ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Куршин Л. М. Об устойчивости стержней и пластинок в условиях ползучести. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 3.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. Качанов Л. М. Основные теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
5. Hill R. New horisons in the mechanics of Solids; Journal of the Mech. and Phys. of Solids, 1956, 5, № 1. (Русск. пер.: Хилл Р. Сб. пер. Механика, ИЛ, 1957, № 4.)
6. Шестериков С. А. Об одном вариационном принципе в теории ползучести. Изв. ОТН АН СССР, 1957, № 2.

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович (Ростов-на-Дону)

В докладе на Всесоюзной конференции по теории и применениям тонких оболочек (Тарту, 1957) автором был предложен подход к построению статистической теории устойчивости оболочек. Основные черты этого подхода изложены в статье [1].

В основе рассмотрений лежит предположение о том, что все факторы, определяющие случайный характер изгиба оболочки, разделяются на три группы:

1) рассеяние упругих, геометрических параметров оболочки; параметров, определяющих способ заделки оболочки.

Предполагается, что параметры этой группы $a_1, \ldots, a_n$ от времени не зависят и задан их совокупный закон распределения $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Сюда же можно включить и постоянные по времени случайные составляющие внешних сил;

2) непрерывная случайная часть внешних нагрузок (для простоты считаем, что налицо только нормальная составляющая внешних сил), которую будем аппроксимировать соотношением

$$Z^{(3)}(P, t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \chi_k(P) \psi_l(t) \tag{1}$$

В этой формуле $\chi_k(P)$ и ψ_l — некоторые детерминированные функции координат времени, причем $\chi_k(P)$ образуют базис в пространстве «энергий» [2]. Будем считать, что случайный процесс $Z^{(3)}(P, t)$ определяется законом распределения $\theta(a_{kl})$ случайных величин a_{kl};

3) случайная часть внешних нагрузок, вызывающая ускорения типа ускорений броуновского движения.

Будем искать приближенное решение задачи об изгибе пластины в виде

$$W = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) \chi_k(P) \tag{2}$$

а $q(t)$ определять по методу Бубнова — Галеркина. В этом случае в предположении независимости всех трех групп факторов получена следующая формула для закона распределения случайных величин q_k, справедливая при достаточно больших

$$F(q_1, \ldots, q_n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_1, \ldots, q_n, t, a_k, a_{kl}) \varphi(a_k) \theta(a_{kl}) da_k da_{kl} \tag{3}$$

где f определяется из уравнения Смолуховского [3].

Если рассматривать стационарное распределение, то оно дается соотношением

$$F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{J} e^{-\mu^2 U(q, a_k)} \varphi(a_k) da_k \quad \left(J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 U(s, a_k)} ds\right) \tag{4}$$

Здесь $U(q, a_k)$ — потенциальная энергия системы оболочка—детерминированная часть внешних сил, μ^2 — некоторый параметр, J — нормирующий множитель. О статистическом и механическом смысле параметра μ смотри в работе [1-4].

Ниже принимается некоторое предположение, для формулировки которого рассмотрим уравнения для определения q_k при фиксированных a_k

$$\partial U / \partial q_k = 0 \tag{5}$$

Допустим, что из этих уравнений q_k определяется соотношениями

$$q_k{}^\circ = A_k(a) \tag{6}$$

которые осуществляют однозначное преобразование области значений параметров a в q°. Заметим, что это условие фактически лежит в основе всех соотношений работы [5], так как в рамках предположений этой работы нет возможности разделить вероятность между отдельными ветвями в случае многозначности соотношений [6].

Допустим далее, что q_k однозначно выражается из (5), (6) через $q_k{}^\circ$, так что

$$a_k = B_k(q^\circ) \tag{7}$$

Это предположение не является существенным (см. примечание 2) и вводится здесь только для упрощения выкладок.

Поставим цель получить асимптотические представления $F(q)$ при больших значениях μ. Для этого прежде всего заметим, что в формуле (4), используя соотношение (7), можно перейти к интегрированию по $q_k{}^\circ$, что приводит к соотношению

$$F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{J} e^{-\mu^2 U(q, q^\circ)} \varphi(B_k) M(q^\circ) dq^\circ, \quad M = \left| \frac{\partial a}{\partial q^\circ} \right| \tag{8}$$

M есть модуль якобиана преобразования от a_k к $q_k{}^\circ$. Обратимся вначале к исследованию асимптотики J при $\mu \to \infty$. Для этого рассмотрим структуру потенциальной энергии $U(s, q^\circ)$. В принятых нелинейных теориях оболочек потенциальная энергия есть полином четвертой степени относительно обобщенных координат. Далее, q° есть точка равновесия, поэтому

$$U(s, q^\circ) = \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}(q^\circ)(s_i - q_i{}^\circ)(s_k - q_k{}^\circ) + \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ijk}(q^\circ)(s_i - q_i{}^\circ)(s_j - q_j{}^\circ)(s_k - q_k{}^\circ) + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} U_{ijkl}(q^\circ)(s_i - q_i{}^\circ)(s_j - q_j{}^\circ)(s_k - q_k{}^\circ)(s_l - q_l{}^\circ) \tag{9}$$

Помимо того, q° — единственная точка равновесия, поэтому другух экстремумов, кроме q°, функция $U(s, q^\circ)$ иметь не будет.

Совершим в интеграле (4) замену переменных

$$\mu(s_i - q_i{}^\circ) = t_i, \qquad \mu(q_i{}^\circ - q_i) = x_i \tag{10}$$

При этом получим

$$U\left(\frac{t+x}{\mu} + q, \frac{x}{\mu} + q\right) = \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{t_i t_k}{\mu^2} + \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ijk}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{t_i t_j t_k}{\mu^3} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} U_{ijkl}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{t_i t_k t_j t_l}{\mu^4} \tag{11}$$

Предполагая достаточную степень гладкости функций в правой части (11), при больших μ получим следующее представление

$$U = \frac{Q_2(q, t)}{\mu^2} + \frac{Q_3(q, x, t)}{\mu^3} + \frac{Q_4(q, x, t)}{\mu^4} + \ldots \tag{12}$$

где

$$Q_2(q, t) = \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}(q \quad {}_i t_k$$

$$Q_3(q, x, t) = \sum_{i,k=1}^{n} t_i t_k \sum_{\alpha_1 + \ldots \alpha_n = 1} R^{(ik)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1{}^{\alpha_1}, \ldots, x_n{}^{\alpha_n} + \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ijk}(q) t_i t_j t_k \tag{13}$$

$$Q_4(q, x, t) = \sum_{i,k=1}^{n} t_i t_k \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=2} R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(ik)}(q)\, x_1^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} t_i t_k t_j \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=1} S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(ijk)} x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \tag{14}$$

$$\partial_p(q, x, t) = \sum_{i,k=1}^{n} t_i t_k \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=p-2} R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(ik)} x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n} t_i t_k t_j \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=p-2} S_{\alpha_1+\ldots\alpha_n}^{(ijk)} x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} t_i t_j t_k t_l \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=p-2} T_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(ijkl)} x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \tag{15}$$

В формулах (13) — (15) величины R, S, T выражаются через производные от U_{ik}, U_{ikj}, U_{ikjl}. Из соотношения (12) вытекает сразу следующее разложение:

$$J\left(\frac{x}{\mu} + q\right) = \frac{1}{\mu^n} J_0(q) + \frac{1}{\mu^{n+1}} J_1(q, x) + \frac{1}{\mu^{n+2}} J_2(q, x) + \ldots \tag{16}$$

где

$$J_0(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q_2(q,t)}\, dt, \quad J_1(q, x) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q_2(q,t)}\, Q_3(q, x, t)\, qt$$

$$J_2(q, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q_2(q,t)} \left(\frac{Q_3^2}{4} - Q_4\right) dt \text{ и т. д.} \tag{17}$$

Из (16), в свою очередь, вытекает разложение

$$J^{-1}\left(\frac{x}{\mu} + q\right) = \frac{\mu^n}{J_0}\left(1 + \frac{K_1}{\mu} + \frac{K_2}{\mu^2} + \ldots\right) \tag{18}$$

$$K_1(q, x) = -\frac{J_1(q,x)}{J_0(q)}, \qquad K_2(q, x) = -\frac{J_2(q, x)}{J_0(q)} + \frac{J_1^2(q, x)}{J_0^2(q)} \tag{19}$$

Обратимся теперь к представлению $U(q, q^\circ)$. В соответствии с (9) имеем

$$U(q, q^\circ) = \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}(q^\circ)(q_i - q_i^\circ)(q_k - q_k^\circ) + \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ijk}(q^\circ)(q_i - q_i^\circ)(q_j - q_j^\circ) \times$$

$$\times (q_k - q_k^\circ) + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} U_{ijkl}(q^\circ)(q_i - q_i^\circ)(q_i - q_i)(q_k - q_k^\circ)(q_l - q_l^\circ) \tag{20}$$

Подставив в (20) второе из соотношений (10), будем иметь

$$U(q, q^\circ) = \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{x_i x_k}{\mu^2} + \sum_{i,j,k=1}^{n} U_{ijk}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{x_i x_j x_k}{\mu^3} +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} U_{ijkl}\left(\frac{x}{\mu} + q\right)\frac{x_i x_j x_k x_l}{\mu^4} \tag{21}$$

Из (21) следует

$$U(q, q^\circ) = \frac{\Pi_2(q, x)}{\mu^2} + \frac{\Pi_3(q, x)}{\mu^3} + \ldots \tag{22}$$

где

$$\Pi_i(q, x) = Q_i(q, x, t)\,|_{t=x}, \qquad i \geqslant 2 \tag{23}$$

Из (22) получаем

$$e^{-\mu^2 U(q, q^\circ)} = e^{-\Pi_2(q, x)}\left[1 + \frac{\Phi_1(q, x)}{\mu} + \frac{\Phi_2(q, x)}{\mu^2} + \ldots\right] \tag{24}$$

где

$$\Phi_1(q, x) = -\Pi_3(q, x), \qquad \Phi_2(q, x) = \frac{1}{2}\Pi_3^2 - \Pi_4 \tag{25}$$

Кроме того, в предположении достаточной гладкости φ и M имеем

$$M(q^\circ) = M\left(\frac{x}{\mu}+q\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^k} \sum_{\alpha_1+\ldots\alpha_n=K} M_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(q)\, x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \tag{26}$$

$$M_{0,0,\ldots,0} = M(q)$$

$$\varphi(B_k) = \varphi\left\{B_1\left(\frac{x}{\mu}+q\right),\ B_2\left(\frac{x}{\mu}+q\right)\ldots B_n\left(\frac{x}{\mu}+q\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^k}\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(q)\, x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n}$$

$$\varphi_{0,\ldots,0} = \varphi(B(q)) \tag{27}$$

В формулах (26), (27) величины $M_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ и $\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ выражаются через производные M, φ, B_k. Эти формулы удобно представить в следующем виде:

$$M(q^\circ) = M(q) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k(q,x)}{\mu^k}, \qquad \varphi(B(q^\circ)) = \varphi(B(q)) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(q,x)}{\mu^k} \tag{28}$$

где M_k, φ_k — некоторые полиномы относительно x_i.

После этих предварительных разложений перейдем к формуле (8) для $F(q)$. Сделаем в этом интеграле вторую из подстановок (10). В результате получаем

$$F(q) = \frac{1}{\mu^n}\int_{-\infty}^{\infty} J^{-1}\left(\frac{x}{\mu}+q\right)\varphi\left\{B_1\left(\frac{x}{\mu}+q\right)\cdots B_n\left(\frac{x}{\mu}+q\right)\right\} M\left(\frac{x}{\mu}+q\right) e^{-\Pi_2}\left(1+\frac{\Phi_1}{\mu}+\right.$$

$$\left.+\ldots\right)dx = \frac{1}{J_0(q)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Pi_2(q,x)}\left(1+\frac{K_1}{\mu}+\frac{K_2}{\mu_2}+\ldots\right)\left[\varphi(B(q))+\frac{\varphi_1}{\mu}+\ldots\right]\left[M(q)+\right.$$

$$\left.+\frac{M_1}{\mu}+\ldots\right]\left(1+\frac{\Phi_1}{\mu}+\ldots\right)dx \tag{29}$$

Учтем теперь, что вследствие (23) имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Pi_2(q,x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q_2(q,t)}dt = J_0(q) \tag{30}$$

Из (29), (30) сразу вытекает

$$F(q) = \varphi(B(q))\,M(q) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k(q)}{\mu^k} \tag{31}$$

где

$$F_1(q) = \frac{1}{J_0(q)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Pi_2(q,x)}\,[\varphi M(K_1+\Phi_1)+\varphi M_1+\varphi_1 M]\,dx \tag{32}$$

$$F_2(q) = \frac{1}{J_0(q)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Pi_2(q,x)}\,[\varphi_2 M+\varphi_1 M_1+\varphi M_2+(K_1+\Phi_1)(\varphi M_1+\varphi_1 M)+\varphi M(K_2+$$

$$+K_1\Phi_1+\Phi_1+\Phi_2)]\,dx \quad \text{и т. д.} \tag{33}$$

Формула (31) и доставляет искомое асимптотическое разложение. Зная разложение (31), можно найти асимптотические разложения и для любых других случайных величин, функционально связанных с $q_1,\ldots,q_n$.

Как видно из вывода формулы (31) при расчете F_k приходится вычислять довольно большое число квадратур. Однако все эти квадратуры имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(s_1,\ldots,s_n)}s_1^{\alpha_1},\ldots,s_n^{\alpha_n}\,ds_1,\ldots,ds_n \qquad (\alpha_i \geqslant 0) \tag{34}$$

где A — положительно определенная квадратичная форма, α — целые числа. Такие квадратуры, как известно, легко выражаются через элементарные функции. Разложение (31) может оказаться полезным при больших значениях μ. Можно дать строгое обоснование этому разложению, что, однако, не представляется столь важным на данном этапе развития теории. Отметим, что при $\mu=\infty$ из (31) получаем

$$F(q) = \varphi(B(q))\,M(q) \tag{35}$$

Формула (35) есть основное соотношение так называемого „квазистатического подхода" к использованию вероятностных методов в теории оболочек [4].

В самом деле, в соответствии с этим подходом из всех случайных факторов, воздействующих на оболочку, учитываются лишь a_k. Закон распределения $q_k{}^\circ$ определяется по элементарным формулам теории вероятностей, дающим зависимость между законами распределения функционально связанных случайных величин. В рассматриваемом случае для соотношений (7) будем иметь

$$F(q^\circ)\,dq^\circ = \varphi(B(q^\circ))\,da_k \tag{36}$$

Из (36) получаем

$$F(q^\circ) = \varphi(B(q^\circ))\left|\frac{\partial a}{\partial q^\circ}\right| = \varphi(B(q^\circ))\,M(q^\circ) \tag{37}$$

т. е. нулевой член асимптотического разложения (31).

Таким образом, соотношения работы [5] получаются из формулы (3) после ряда дополнительных упрощающихся допущений. Это обстоятельство, впрочем, ясно также и из общих соображений.

Примечание 1. В данной заметке рассматривался случай, когда число обобщенных параметров a равно числу случайных параметров a. Разумеется, не представляет труда получить асимптотическое разложение и соответствующие выводы для случая, когда число параметров q меньше числа параметров a.

Примечание 2. В случае, если a_k оказываются многозначными функциями q_k, весь вывод асимптотической формулы останется неизменным и только лишь после перехода от a_k к $q_k{}^\circ$ в интеграле (8) он примет следующий вид:

$$F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{J}\, e^{-\mu^2 U(q,q^\circ)} \sum_{m=1}^{p} \varphi(B_k{}^m)\left|\frac{\partial a_m}{\partial q^\circ}\right| dq^\circ \tag{38}$$

В формуле $B_k{}^m$, $\alpha_k{}^m$ соответствуют m-ой ветви, p — общее число ветвей для данного q°. При этом, соответственно, нулевой член разложения (31) примет вид

$$F_0 = \sum_{m=1}^{p} \varphi(B_k{}^m)\left|\frac{\partial a^m}{\partial q^\circ}\right| \tag{39}$$

Примечание 3. Асимптотическое разложение (31) можно использовать и в том случае, когда соотношения (5) неоднозначно разрешимы, но имеется значительная разница в уровне потенциальной энергии. Если же имеется несколько форм равновесия с близкими уровнями энергии, то разложение (31) изменит свой вид, хотя и в этом случае его нетрудно получить.

Примечание 4. Использованный в данной работе прием вывода асимптотических рядов можно употребить и тогда, когда речь идет не о распределении q_k, а о распределении других параметров задачи.

Например, зная распределение (3) или (4), можно найти вероятность p хлопка в системе, для которой также легко получить асимптотическое разложение вида (28). При этом нулевой член разложения дает закон распределения верхнего критического числа. Это видно хотя бы из того, что если учитывать только рассеяние параметров a_k (как это делается в работе [5]), то при каждой реализации параметров a_k хлопок может произойти лишь при достижении нагрузкой верхнего критического значения.

Поступила 11 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ, 1959, т. XXIII, № 5.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., ГИТТЛ, 1957.
3. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., ГИИЛ, 1947.
4. Гончаренко В. М. Марковские процессы в теории устойчивости оболочек. Украинск. математ. ж., 1962, № 2.
5. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругости оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.