ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ХЛОПКА УДЛИНЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОГО ДАВЛЕНИЯ

В. М. Гончаренко (Киев)

На конкретном примере рассматривается задача статистической теории устойчивости оболочек [1,2] об определении вероятности прощелкивания, если нагрузка лежит в интервале между нижним и верхним критическими значениями. Параметры оболочки при этом считаются фиксированными, и вероятность прощелкивания обуславливается наличием силовых возмущений, представляющих собой некоторый стационарный случайный процесс. Решение задачи связано с изучением нелинейных вынужденных колебаний оболочки (или другой упругой системы, в которой возможно явление перескока) под действием случайных сил и представляет с этой точки зрения дополнительный интерес (такие проблемы возникают, например, в теории аэроупругости). При решении предполагается отсутствие вероятностного последствия при изменении обобщенных координат и скоростей. Известно [3], что это имеет место в том случае, если спектральные плотности возмущений постоянны в области частот собственных колебаний (возмущения типа белого шума). В рассматриваемой задаче оболочку можно трактовать, как систему с одной степенью свободы, поэтому в первом приближении допустимо представление об отсутствии вероятностного последействия в эволюции координат и скоростей, если возмущения и далеки по своим свойствам от белого шума. При этом спектральной плотности возмущений должно быть приписано то ее значение, которое соответствует частоте собственных колебаний. Погрешность такого способа нуждается в исследовании. Есть основания полагать [4], что она сильно убывает с уменьшением демпфирования в системе и времени корреляции возмущений.

Считаю долгом принести глубокую благодарность А. Ф. Вржижевскому за большую помощь при вычислениях, связанных с примером.

1. Рассмотрим удлиненную пологую цилиндрическую панель с радиусом R, шириной b, толщиной h, модуль сжатия и коэффициент Пуассона которой равны E и ν. Будем полагать, что кромки $y = 0$ и $y = b$ (координата y отсчитывается вдоль дуги поперечного сечения) шарнирно скреплены с неподвижными ребрами. Оболочка находится под действием равномерно распределенного поперечного давления, интенсивность которого q случайным образом зависит от времени. Задача состоит в определении вероятности того, что в течение промежутка времени Δt произойдет хлопок оболочки.

Рассмотрим панели с небольшим значением параметра кривизны

$$k = b^2 / Rh \tag{1.1}$$

Предположим [5], что прогиб достаточно точно аппроксимируется выражением

$$w = h\zeta \sin (\pi y / b) \tag{1.2}$$

Определяя обычным способом рассчитанные на единицу длины образующей потенциальную энергию оболочки и внешних сил $Э$ и кинетическую энергию оболочки T, получим

$$Э = \frac{Eh^5}{b^3(1-\nu^2)} Э^*, \quad Э^* = \frac{\pi^4}{32}\zeta^4 - \frac{\pi}{2}k\zeta^3 + \left(\frac{\pi^4}{48} + \frac{2k^2}{\pi^2}\right)\zeta^2 - \frac{2}{\pi}\lambda\zeta, \quad T = b\rho\frac{h^2}{4}\dot{\zeta}^2 \tag{1.3}$$

Здесь ρ — масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности

$$\lambda = \frac{q}{E}\left(\frac{b}{h}\right)^4 (1-\nu^2) \tag{1.4}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение движения составим в форме Лагранжа, включив в него диссипативный член

$$\ddot{\zeta} = -\beta\rho^{-1}\dot{\zeta} - \frac{2Eh^3}{b^4(1-\nu^2)\rho}\frac{dЭ^*}{d\zeta} \tag{1.5}$$

Коэффициент $\beta\rho^{-1}$ может быть выражен через декремент Δ и частоту ω собственных линейных колебаний вокруг недеформированного состояния

$$\beta\rho^{-1} = \omega\Delta\pi^{-1} \tag{1.6}$$

Легко видеть, что

$$\omega^2 = \frac{Eh^3}{b^4(1-\nu^2)\rho}\left(\frac{\pi^4}{12} + \frac{8k^2}{\pi^2}\right) \tag{1.7}$$

Далее полагаем

$$q = Mq + \xi(t) \qquad (Mq = \text{const}) \tag{1.8}$$

и будем трактовать Mq как детерминированную часть нагрузки, а флуктуации $\xi(t)$, представляющие собой центрированный стационарный случайный процесс с известной спектральной плотностью $f_\xi(\omega) = f$, — как ее возмущения. С учетом (1.8) уравнение (1.5) может быть записано в виде

$$\ddot{\zeta} = \beta\rho^{-1}\dot{\zeta} - \frac{dV}{d\zeta} + \frac{4}{\pi h\rho}\xi, \qquad V = \frac{2Eh^3}{b^4(1-\nu^2)\rho}\,\vartheta^*(M\lambda) \tag{1.9}$$

Введем в рассмотрение плотность распределения вероятностей $p(t, \zeta, \dot{\zeta})$, определенную на фазовой плоскости переменных ζ, $\dot{\zeta}$. В силу аргументированного выше предположения о том, что процесс $(\zeta, \dot{\zeta})$ является процессом без последствия (т. е. марковским процессом) функция $p(t, \zeta, \dot{\zeta})$ должна удовлетворять известному уравнению А. Н. Колмогорова [6], которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\dot{\zeta}\frac{\partial p}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}}\left[\left(-\beta\rho^{-1}\dot{\zeta} - \frac{dV}{d\zeta}\right)p\right] + a\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{\zeta}^2}, \qquad a = \frac{16f}{\pi\rho^2h^2} \tag{1.10}$$

Как указывалось, в качестве f должно быть выбрано то значение спектральной плотности возмущений давления $\xi(t)$, которое соответствует частоте ω. Из уравнения (1.10) получается уравнение И. И. Воровича [2] (разумеется в конкретизированной форме), если пренебречь эффектами длительностью порядка $\rho\beta^{-1}$ и считать, что изменение координаты ζ является марковским процессом.

Легко убедиться, что уравнение (1.10) имеет стационарное решение

$$p_0 = C\exp\left[-\frac{\beta}{\rho a}\left(\frac{\dot{\zeta}^2}{2} + V\right)\right] \tag{1.11}$$

Можно отметить его аналогию с распределением Максвелла — Больцмана при наличии силового поля. В то же время соответствующее стационарное решение уравнения И. И. Воровича имеет вид распределения Гиббса.

2. При $\lambda_- < M\lambda < \lambda_+$, где λ_- и λ_+ — нижнее и верхнее критические значения, оболочка имеет три равновесных состояния $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ $(\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3)$. Они являются особыми точками уравнения (1.9) при $\dot{\zeta} = 0$ и корнями уравнения равновесия

$$dV / d\zeta = 0 \tag{2.1}$$

Равновесие в точках ζ_1 и ζ_3 устойчиво по А. М. Ляпунову, в точке ζ_2 — неустойчиво. Предположим, что в начальный момент времени t_0 оболочка находится в невозмущенном состоянии ζ_1 без начальной скорости. Наша задача состоит в определении вероятности хлопка в течение промежутка времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Заметим прежде всего, что следует различать вероятность того, что в течение этого промежутка времени оболочка по крайней мере один раз перейдет в окрестность возмущенного равновесного состояния ζ_3, преодолев потенциальный барьер $H = V(\zeta_2) - V(\zeta_1)$, и вероятность того, что оболочка в момент времени $t_0 + \Delta t$ будет находиться в окрестности состояния ζ_3.

Первая из указанных вероятностей (функция Δt и начальных значений координаты и скорости) удовлетворяет уравнению, сопряженному с (1.10) и соответствующим краевым условиям. При $\Delta t \to \infty$ она стремится к единице. Остановимся на определении второй из указанных вероятностей, обозначив ее $P(* / \Delta t)$.

Известно [7], что любое распределение, удовлетворяющее (1.10), стремится при $t \to \infty$ к распределению (1.11). Поэтому при $\Delta t > \tau$, где τ — время релаксации, вероятность $p(*/\Delta t)$ может быть вычислена по распределению (1.11). Способ такого вычисления указан в работе И. И. Воровича [2].

Разумеется, равновесное распределение (1.11) и, следовательно, вероятность $P(* / \Delta t)$, вычисленная таким образом, не содержат информации об истории оболочки в течение времени релаксации. Поэтому определим вероятность первых ее хлопков, считая промежуток Δt малым по сравнению с τ. В этом случае обе вероятности, упомянутые выше, совпадают. Для нахождения $P(* / \Delta t)$ в этом предположении воспользуемся следующими рассуждениями, принадлежащими Крамерсу [8]. Будем считать (исключительно для удобства терминологии), что функция $p(t, \zeta, \dot{\zeta})$ задает ансамбль в смысле классической статистической физики.

В соответствии с начальными условиями можно положить, что

$$p(t_0, \zeta, \dot\zeta) = \delta(\zeta - \zeta_1)\,\delta(\dot\zeta) \tag{2.2}$$

Представим себе процесс трансформации распределения (2.2) в распределение (1.11). При $t \approx t_0$ в точке ζ_1 имеется избыток систем ансамбля по сравнению с (1.11) (а в точке ζ_3 — недостаток), поэтому в процессе указанной трансформации будет происходить диффузия систем ансамбля от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2. Вероятность $P(*/\Delta t)$ можно определить следующим образом:

$$P(*/\Delta t) = \frac{j\Delta t}{n} \tag{2.3}$$

где j — поток диффузии, отнесенный к единице времени, n — число систем ансамбля в окрестности точки ζ_1.

При определении вероятности первых хлопков естественно считать, что плотность ансамбля в окрестности ζ_3 пренебрежимо мала по сравнению с таковой в окрестности точки ζ_1. Кроме того, ограничимся рассмотрением силовых возмущений сравнительно небольшой энергии, удовлетворяющей условию

$$\rho a \ll \beta H \tag{2.4}$$

Это допущение дает возможность считать указанный поток диффузии стационарным и медленным в том смысле, что появлению заметной вероятности хлопка предшествует установление в окрестности ζ_1 равновесного распределения (1.11). Справедливо, следовательно, соотношение

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\zeta_2, \dot\zeta)\,\dot\zeta\, d\dot\zeta \tag{2.5}$$

Здесь $p_1(\zeta, \dot\zeta)$ удовлетворяет уравнению (1.10) вблизи ζ_2 и условиям

$$p_1 \to p_0 \quad \text{при } \zeta \ll \zeta_2, \qquad p_1 \to 0 \quad \text{при } \zeta \gg \zeta_2 \tag{2.6}$$

Легко убедиться, что этим требованиям удовлетворяет функция

$$p_1 = C \exp\left[-\frac{\beta}{\rho a} V(\zeta_2)\right] \sqrt{\frac{\alpha - \beta\rho^{-1}}{2\pi a}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\rho a}\left(\dot\zeta^2 + \left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2} (\zeta - \zeta_2)^2\right)\right] \times$$
$$\times \int_{+\infty}^{\dot\zeta - a(\zeta - \zeta_2)} \exp\left[-(\alpha - \beta\rho^{-1})\frac{x^2}{2a}\right] dx, \qquad \alpha = \frac{\beta}{2\rho} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\rho^2} - \left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2}} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и интегрируя, находим

$$j = C\left(\frac{a\rho}{\beta}\right) \sqrt{\frac{\alpha - \beta\rho^{-1}}{\alpha}} \exp\left[-\frac{\beta}{a\rho} V(\zeta_2)\right] \tag{2.8}$$

При вычислении n, как указывалось, предполагается, что вблизи ζ_1 осуществляется равновесное распределение (1.11). Имеем

$$n \approx C \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\beta}{\rho a}\left[\frac{\dot\zeta^2}{2} + V(\zeta_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_1} (\zeta - \zeta_1)^2\right]\right\} d\zeta\, d\dot\zeta =$$
$$= C \exp\left[-\frac{\beta}{\rho a} V(\zeta_1)\right] 2\pi \frac{a\rho}{\beta} \sqrt{\left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_1}} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.3), получим

$$P(*/\Delta t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sqrt{-\frac{(d^2V/d\zeta^2)_{\zeta_1}}{(d^2V/d\zeta^2)_{\zeta_2}}} \left[\sqrt{\frac{\beta^2}{4\rho^2} - \left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2}} - \frac{\beta}{2\rho}\right] \exp\left(-\frac{\beta}{\rho a} H\right) \tag{2.10}$$

Формула (2.10) получена из представления о процессе $(\zeta, \dot\zeta)$ как марковском. Если, следуя И. И. Воровичу [2], пренебречь эффектами длительностью порядка $\rho\beta^{-1}$ и считать ζ марковским процессом, то аналогичные рассуждения дают [9]

$$P(*/\Delta t) = \frac{\Delta t \rho}{2\pi\beta} \sqrt{-\left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_1} \left(\frac{d^2V}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2}} \exp\left(-\frac{\beta}{\rho a} H\right) \tag{2.11}$$

Известно, например, что для стальных конструкций $\Delta = 0.005 \div 0.05$. Из (1.6) в этом случае следует, что, пользуясь формулой (2.11), пренебрегаем эффектами с длительностью порядка нескольких десятков периодов собственных колебаний.

Подчеркнем еще раз, что формулы (2.10) и (2.11) справедливы при условии $\Delta t \ll \tau$. Время релаксации τ можно определить как время, необходимое для того, чтобы вследствие наличия потока диффузии j плотность ансамбля в точке ζ_3 достигла значения, вычисленного согласно (1.11). Очевидно, чем больше j, тем меньше τ. По формуле (2.8), можно заключить, что время релаксации уменьшается с увеличением a, т. е. спектральной плотности возмущений, и увеличивается с увеличением Δ, т. е. затухания. Количественную оценку τ по формуле (2.8), разумеется, сделать нельзя, так как она справедлива лишь для моментов времени, когда плотность ансамбля в ζ_3 еще пренебрежимо мала.

В дальнейшем рассмотрим вероятность $P(*/2\pi\omega^{-1})$, отнесенную к периоду собственных колебаний $2\pi\omega^{-1}$. Введем безразмерные параметры

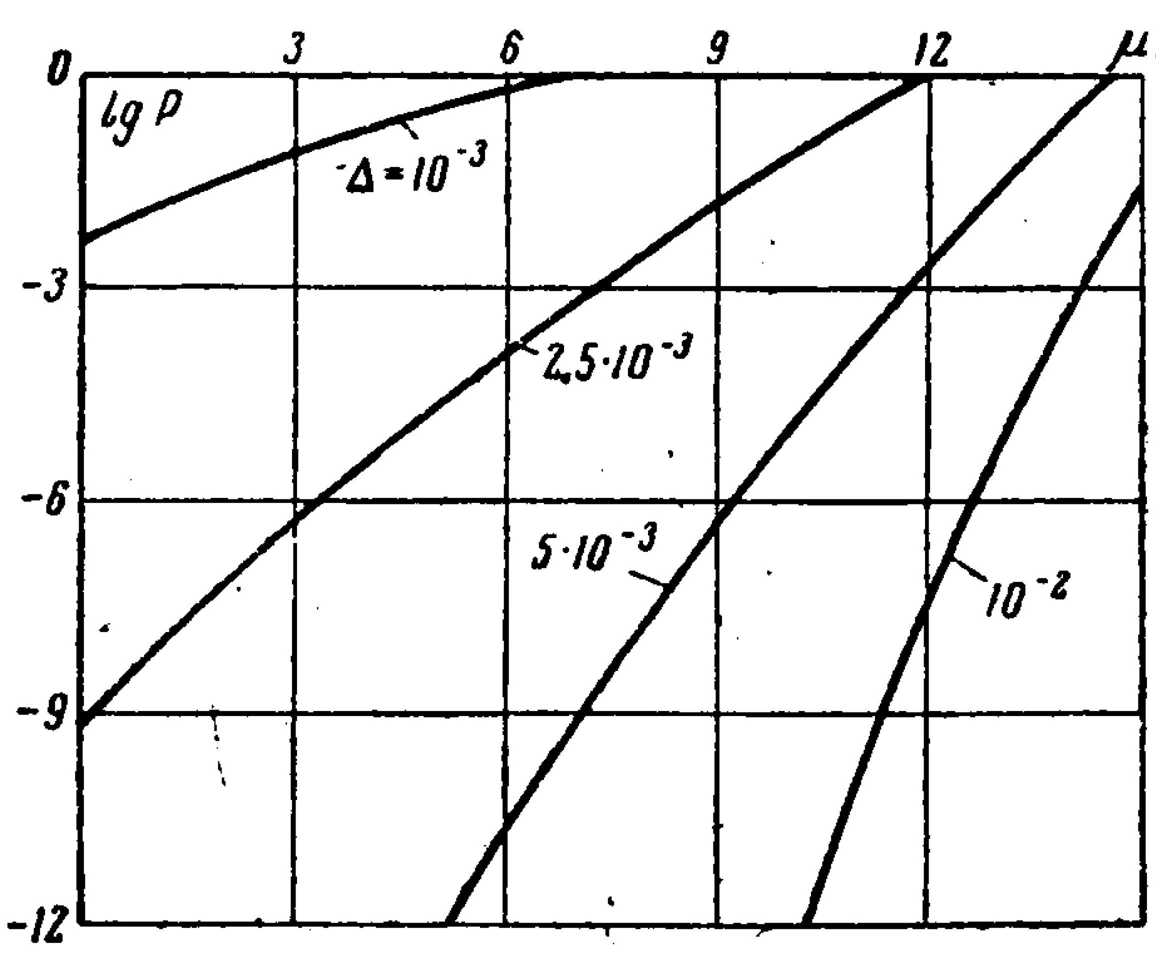
$$\delta = h/b, \qquad \varphi = f\omega / E^2 \tag{2.12}$$

Формулы (2.10) и (2.11) принимают вид

$$P(*/2\pi\omega^{-1}) = \sqrt{-\frac{(d^2\vartheta^*/d\zeta^2)_{\zeta_1}}{(d^2\vartheta^*/d\zeta^2)_{\zeta_2}}}\left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4\pi^2} - \frac{2}{\Lambda}\left(\frac{d^2\vartheta^*}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2}} - \frac{\Delta}{2\pi}\right]\exp\frac{-\delta^8\Delta\Lambda H^*}{2(1-\nu^2)^2\varphi} \tag{2.13}$$

$$P(*/2\pi\omega^{-1}) = \frac{2\pi}{\Delta\Lambda}\sqrt{-\left(\frac{d^2\vartheta^*}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_1}\left(\frac{d^2\vartheta^*}{d\zeta^2}\right)_{\zeta_2}}\exp\frac{-\delta^8\Delta\Lambda H^*}{2(1-\nu^2)^2\varphi} \qquad \left(\Lambda = \frac{\pi^4}{12} + \frac{8k^2}{\pi^2}\right) \tag{2.14}$$

3. Ниже изложены результаты вычислений, выполненных по формулам (2.13) и (2.14) для алюминиевой панели при $k = 10$, $h = 1.6$ *мм*, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-2}$ и $\Delta t = 10 \cdot 2\pi\omega^{-1}$. Для определенности значение спектральной плотности f взято соответствующим акустическому давлению на фюзеляж самолета «Комета» 1. Значения ζ_1 и ζ_2 находились графически. Верхняя критическая нагрузка λ_+ оказывается равной 19.1, а нижняя λ_- — отрицательной.



На фигуре представлена зависимость $P(*/\Delta t)$, вычисленная по (2.14), от $M\lambda$ при различных значениях Δ. Можно отметить наличие значительной вероятности хлопка при нагрузках, меньших λ_+. Например, при $\Delta = 10^{-3}$, начиная с $M\lambda = 6.9$, вероятность хлопка практически равна единице. Отметим, что для значений $M\lambda$, соответствующих точкам кривых, условие (2.4) выполняется достаточно точно.

Выше отмечалось, что отношение s вероятности хлопка, вычисленной по формуле (2.14), к вероятности, вычисленной по более точной формуле (2.13), должно стремиться к единице при увеличении Δ. Приводим значения s, вычисленные для некоторых значений Δ при трех значениях $M\lambda$

$\Delta\, 10^3 =$	2	4	6	8	20	40	60	
$s\, 10^{-2} =$	20	9.8	6.6	4.8	2.0	0.98	0.65	($M\lambda$=6.7)
$s\, 10^{-2} =$	19	9.5	6.3	4.7	1.9	0.95	0.63	($M\lambda$=9.7)
$s\, 10^{-2} =$	18	9.0	6.0	4.5	1.8	0.89	0.61	($M\lambda$=13)

Как видно, в физически осуществимых границах Δ формула (2.14) сильно завышает результат.

Из фигуры и непосредственно из (2.13), (2.14) легко заключить, что вероятность хлопка оказывается очень чувствительной к изменению нагрузки $M\lambda$, декремента затухания Δ, геометрических и физических характеристик оболочки; это может быть причиной неоднократно отмечавшегося разброса экспериментальных данных.

При числовых подсчетах, связанных с этим примером, мне оказал помощь Л. Ф. Вржижевский; приношу Л. Ф. Вржижевскому глубокую благодарность.

Поступила 11 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1961.
2. Ворович И. И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Doob D. The elementary Gaussian processes, Ann. of Math. Statistics, 1944, № 3.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во Сов. Радио, 1961.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехтеориздат, 1956.
6. Колмогоров А. Н. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichke-itsrechnung Math. Annalen, 1937, 104.
7. Яглом А. М. О статистической обратимости брауновского движения. Матем. сб., 1949, 24/66.
8. Kramers H. A. Brownian Motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, Physica, 1940, 7.
9. Гончаренко В. М. Применение марковских процессов в статистической теории устойчивости оболочек, Украин. матем. журнал, 1962, 14, № 2.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К. И. Огурцов, Л. С. Пахоменко, А. И. Сутягина

(Ленинград)

Во многих работах, появившихся в последнее время в печати, точные решения одних динамических задач теории упругости заменяются точными решениями других более простых задач или же приближенными решениями. При этом в ряде случаев не оценивается допускаемая погрешность и не определяются области возможного применения получаемых формул. Чтобы уменьшить вероятность возникновения ошибочных выводов, к которым при этом приходят, полезно сравнивать, где это возможно, результаты точных и приближенных оценок.

Значительная часть выполненных ранее исследований относится к окрестности оси симметрии волновых процессов в средах с плоско-параллельными границами. В этой окрестности меньше сказываются краевые эффекты, обуславливающие в твердых телах вдали от оси появление более сложных боковых и поверхностных (релеевских) волн. Однако и на оси при определенных встречающихся на практике граничных условиях волновые поля в различных задачах могут значительно отличаться одно от другого.

В статье [1] на основе качественного анализа уже утверждалась недопустимость расчетов по формулам акустического приближения напряжений на оси симметрии внутри среды в случае сосредоточенной силы, прикладываемой по нормали к поверхности. В предлагаемой работе в случае сосредоточенного и распределенных воздействий производится сравнение рассчитанных полей смещений и напряжений по точным формулам для полупространства и безграничной среды, по формулам акустического приближения и по формулам, получаемым при допущениях, сделанных в работе [2] (где полагались равными нулю горизонтальные смещения во всем полупространстве, а затем приравнивалась скорость распространения поперечных волн скорости распространения продольных волн).

Точные решения задач о колебаниях полупространства под действием усилий, прилагаемых на границе, неоднократно определялись в интегральной форме различными методами. Однако в силу некоторой сложности формул количественные исследования этих решений даже в случае сосредоточенного воздействия не проведены достаточно полно. В случае же различных распределенных воздействий получены пока лишь некоторые частные результаты. Учитывая это, представлялось целесообразным (из экономии места и времени) не останавливаться на выводе известных решений, а формулировать граничные и начальные условия и выписывать формулы для рассматриваемых волновых полей.