе, условия, потребовав равенство нулю горизонтальных смещений лишь на границе (при этом, в отличие от предыдущего случая задача оказывается поставленной корректно), то, как нетрудно убедиться, получается удвоенное решение задачи для безграничной среды [3]. Смещения и напряжения, соответствующие такой постановке, на оси симметрии выражаются формулами

$$w = \frac{1}{\pi \mu z} \left[\frac{1 + \gamma^2 \zeta^2}{2\zeta^2 (1 + \kappa \alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) - \frac{1}{2\zeta^2 (1 + \kappa \beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.1)$$

$$\sigma_z = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\alpha \gamma}{2\zeta^3 (1 + \kappa \alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) - \frac{\beta}{\zeta^3 (1 + \kappa \beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.2)$$

$$\sigma_r = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{[(1 - 2\gamma^2)^2 \zeta^2 - 1] \alpha}{2\zeta^3 (1 + \kappa \alpha)} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) + \frac{\beta}{2\zeta^3 (1 + \kappa \beta)} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.3)$$

в которых ζ_1 и ζ_2 имеют значения (2.4). При $\kappa = 0$ получим

$$w = \frac{1}{\pi \mu z} \left[\frac{\tau^2}{2} \varepsilon(\tau - \gamma) - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.4)$$

$$\sigma_z = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(\tau^3 + \frac{1 - 2\gamma^2}{2} \tau \right) \varepsilon(\tau - \gamma) - (\tau^3 - \tau) \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.5)$$

$$\sigma_r = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(-\frac{\tau^3}{2} + \frac{1 - \gamma^2}{2} \tau \right) \varepsilon(\tau - \gamma) + \left(\frac{\tau^3}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \varepsilon(\tau - 1) \right] \quad (4.6)$$

5. Решение акустической задачи можно найти предельным переходом от решения динамической задачи, устремляя скорость поперечных волн к нулю. Действительно, отбрасывая в формулах (2.5), (2.7) вторые слагаемые, соответствующие поперечным волнам, заменим в первых слагаемых b на $b\mu$ (что равносильно замене $\mu = \rho b^2$ на μu^2 , γ на γu , а ζ_1 на $\zeta_1 u^{-1}$) и устремим u к нулю, считая b (а следовательно и μ) прежним неизменным параметром. В результате находим

$$w = \frac{1}{\pi \mu z} \frac{\alpha^2}{2\zeta^2 (1 + \kappa \alpha)} \Big|_{\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma), \quad \sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = - \frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\alpha}{2\zeta (1 + \kappa \alpha)} \Big|_{\zeta_1} \varepsilon(\tau - \gamma) \right]$$

При $\kappa = 0$ формулы (5.1) принимают вид

$$w = \frac{1}{\pi\mu z} \frac{\tau^2}{2} \varepsilon(\tau - \gamma), \quad \sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1}{\pi z^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\tau}{2} \varepsilon(\tau - \gamma) \right) \quad (5.2)$$

Нетрудно убедиться, что к таким же результатам приводит предельный переход и в формулах (4.1)–(4.6). Аналогичный же предельный переход в формулах (3.4) дает величины

$$w = \frac{1}{\pi\mu z} \frac{\gamma(\tau - \gamma)}{2\kappa^2} \varepsilon(\tau - \gamma) \quad (5.3)$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi z^2} \frac{1}{2\kappa^2} \varepsilon(\tau - \gamma), \quad \sigma_r = \sigma_\theta = (1 - 2\gamma^2) \sigma_z$$

обращающиеся (из-за некорректности постановки задачи) в бесконечность при переходе к сосредоточенному воздействию (в случае акустических задач не придается физического смысла смещениям, так как они неограниченно возрастают с возрастанием τ).

6. В работе [2], кроме допущения равенства нулю горизонтальных смещений, считалось возможным приравнять скорость распространения поперечных волн скорости распространения продольных волн. При этом формула (3.3) дает значение

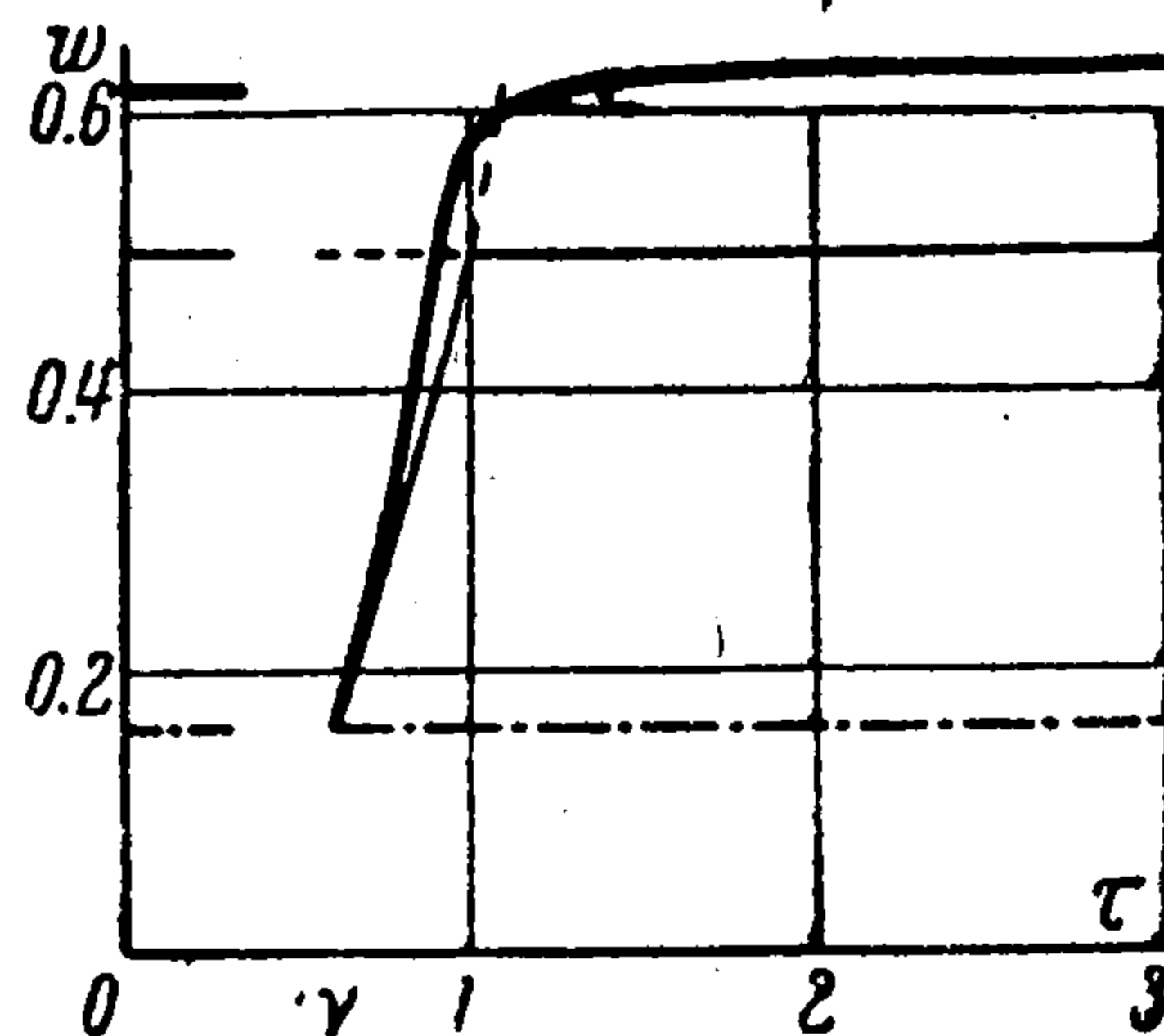
$$w = \frac{1}{\pi\mu z} \frac{\gamma^2}{2(1 + \kappa\alpha)} \Big|_{z=z_1} \varepsilon(\tau - \gamma) \quad (6.1)$$

совпадающее при $\tau = \gamma$ (на фронте продольной волны) с акустическим решением, а при $\tau > \gamma$ — возрастающее монотонно до некоторого предела, но остающееся меньше упомянутого решения. При таких допущениях σ_z совпадает согласно формулам (3.4) с акустическим решением при любых τ , а $\sigma_r = \sigma_\theta$ принимает парадоксальное значение $-\sigma_z$. Таким образом, утверждение автора работы [2] о том, что при сделанных им двух допущениях для твердой среды получается решение неакустической задачи, для напряжения σ_z оказывается неверным. В общем же его решение (если учитывать и компоненты σ_r, σ_θ) еще хуже, чем акустическое, или какое-либо другое (из рассмотренных выше) решение отражает действительную картину.

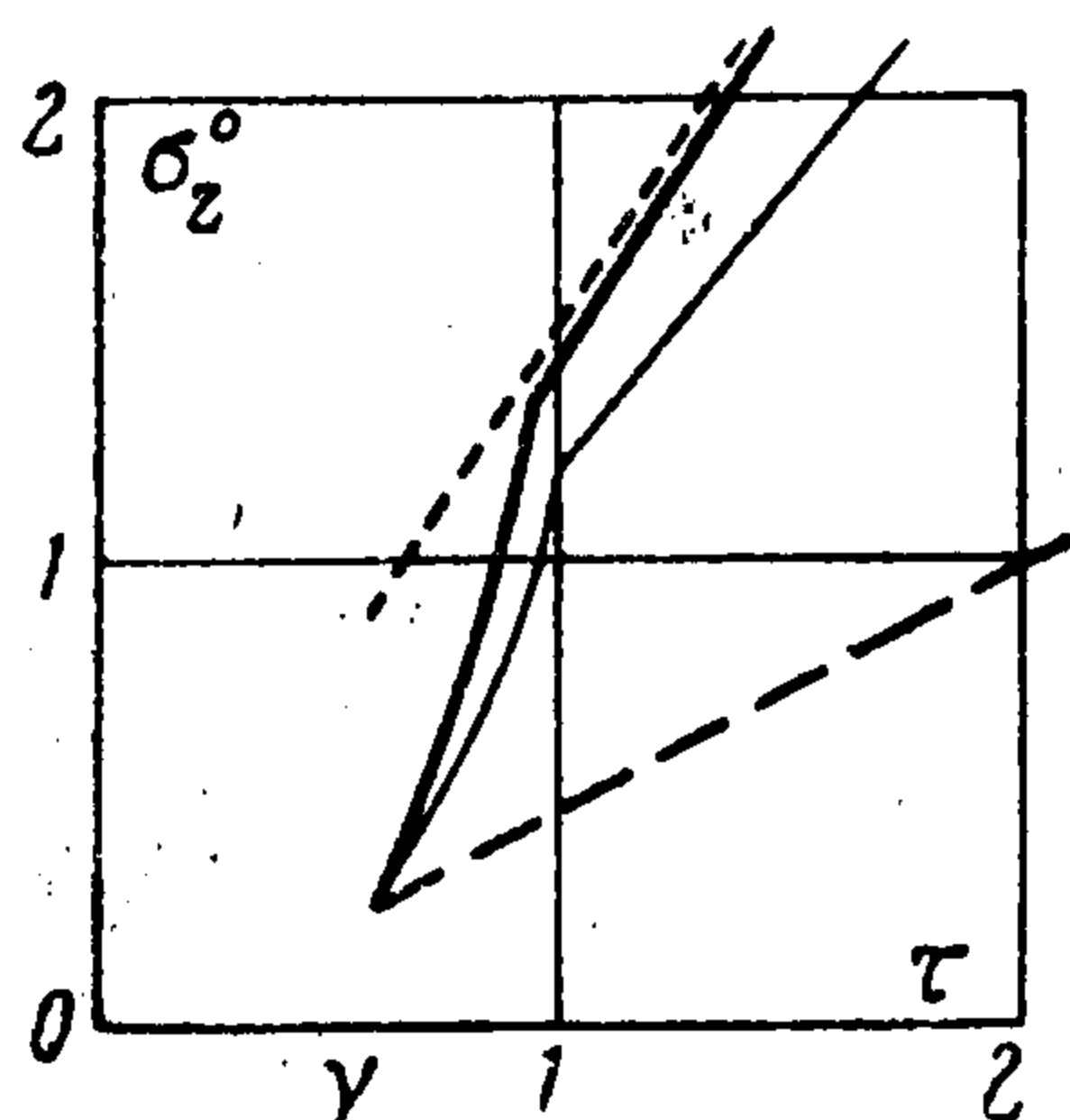
7. Приведем результаты количественных оценок решений различных задач для различных распределений усилий на границе $z = 0$.

Прежде всего заметим, что при больших κ , когда усилия на границе вблизи оси симметрии близки к равномерно распределенной динамической нагрузке, но при конечных τ , включающих времена прихода фронтов продольных и поперечных волн, главная часть динамических процессов описывается плоской продольной волной. Асимптотические оценки ее для всех рассмотренных задач определяются формулами (5.3). Лишь для $\sigma_r = \sigma_\theta$ в акустическом случае (когда $\gamma = 0$) вместо равенства $\sigma_r = \sigma_\theta = (1 - \gamma^2) \sigma_z$ имеем естественное равенство $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$; в случае произвольного допущения равенства скоростей поперечных волн скоростям продольных волн получаем физически недопустимое равенство $\sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_z$.

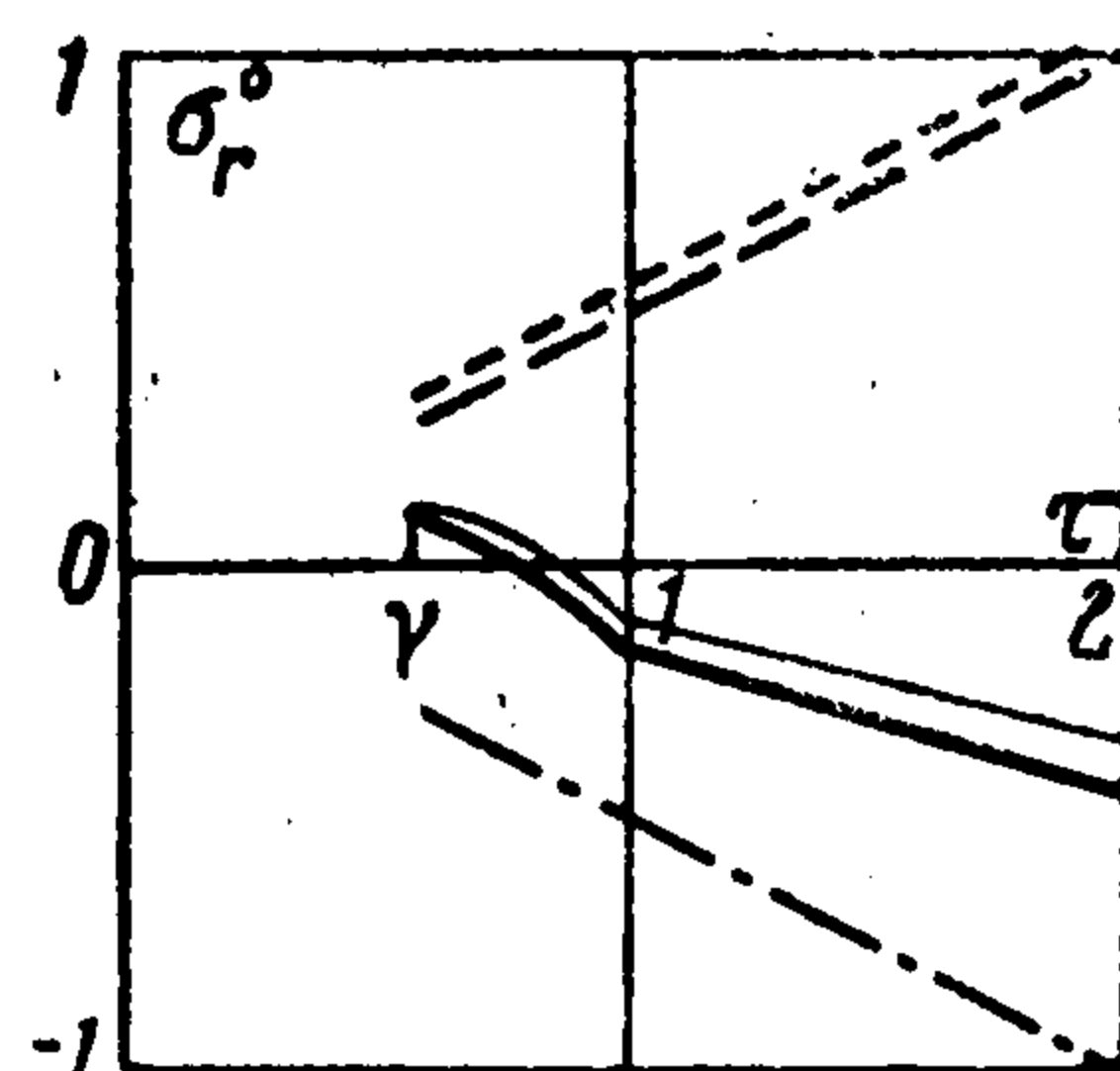
Для сосредоточенного воздействия, когда $\kappa = 0$, смещения w в точке на оси симметрии при $\gamma^2 = 0.33$ описываются с точностью до множителя $1/\pi\mu z$ графиками, изображенными на фиг. 1. На этой фигуре, так же как и на всех последующих, сплошная толстая линия относится к решению для твердого полупространства, тонкая линия — к удвоенному решению для твердой безграничной среды, штрих-линия — к акустической задаче, пунктирная линия — к решению, получающемуся при допущении равенства нулю горизонтальных смещений q во всем полупространстве, а линия тире — точка определяет решение, получающееся при двух допущениях



Фиг. 1

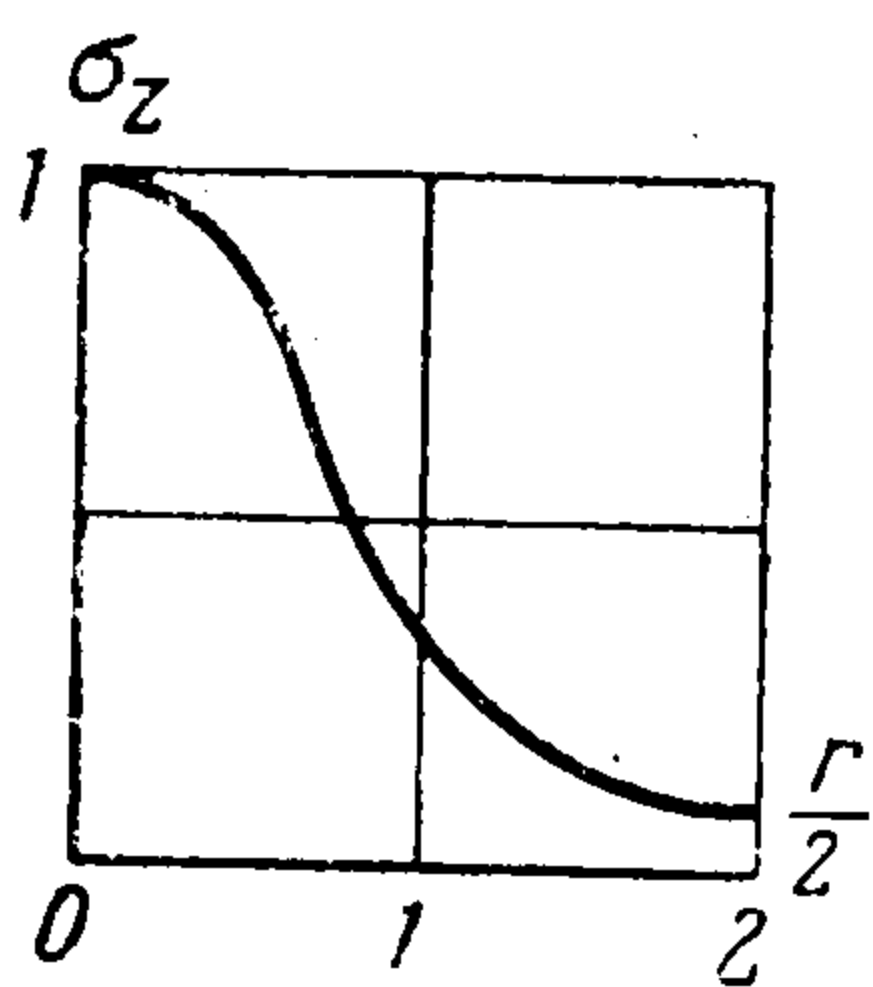


Фиг. 2



Фиг. 3

ниях, сделанных в работе [2] (а именно $q=0$; скорость поперечных волн равна скорости продольных волн). Первообразные σ_z° и $\sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ$ напряжений σ_z и $\sigma_r = \sigma_\theta$ с точностью до множителя $-1/\pi z^2$ изображены соответственно на фиг. 2 и 3. Заметим, что на фиг. 1 пунктирная линия и штрих-линия совпадают в некоторых участках с тонкой сплошной линией, а на фиг. 2 линия-точка совпадает со штрих-линией.

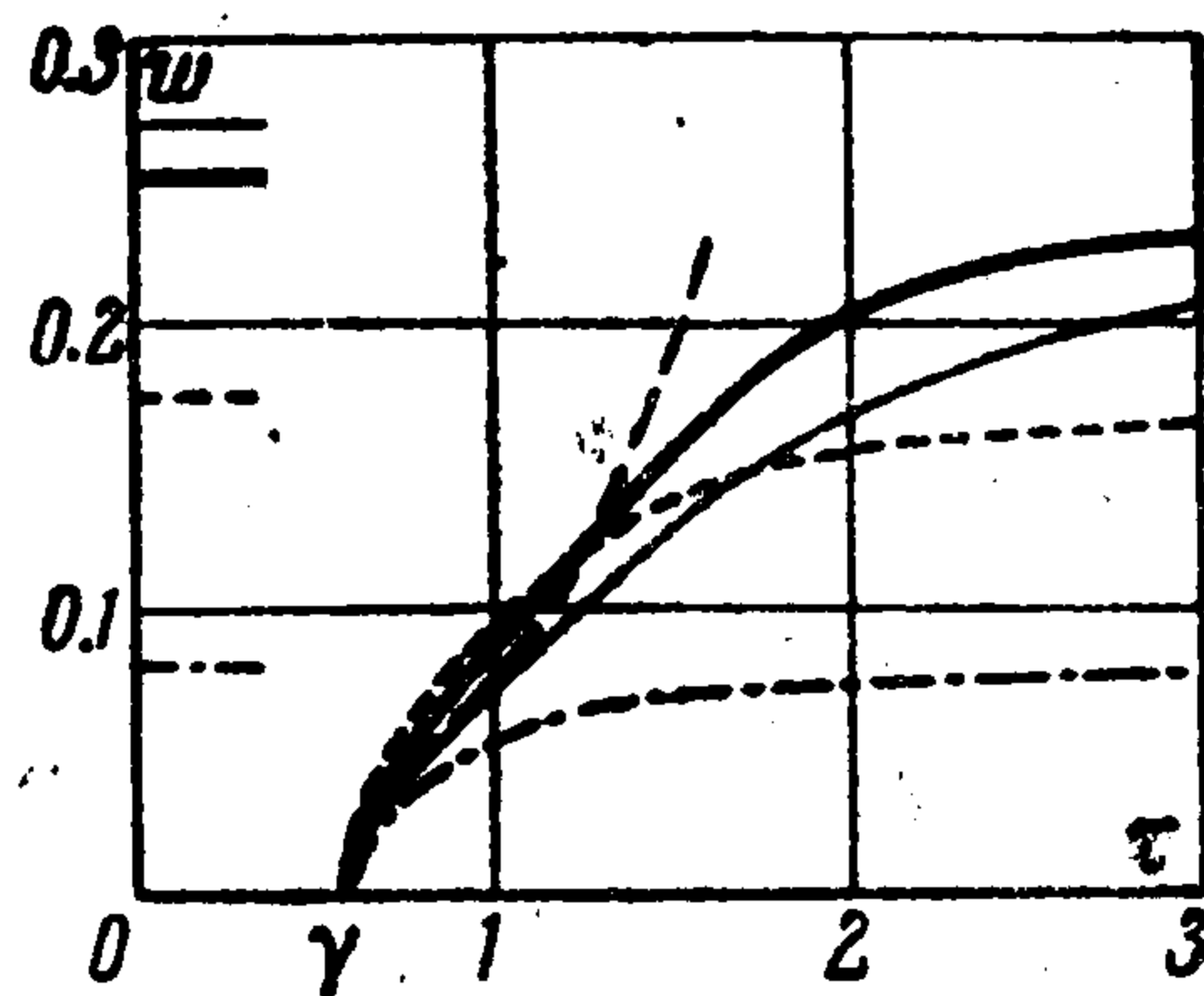


Фиг. 4

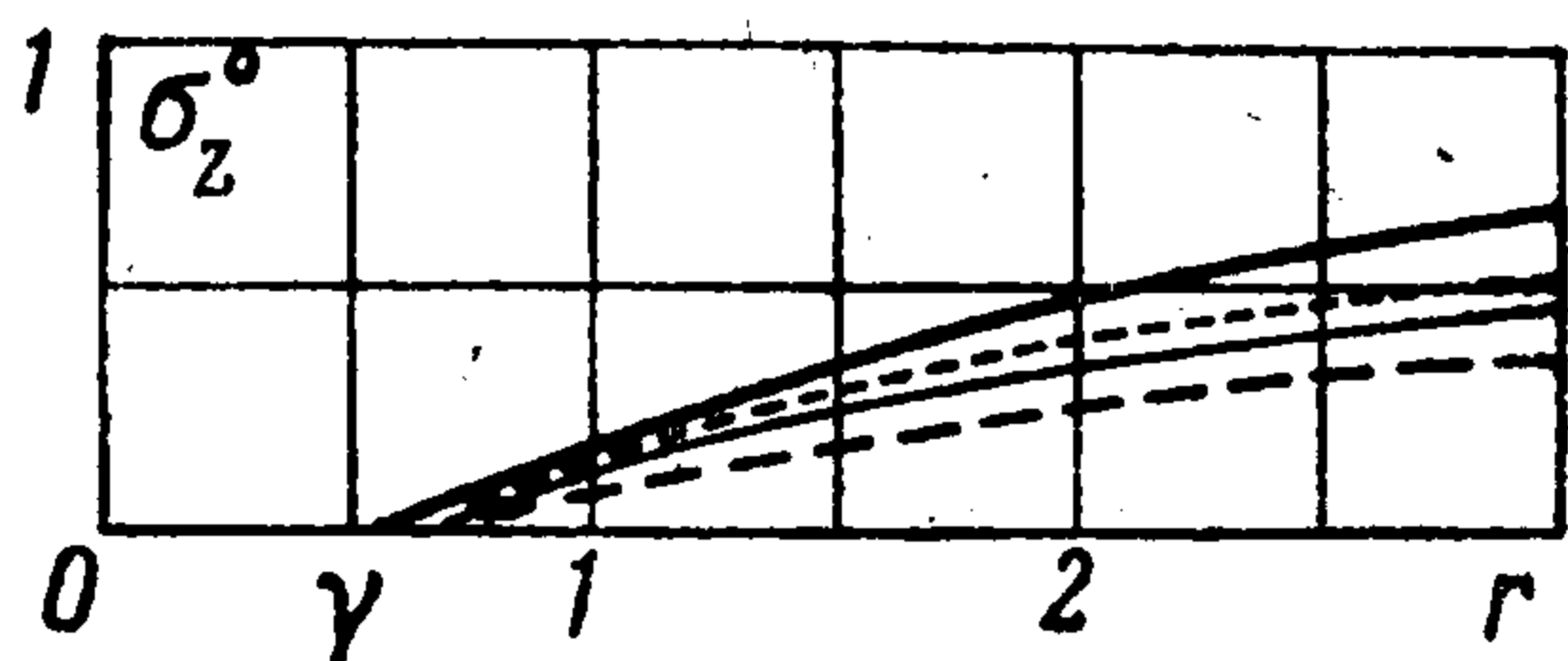
Проводились также оценки волновых полей при значении $\kappa=1$. Распределение усилий по границе $z=0$ (без учета множителя $-1/2\pi z^2$) как функция r/z при этом имеет вид, изображенный на фиг. 4. С точностью до упоминавшихся выше множителей смещения, соответствующие такому воздействию, представлены на фиг. 5, σ_z° — на фиг. 6, а $\sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ$ — на фиг. 7. (На фиг. 6 линия тире-точка совпадает со штрих-линией.)

8. Сравнение графиков показывает, что волновое поле в твердом полупространстве на оси симметрии лучше всего описывается удвоенным решением для безграничной среды. Смещения w и напряжения σ_z также хорошо описываются решением, полученным при допущении равенства нулю горизонтальных смещений q во всем полупространстве. Решение акустической задачи, а также решение, полученное в работе [2] при двух упоминавшихся допущениях, дает заниженные (а для некоторых составляющих и неверные) значения, даже при κ значительно отличающихся от нуля.

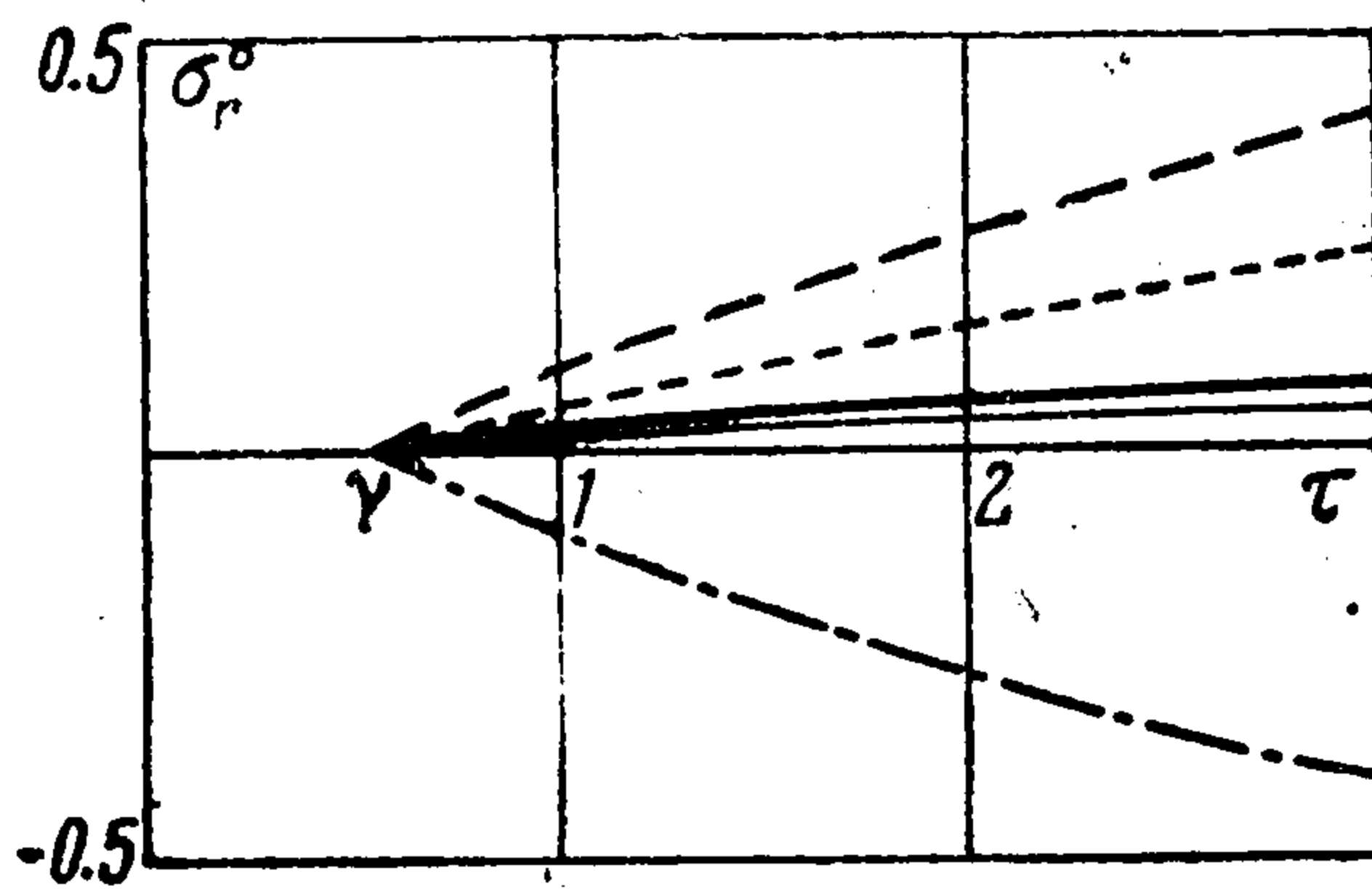
Эта закономерность проявляется и при переходе от воздействия $\varepsilon(t)$ к произвольному воздействию $f(t)$, которое для простоты расчетов удобно приближенно заменять ломаной линией [1]. Если длительность воздействия (или вернее его наиболее быстро меняющаяся часть) превосходит разность времен прихода продольных и поперечных волн (что всегда имеет место в точках, близких к источнику), то, как указывают графики, существенную или даже главную роль в динамическом процессе начинает играть волновое поле позади фронта поперечной волны. Это поле при воздействии $\varepsilon(t)$ приближается к статическому полю, а при упомянутом воздействии $f(t)$ — описывается процессами, которые в нашем понимании и следует считать близкими к квазистатическим колебаниям. При длительных и достаточно плавных воздействиях $f(t)$ резкость изменения поля вблизи



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

фронтов, которая весьма существенна при воздействии $\varepsilon(t)$, оказывается ничтожно малой и процесс полностью становится квазистатическим.

Резкое изменение волнового поля в прифронтной области в случае линейных задач теории упругости играет существенную роль лишь вдали от источника.

Поступила 21 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Огурцов К. И. Волны напряжения в упругой плите. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
2. Рахматулин Х. А. О распространении упруго-пластических волн в полупространстве. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
3. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства. Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, 1951, № 149, вып. 24.