НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ МАЛЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

И. Г. Терегулов (Казань)

Предполагается, что перемещения малы и полные деформации слагаются из деформаций ползучести и мгновенных упруго-пластических деформаций. Мгновенность понимается в том смысле, что за время приложения или снятия нагрузок ни явления ползучести, ни явления релаксации не успевают проявить себя заметным образом.

1. Обозначим через $\mathbf{U}$ вектор полного перемещения, через $\mathbf{u}$ — вектор упруго-пластических перемещений, через $\mathbf{v}$ — вектор перемещений ползучести. Таким образом, $\mathbf{U}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Для полной деформации ε_{ik}, деформации ползучести p_{ik} и для упруго-пластических деформаций q_{ik} соответственно получим

$$\begin{gathered}2\varepsilon_{ik}=\nabla_i U+\nabla_k U_i, \qquad 2p_{ik}=\nabla_i v_k+\nabla_k v_i, \qquad 2q_{ik}=\nabla_i u_k+\nabla_k u_i \\ \varepsilon_{ik}=q_{ik}+p_{ik}, \qquad U_k=\mathbf{U}\cdot\mathbf{r}_k, \qquad u_k=\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_k, \qquad v_k=\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_k\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь ε_{ik}, p_{ik} и q_{ik} — ковариантные составляющие соответствующих тензоров деформации; нелинейные члены в (1.1) опущены в силу предположения о малости перемещений; кроме того, здесь введены обозначения: $\nabla_i(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике с метрическим тензором $g_{ik}=\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k$ — координатные векторы криволинейной системы отсчета x^i $(i=1,2,3)$, введенной в объеме тела V. Для скорости деформации ползучести ξ_{ik} получим

$$2\xi_{ik}=\nabla_i\dot v_k+\nabla_k\dot v_i, \qquad \dot v_i=\frac{dv_i}{dt}, \qquad \xi_{ik}=\frac{dp_{ik}}{dt} \tag{1.2}$$

Соотношения ползучести возьмем по теории течения [1]

$$\xi_{ik}=\frac{3}{2}g(\Gamma,T)(\sigma_{ik}-g_{ik}\sigma), \qquad \Gamma=\int_0^t H\,dt, \qquad T^2=\frac{3}{2}(\sigma^{ik}\sigma_{ik}-3\sigma^2) \tag{1.3}$$

$$H^2={}^2/_3\,\xi_{ik}\xi^{ik}, \qquad 3\sigma=\sigma^{ik}g_{ik}=\sigma_i^i, \qquad \xi=\xi_{ik}g^{ik}=\xi_i^i=0$$

Здесь σ^{ik} — контравариантные составляющие тензора напряжений. Функция $g(\Gamma,T)$ подлежит экспериментальному определению и выбирается в форме [1,2]

$$g(\Gamma,T)=A\Gamma^{-d}T^{n-1} \qquad (A,\,d,\,n=\mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Из соотношений (1.3) следует

$$H=g(\Gamma,T)\,T \tag{1.5}$$

При решении задач удобно пользоваться следующим утверждением.

Среди всех состояний, допускаемых кинематическами связями (1.2) внутри тела и кинематическими связями на границе, на самом деле имеют место лишь те, которые сообщают стационарное (минимальное) значение функционалу

$$J=\iiint_V A^{-\mu}\Gamma^{d\mu}\frac{H^{1+\mu}}{1+\mu}\,dV-\iiint_V \mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{v}}\,dV-\iint_S \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{v}}\,dS \qquad \left(\mu=\frac{1}{n}\right) \tag{1.6}$$

Обозначим через δN мощность внешних поверхностных нагрузок $\mathbf{P}$ и массовых сил $\mathbf{Q}$ на вариациях скоростей перемещений ползучести

$$\delta N=\iiint_V \mathbf{Q}\cdot\delta\dot{\mathbf{v}}\,dV+\iint_S \mathbf{P}\cdot\delta\dot{\mathbf{v}}\,dS \qquad \left(\dot{\mathbf{v}}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \tag{1.7}$$

Мощность внутренних напряжений на вариациях скоростей деформаций ползучести

$$\delta M=\iiint_V \sigma^{ik}\delta\xi_{ik}\,dV \tag{1.8}$$

Так как $g=A^{\mu}\Gamma^{-d\mu}H^{1-\mu}$, $\delta\Gamma=0$, $\xi_i^i=0$, $\delta P=\delta Q=0$, то

$$\delta M=\delta\iiint_V\frac{A^{-\mu}\Gamma^{d\mu}H^{1+\mu}}{1+\mu}\,dV, \qquad \delta J=\delta(M-N)$$

Покажем, что для истинных состояний

$$\delta(M-N)=0 \tag{1.9}$$

Здесь к вариациям допускаются лишь скорости перемещений и деформаций ползучести. Так как $\sigma^{ik}\delta\xi_{ik} = \sigma^{ik}\mathbf{r}_k \cdot \delta\partial\dot{\mathbf{v}} / \partial x^i$, то

$$\delta(M - N) = \iiint\limits_V \sigma^{ik}\mathbf{r}_k \cdot \delta\frac{\partial\dot{\mathbf{v}}}{\partial x^i}\, dV - \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\dot{\mathbf{v}} dV - \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\dot{\mathbf{v}} dS \tag{1.10}$$

Применяя к первому члену формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\delta(M - N) = -\iiint\limits_V \{\nabla_i\sigma^{ik} + Q^k\}\,\delta\dot{v}_k dV - \iint\limits_S \{\sigma^{ik}n_i + P^k\}\,\delta\dot{v}_k dS \tag{1.11}$$

Следовательно, если удовлетворены все статические условия, а геометрические и кинематические связи не нарушаются, то $\delta(M - N) = 0$. Наоборот, если все геометрические связи удовлетворены, в силу независимости $\delta\dot{v}_k$ внутри и на границе тела из $\delta(M - N) = 0$ получим уравнения равновесия. Так как квадратичная форма

$$\phi = \frac{\partial^2 E}{\partial\xi_{ik}\partial\xi_{jn}}\,\mathring{\xi}_{ik}\mathring{\xi}_{jn} = A^{-\mu}\Gamma^{d\mu}\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 H^{1+\mu}}{\partial\xi_{ik}\partial\xi_{jn}}\,\mathring{\xi}_{ik}\mathring{\xi}_{jn}$$

положительно определена при $\xi_{ik}^d \neq 0$ (для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться методом Л. М. Качанова [3], стр. 109), то функция

$$E = A^{-\mu}\Gamma^{d\mu}H^{1+\mu} / (1 + \mu)$$

выпукла в смысле [5]

$$E(\xi_{jn}^*) - E(\xi_{jn}) \geqslant (\xi_{ik}^* - \xi_{ik})\frac{\partial E}{\partial\xi_{ik}}$$

Выполнения последнего условия необходимо и достаточно для утверждения того, что функционал J достигает абсолютного минимума на истинных скоростях [5].

2. Для того чтобы записать функционал J для тонких пластин и оболочек, введем обычные допущения о малости напряжений σ^{33} по сравнению с напряжениями $\sigma^{\alpha\beta}\sqrt{a_{\alpha\alpha}}\sqrt{a_{\beta\beta}}$ (не суммируется по α, β) и об отсутствии сдвигов ε_{13}, ε_{23}. Здесь координата $x^3 = z$ отчитывается по нормали $\mathbf{m}$ к срединной поверхности S_0, на которой введена криволинейная координатная сеть x^α (α=1,2) с координатными векторами ρ_α. Здесь и далее греческие индексы тензорного характера принимают значение *1* и *2* Орт нормали $\mathbf{m}$ к срединной поверхности S_0 определяется из соотношения

$$\mathbf{m}c_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \times \rho_\beta, \qquad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \qquad c_{11} = c_{12} = 0, \qquad a = \det(a_{\alpha\beta}), \qquad a_{\alpha\beta} = \rho_\alpha\cdot\rho_\beta \tag{2.1}$$

Вектор перемещений ползучести представим в виде

$$\mathbf{v} = (v_\alpha - z\omega_\alpha)\,\rho^\alpha + v_3\mathbf{m} \tag{2.2}$$

Для деформаций и скоростей деформации ползучести получим

$$\begin{gathered}2p_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha - 2b_{\alpha\beta}v_3 - z(\nabla_\alpha\omega_\beta + \nabla_\beta\omega_\alpha)\\ 2\xi_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\dot{v}_\beta + \nabla_\beta\dot{v}_\alpha - 2b_{\alpha\beta}\dot{v}_3 - z(\nabla_\alpha\dot{\omega}_\beta + \nabla_\beta\dot{\omega}_\alpha)\\ \omega_\alpha = \nabla_\alpha v_3 + b_\alpha{}^\lambda v_\lambda \qquad (\dot{\omega}_\alpha = d\omega_\alpha/dt)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\nabla_\alpha(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике срединной поверхности S, определяемой метрическим тензором $a_{\alpha\beta}$. Через $b_{\alpha\beta}$ обозначены ковариантные составляющие второго основного тензора поверхности S_0.

Из (1.3) и предположения о малости σ^{33} с учетом $\xi_{33} = -\xi_{\alpha}^{\alpha}$ получим

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{2}{3g}\{\xi^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta}\xi_\lambda^\lambda\} \tag{2.4}$$

С учетом принятых допущений функционал (1.6) для тонких пластин и оболочек запишется в виде

$$\begin{aligned}J_* = \iint\limits_S \int\limits_{-h}^{h} A^{-\mu}\Gamma_*{}^{d\mu}\frac{H_*{}^{1+\mu}}{1+\mu}\,dz dS_0 \iint\limits_{S_+} \mathbf{P}_+\{(\dot{v}_\alpha - h\dot{w}_\alpha)\,\rho^\alpha + \dot{v}_3\mathbf{m}\}\,dS_0 - \\ - \iint\limits_{S_-} \mathbf{P}_-\{(\dot{v}_\alpha + h\dot{w}_\alpha)\,\rho^\alpha + \dot{v}_3\mathbf{m}\}\,dS_0 - \int\limits_L \int\limits_{-h}^{h} \mathbf{P}_L\{(\dot{v}_\alpha - z\dot{w}_\alpha)\,\rho^\alpha + \dot{v}_3\mathbf{m}\}\,dz dL\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\Gamma^* = \int_0^t H_* dt, \qquad H_*^2 = \frac{2}{3}\{\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta} + \xi_\lambda^{\cdot\lambda}\xi_\gamma^{\cdot\gamma}\} \tag{2.6}$$

$2h$ — толщина оболочки, L — граница срединной поверхности, $\mathbf{P}_L$ — вектор нагрузок, приложенных к граничному срезу оболочки, $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$ — нагрузки на поверхностях $S_+ (z = h)$ и $S_- (z = -h)$.

3. Используем функционал (2.5) для решения задачи о неустановившейся ползучести круглой пластины при жестком защемлении контура под равномерным поперечным давлением интенсивности q.

Искомые перемещения будем аппроксимировать формой, которую дает решение соответствующей задачи линейной теории упругих пластин

$$v_3 = f(1-\eta^2)^2, \qquad v_1 = v_2 = 0, \qquad f = f(t) \tag{3.1}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$a_{11} = r^2, \ a_{22} = r^2\eta^2, \qquad b_{\alpha\beta} = 0, \qquad \Gamma_2{}^2{}_1 = \frac{1}{\eta}, \qquad \Gamma_2{}^1{}_2 = -\eta \tag{3.2}$$

Здесь [r — радиус пластинки, $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ — символы Кристоффеля второго рода, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$; расстояние до какой-либо точки пластины от ее оси равно $r\eta$.

Подставляя значения для v_i по (3.1) в (2.3) и используя (3.2), для J_* получим

$$J_* = \frac{2\pi r^2 h}{1+\mu} A^{-\mu} f^{d\mu} \dot{f}^{1+\mu} \int_0^1 \eta d\eta \int_{-1}^1 \left(\frac{8h^2}{\sqrt{3}r^2}\zeta\varkappa\right)^{1+\mu(1+d)} d\zeta - 2\pi r^2 q \dot{f} \int_0^1 (1-\eta^2)^2 \eta d\eta \tag{3.3}$$

где

$$\varkappa^2 = 3 - 12\eta^2 + 13\eta^4, \qquad \zeta = z/h, \qquad \dot{f} = df/dt \tag{3.4}$$

Так как для истинного состояния $\delta J_* = 0$, то для определения функции времени $f(t)$ получим уравнение

$$f^{d\mu}\dot{f}^\mu = A^\mu q (2n+d+1) \left\{12n \int_0^1 \left(\frac{8h^2}{\sqrt{3}r^2}\varkappa\right)^{1+\mu(1+d)} \eta d\eta\right\}^{-1} \tag{3.5}$$

которое при $dq/dt = 0$ дает

$$f^{d+1} = At(d+1) q^n (2n+d+1)^n \left\{12n \int_0^1 \left(\frac{8h^2}{\sqrt{3}r^2}\varkappa\right)^{1+\mu(1+d)} \eta d\eta\right\}^{-n} \tag{3.6}$$

Таким образом, полные перемещения пластины равны

$$U_3 = v_3 + u_3, \qquad U_1 = U_2 = 0$$

где u_3—упруго-пластическое решение геометрически линейной теории тонких пластин.

4. Изложенный в пп. 1, 2 метод дает возможность определить перемещения и деформации в состоянии неустановившейся ползучести. Определение напряжений ни по соотношениям (1.3) или (2.4), ни по соотношениям теории упруго-пластических деформаций не могут дать истинного распределения хотя бы потому, что из этих соотношений получаются различные распределения напряжений. Для решения этой задачи удобно воспользоваться методом, предположенным в монографии [3] и основанном на вариационном принципе возможных изменений напряженного состояния.

Воспользуемся тем, что в рассматриваемом случае имеет место утверждение (аналогичное утверждение при отсутствии мгновенных пластических деформаций доказано в работе [6]).

Среди всех напряженных состояний, не нарушающих статических условий внутри и на границе тела, на самом деле имеют место лишь те, которые сообщают стационарное значение функционалу.

$$K = \iiint_V \left\{\frac{A}{n+1}\Gamma^{-d}T^{n+1} + \frac{d}{dt}R\right\} dV - \iiint_V \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Q}dV - \iint_S \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{P}dS \tag{4.1}$$

Здесь через R обозначена плотность дополнительной работы при упруго-пластических деформациях [4]

$$R = U + \int_0^\tau \theta(\tau)\,\tau d\tau \tag{4.2}$$

где U — энергия объемной деформации

$$\gamma = \theta(\tau)\,\tau, \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{3}} T, \qquad \gamma^2 = 2\left(q_{ik}q^{ik} - \frac{1}{3} q_{i\cdot}^{i} q_{k\cdot}^{k}\right) \tag{4.3}$$

Если пластические деформации отсутствуют, то

$$R = U + \frac{1}{2G}\tau^2 = \Pi$$

где Π — плотность энергии упругих деформаций.

В функционале (4.1) к вариациям допускаются лишь статические характеристики, при этом вариации напряжений от времени не зависят, т. е.

$$\frac{d}{dt}\delta\sigma^{ik} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\delta\mathbf{Q} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\delta\mathbf{P} = 0 \tag{4.4}$$

Для доказательства высказанного утверждения составим выражение мощности вариаций внутренних напряжений на истинных скоростях полной деформации за вычетом мощности вариации внешних сил на истинных полных скоростях перемещений

$$\delta K_1 = \iiint_V \dot\varepsilon_{ik}\delta\sigma^{ik} dV - \iiint_V \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{Q} dV - \iint_S \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{P} dS \tag{4.5}$$

так как

$$\dot\varepsilon_{ik} = \dot p_{ik} + \dot q_{ik}, \qquad \dot q_{ik} = \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\sigma^{ik}}, \qquad \dot p_{ik} = \frac{A}{n+1}\Gamma^{-d}\frac{\partial T^{n+1}}{\partial\sigma^{ik}}$$

то

$$\delta K_1 = \iiint_V \left\{\frac{A}{n+1}\Gamma^{-d}\frac{\partial T^{n+1}}{\partial\sigma^{ik}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\sigma^{ik}}\right\}\delta\sigma^{ik} dV - \iiint_V \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{Q} dV - \iint_S \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{P} dS =$$

$$= \delta\iiint_V \left\{\frac{A}{n+1}\Gamma^{-d}T^{n+1} + \frac{d}{dt}R\right\} dV - \delta\iiint_V \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{Q} dV - \delta\iint_S \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{P} dS$$

Таким образом, $\delta K = \delta K_1$ и разность $K - K_1$ от напряжений не зависит, но $\delta K_1 = 0$ для истинного состояния. Действительно, так как статические условия не нарушаются, то

$$\delta\mathbf{Q} = -\nabla_i\delta\sigma^{ik}\mathbf{r}_k, \qquad \delta\mathbf{P} = -\delta\sigma^{ik}\mathbf{r}_k n_i$$

Тогда

$$\delta K_1 = \iiint_V \dot\varepsilon_{ik}\delta\sigma^{ik} dV + \iiint_V \dot{\mathbf{U}}\cdot\nabla_i\delta\sigma^{ik}\mathbf{r}_k dV + \iint_S \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\sigma^{ik}\mathbf{r}_k n_i dS =$$

$$= \iiint_V \left\{\dot\varepsilon_{ik} - \frac{1}{2}(\nabla_i\dot U_k + \nabla_k\dot U_i)\right\}\delta\sigma^{ik} dV$$

Здесь использована формула Остроградского — Гаусса. Таким образом, если выполнены условия совместности скоростей деформаций, то $\delta K_1 = 0$. Наоборот, из $\delta K_1 = 0$ следуют условия совместности скоростей деформации. Следовательно, для истинного состояния $\delta K = 0$. Для тонких пластин и оболочек в предположении

$$\iiint_V \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{Q} dV + \iint_S \dot{\mathbf{U}}\cdot\delta\mathbf{P} dS = 0$$

из (4.1) получим вариационное уравнение

$$\delta K_* = \delta\iint_{S_0}\int_{-h}^{h}\left\{\frac{A}{n+1}\Gamma_*^{-d}T_*^{n+1} + \frac{dR_*}{dt}\right\} dz dS_0 = 0 \tag{4.6}$$

где

$$R_* = U_* + \int_0^{\tau_*}\theta(\tau_*)\,\tau_* d\tau_*, \qquad U_* = U\,|_{\sigma^{33}=0}, \qquad \tau_*^2 = \frac{1}{2}(\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - 3\sigma_*^2), \qquad 3\sigma_* = \sigma_{\alpha\cdot}^{\alpha} \tag{4.7}$$

Распределение напряжений в состоянии неустановившейся ползучести будем разыскивать в форме

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta} + \lambda(t)\left(\sigma_{(c)}{}^{\alpha\beta} - \sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}\right) \tag{4.8}$$

как это предложено в монографии [3]. Здесь через $\sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}$ обозначено начальное упруго-пластическое распределение напряжений, а через $\sigma_{(c)}{}^{\alpha\beta}$ — распределение напряжений, которое дается соотношениями ползучести.

Так как $\sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}$ и $\sigma_{(c)}{}^{\alpha\beta}$ — статически возможны, то и $\sigma^{\alpha\beta}$ статически возможное распределение напряжений. Для $\lambda(t)$ имеем начальное условие $\lambda(0) = 0$. Так как форма (4.8) не удовлетворяет условиям (4.4), то в качестве исходного уравнения вместо (4.6) следует брать

$$\delta K_* = \iint\limits_{S_0}\int\limits_{-h}^{h}\left\{\frac{A}{2}\Gamma_*{}^{-d}T_*{}^{n-1}\frac{\partial T_*{}^2}{\partial\sigma^{\alpha\beta}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial R_*}{\partial\sigma^{\alpha\beta}}\right\}\delta\sigma^{\alpha\beta}dzdS_0 = 0 \tag{4.9}$$

Так как

$$\delta\sigma^{\alpha\beta} = \left(\sigma_{(c)}{}^{\alpha\beta} - \sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}\right)\delta\lambda \qquad \left(\frac{d}{dt}\quad \delta\sigma^{\alpha\beta} \neq 0\right)$$

то

$$\iint\limits_{S_0}\int\limits_{-h}^{h}\left\{\frac{A}{2}\Gamma_*{}^{-d}T_*{}^{n-1}\frac{\partial T_*{}^2}{\partial\sigma^{\alpha\beta}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial R_*}{\partial\sigma^{\alpha\beta}}\right\}\left(\sigma_{(c)}{}^{\alpha\beta} - \sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}\right)dzdS_0 = 0 \tag{4.10}$$

Это уравнение служит для определения функции $\lambda(t)$ и ему можно придать вид

$$a(\lambda)\frac{d\lambda}{dt} + b(\lambda) = 0 \tag{4.11}$$

Решение этого уравнения возможно лишь путем использования численных методов (при условии $\lambda(0) = 0$).

Пусть начальные деформации не выходят за пределы упругости. Тогда для круглой тонкой пластинки при жестком защемлении получим

$$U_3 = \frac{r^4 q}{64D}(1-\eta^2)^2, \qquad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$\sigma_{(0)}{}^{11}a_{11} = \frac{3r^2qz}{32h^3}\left[1+\nu-(3+\nu)\eta^2\right], \qquad \sigma_{(0)}{}^{22}a_{22} = \frac{3r^2qz}{32h^3}\left[1+\nu-(1+3\nu)\eta^2\right]$$

$$T_*{}^2 = \frac{3}{2}\left(\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - 3\sigma_*{}^2\right), \qquad R_* = \Pi_* = \frac{1}{2}A^{\alpha\beta\rho\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\rho\gamma} \tag{4.12}$$

$$3\sigma_* = \sigma_{\alpha\cdot}^{\cdot\alpha}, \qquad q_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\rho\gamma}\sigma^{\rho\gamma} = A_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\rho\gamma}\sigma_{\rho\gamma}$$

Следовательно, в уравнении (4.11) следует положить

$$a(\lambda) = \iint\limits_{S_0}\int\limits_{-h}^{h}A^{\alpha\beta\rho\gamma}\left(\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(c)}\right)\left(\sigma_{\rho\gamma}^{(0)} - \sigma_{\rho\gamma}^{(c)}\right)dzdS_0$$

$$b(\lambda) = \iint\limits_{S_0}\int\limits_{-h}^{h}\left\{A\Gamma_*{}^{-\alpha}T_*{}^{n-1}\frac{3}{2}\left(\sigma^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}\sigma_*\right) + \sigma_{\rho\gamma}\frac{dA^{\alpha\beta\rho\gamma}}{dt} + \right. \tag{4.13}$$

$$\left. + A^{\alpha\beta\rho\gamma}\left[\frac{d\sigma_{\rho\gamma}^{(0)}}{dt} + \lambda(t)\left(\frac{d\sigma_{\rho\gamma}^{(c)}}{dt} - \frac{d\sigma_{\rho\gamma}^{(0)}}{dt}\right)\right]\right\}\left(\sigma_{\alpha\beta}^{(c)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}\right)dzdS_0$$

Если упругие константы не зависят от температуры, то $dA^{\alpha\beta\rho\gamma}/dt = 0$ и при $q = \text{const}$ имеем $d\sigma_{(0)}{}^{\alpha\beta}/dt = 0$. Тогда

$$-b(\lambda) = \iint\limits_{S_0}\int\limits_{-h}^{h}\left\{A\Gamma_*{}^{-\alpha}T_*{}^{n-1}\frac{3}{2}\left(\sigma^{\alpha\beta} - \sigma_* a^{\alpha\beta}\right) + \lambda(t)A^{\alpha\beta\rho\gamma}\frac{d\sigma_{\rho\gamma}^{(c)}}{dt}\right\}\left(\sigma_{\alpha\beta}^{(c)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}\right)dzdS_0$$

Таким образом, удается «склеить» мгновенное упруго-пластическое распределение напряжений с напряжениями в задаче ползучести и получить непрерывный во времени процесс изменения распределения напряжений по формулам (4.8).

Поступила 20 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Куршин Л. М. Об устойчивости стержней и пластинок в условиях ползучести. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 3.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. Качанов Л. М. Основные теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
5. Hill R. New horisons in the mechanics of Solids; Journal of the Mech. and Phys. of Solids, 1956, 5, № 1. (Русск. пер.: Хилл Р. Сб. пер. Механика, ИЛ, 1957, № 4.)
6. Шестериков С. А. Об одном вариационном принципе в теории ползучести. Изв. ОТН АН СССР, 1957, № 2.

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович (Ростов-на-Дону)

В докладе на Всесоюзной конференции по теории и применениям тонких оболочек (Тарту, 1957) автором был предложен подход к построению статистической теории устойчивости оболочек. Основные черты этого подхода изложены в статье [1].

В основе рассмотрений лежит предположение о том, что все факторы, определяющие случайный характер изгиба оболочки, разделяются на три группы:

1) рассеяние упругих, геометрических параметров оболочки; параметров, определяющих способ заделки оболочки.

Предполагается, что параметры этой группы $a_1, \ldots, a_n$ от времени не зависят и задан их совокупный закон распределения $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Сюда же можно включить и постоянные по времени случайные составляющие внешних сил;

2) непрерывная случайная часть внешних нагрузок (для простоты считаем, что налицо только нормальная составляющая внешних сил), которую будем аппроксимировать соотношением

$$Z^{(3)}(P, t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \chi_k(P) \psi_l(t) \tag{1}$$

В этой формуле $\chi_k(P)$ и ψ_l — некоторые детерминированные функции координат времени, причем $\chi_k(P)$ образуют базис в пространстве «энергий» [2]. Будем считать, что случайный процесс $Z^{(3)}(P, t)$ определяется законом распределения $\theta(a_{kl})$ случайных величин a_{kl};

3) случайная часть внешних нагрузок, вызывающая ускорения типа ускорений броуновского движения.

Будем искать приближенное решение задачи об изгибе пластины в виде

$$W = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) \chi_k(P) \tag{2}$$

а $q(t)$ определять по методу Бубнова — Галеркина. В этом случае в предположении независимости всех трех групп факторов получена следующая формула для закона распределения случайных величин q_k, справедливая при достаточно больших

$$F(q_1, \ldots, q_n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q_1, \ldots, q_n, t, a_k, a_{kl}) \varphi(a_k) \theta(a_{kl}) da_k da_{kl} \tag{3}$$

где f определяется из уравнения Смолуховского [3].

Если рассматривать стационарное распределение, то оно дается соотношением

$$F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{J} e^{-\mu^2 U(q, a_k)} \varphi(a_k) da_k \qquad \left(J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 U(s, a_k)} ds\right) \tag{4}$$

Здесь $U(q, a_k)$ — потенциальная энергия системы оболочка—детерминированная часть внешних сил, μ^2 — некоторый параметр, J — нормирующий множитель. О статистическом и механическом смысле параметра μ смотри в работе [1-4].