

МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД С НЕГОЛОНОМНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

М. Э. Эглит (Москва)

1. В работе [1] для описания механического поведения материалов со сложными свойствами предлагалось использовать неголономные модели сплошных сред. Такие модели можно ввести следующим образом. Представим себе среду, в которой термодинамическими параметрами состояния являются

$$\varepsilon_{ij}, \quad T, \quad \sigma^{ij}, \quad \chi \quad \left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}^{\hat{}} - g_{ij}^{\circ}), \quad \sigma^{ij} = \frac{p^{ij}}{\rho} \right) \quad (1.1)$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора конечных деформаций в лагранжевой системе координат ξ^i ; g_{ij}° и $g_{ij}^{\hat{}}$ — компоненты метрического тензора G соответственно начального и деформированного пространства; T — температура, p^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений в системе ξ^i , ρ — плотность, χ — некоторый дополнительный переменный параметр.

Введение напряжений в качестве параметров состояния связано с тем, что в средах, которые предполагается рассматривать, напряжения не являются функциями других параметров из системы (1.1). Подчеркнем также, что предлагается использовать именно контравариантные компоненты обобщенного тензора напряжений σ^{ij} . Это приводит к наибольшей простоте в теоретических рассуждениях.

Явное введение одного или нескольких дополнительных параметров типа χ представляется необходимым в средах со сложными свойствами. Эти параметры связаны с количественным описанием внутренних физико-химических процессов, существенных для механики.

Кроме системы параметров (1.1), вообще переменных, физические свойства среды могут определяться еще системой физических постоянных — скаляров, векторов или тензоров. Явное перечисление таких физических постоянных необходимо при построении конкретных моделей сплошных сред.

Выведем теперь следствия, получающиеся для сред типа (1.1), из законов термодинамики.

Обозначим через S и F отнесенные к единице массы энтропию и свободную энергию малой частицы и запишем первый и второй законы термодинамики в форме

$$dF - \sigma^{kl} d\varepsilon_{kl} + SdT = -dQ' \quad (1.2)$$

$$TdS = dQ + dQ' \quad (1.3)$$

где dQ и $-\sigma^{kl} d\varepsilon_{kl}$ — рассчитанные на единицу массы внешний приток тепла и элементарная работа внутренних поверхностных сил, dQ' — некомпенсированное тепло; в необратимых процессах $dQ' \geq 0$.

Будем считать, что необратимые процессы в рассматриваемых средах связаны с изменением параметра χ . Тогда в качестве простейшей гипотезы можно положить

$$dQ' = \kappa \frac{d\chi}{dt} d\chi, \quad \kappa \geq 0 \quad (1.4)$$

где κ — скалярная функция параметров (1.1).

Уравнение (1.2) с учетом (1.1) и (1.4) можно переписать в форме

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} - \sigma^{kl} \right) d\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + S \right) dT = -\kappa \frac{d\chi}{dt} d\chi \quad (1.5)$$

В равенстве (1.5) дифференциалы $d\varepsilon_{kl}$ и $d\sigma^{ij}$ взяты для данной частицы в сопутствующей лагранжевой системе координат. В этом случае, как известно, $d\varepsilon_{kl}/dt$ являются компонентами тензора скоростей деформаций. Величины $d\sigma^{ij}/dt$ удобно принять за компоненты тензора скоростей напряжений [2].

Если наряду с независимостью параметров (1.1) принять, что величины $d\chi$, $d\varepsilon_{kl}$, dT и $d\sigma^{ij}$ также независимы, то из (1.5) получим, в частности, систему ко-

нечных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} = 0$$

которая позволит сократить число независимых определяющих параметров в (1.1); поэтому сохранение допущения (1.1) можно связать с наличием неголономных соотношений

$$d\sigma^{ij} = A^{ij}d\chi + B^{ij}dT + A^{ijkl}d\epsilon_{kl} \quad (1.6)$$

где B^{ij} и A^{ijkl} — функции системы определяющих параметров (1.1), а A^{ij} можно считать зависящими также и от производных параметров состояния по времени и координатам. Соотношения (1.5) и (1.6) приводят к следующим равенствам (приращения $d\chi$, dT и $d\epsilon_{kl}$ считаются линейно независимыми):

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} A^{kl ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} B^{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} + S = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} + \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} A^{ij} = -\kappa \frac{d\chi}{dt} \quad (1.9)$$

Равенства (1.7) и (1.8) можно рассматривать как обобщение уравнений состояния обычной теории упругости. Они либо дают ограничения для коэффициентов A^{ijkl} и B^{ij} , если свободная энергия F и энтропия S заданы, либо позволяют найти F и S по заданным A^{ijkl} и B^{ij} ; в последнем случае на эти коэффициенты также накладываются ограничения в виде условий совместности уравнений системы (1.7) и (1.8). Соотношение (1.9) рассматривается как кинетическое уравнение для определения параметра χ .

Соотношения (1.3), (1.6) и (1.9) вместе с динамическими уравнениями и уравнением неразрывности могут образовать замкнутую систему уравнений, определяющих модель сплошной среды для широкого класса механических, тепловых и физических процессов, если величины A^{ij} , B^{ij} , A^{ijkl} и F фиксированы так, что соотношения (1.7) удовлетворяются тождественно; энтропия вычисляется при этом из (1.8).

Покажем, что в рамках предлагаемой теории могут быть описаны тела с ползучестью и релаксацией, а также со свойствами высокоэластичности. Рассмотрим сначала несколько чисто иллюстративных примеров таких сред, не связывая их с результатами конкретных экспериментов с какими-либо частными материалами.

2. Рассмотрим пример тела с ползучестью. Допустим, так же как при выводе закона Гука, что тензор A^{ijkl} не зависит от ϵ_{ij} и σ^{ij} . Тогда для изотропного тела

$$A^{ijkl} = \lambda g^{oij} g^{okl} + \mu (g^{oik} g^{ojl} + g^{oil} g^{ojk}) \quad (2.1)$$

где λ и μ — скаляры, которые можно считать функциями T и χ . Аналогичные формулы, имеющие более сложную структуру, можно выписать в случае, когда в числе физических постоянных, определяющих среду, имеются векторы или тензоры, т. е. для анизотропной среды.

Допустим, кроме того, что при $\chi = \text{const}$ тепловые эффекты проявляются так же, как в обычной линейной термоэластике. Тогда

$$B^{ij} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial T} I_1(\epsilon) - \alpha \right] g^{oij} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} \epsilon_{kl} g^{okl} g^{olj} \quad (2.2)$$

где $\alpha(T, \chi)$ определяет коэффициент теплового расширения, $I_1(\epsilon)$ — первый инвариант тензора деформации ($I_1(\epsilon) = g^{oij} \epsilon_{ij}$).

При таком выборе A^{ijkl} и B^{ij} соотношения (1.7) и (1.8) удовлетворяются тождественно, если положить

$$F = \sigma^{ij} \epsilon_{ij} - \mu I_2(\epsilon) - \frac{\lambda}{2} I_1^2(\epsilon) + f(T, \chi) \quad (2.3)$$

$$S = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial T} I_1^2(\epsilon) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} I_2(\epsilon) \right] + \alpha I_1(\epsilon) - \frac{\partial f}{\partial T}, \quad (I_2(\epsilon) = g^{oij} g^{okl} \epsilon_{ik} \epsilon_{jl}) \quad (2.4)$$

Легко проверить, что при $\chi = \text{const}$ (2.3) переходит в выражение для свободной энергии линейно упругого тела. Положим далее

$$-A^{ij} = \zeta I_1(\sigma) g^{\circ ij} + 2\eta \sigma^{ij} \quad (2.5)$$

$$-\kappa = \frac{\kappa_0}{\sqrt{I_2(\sigma)}} \left(\frac{\partial F}{\partial \chi} + A^{ij} \varepsilon_{ij} \right) \quad (2.6)$$

Здесь $I_1(\sigma) = g_{ij}^{\circ} \sigma^{ij}$, $I_2(\sigma) = g_{ij}^{\circ} g_{kl}^{\circ} \sigma^{ik} \sigma^{jl}$; ζ и η — скалярные функции, связанные с первой и второй вязкостью среды; $\kappa_0 = \kappa_0(\chi, T)$.

Далее будем считать, что λ , μ , α , ζ , η , κ_0 не зависят от χ , а функция $f(T, \chi)$, входящая в выражение для свободной энергии, может быть представлена в виде $f_1(T) + f_2(\chi)$, причем можно считать, что $f_2(\chi) = k\chi$; последнего всегда можно добиться введением вместо χ нового параметра $\chi_1 = k^{-1}f_2(\chi)$.

При таком выборе коэффициентов кинетическое уравнение для χ принимает вид

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\sqrt{I_2(\sigma)}}{\kappa_0(T, \chi)} \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) видно, что в стационарных условиях, т. е. при $\sigma^{ij} = \text{const}$ и $T = \text{const}$, параметр χ является функцией времени t . В имеющихся теориях ползучести для бесконечно малых деформаций всегда употребляют время t в качестве параметра χ . Ясно, однако, что в условиях переменной температуры или переменных нагрузок это неудовлетворительно. В этом случае должен использоваться параметр χ , не являющийся простой функцией времени, что и отражается уравнением (2.7). Уравнения (1.6) могут быть теперь записаны в виде

$$\frac{d\sigma^{ij}}{dt} = -\frac{\sqrt{I_2(\sigma)}}{\kappa_0} [\zeta I_1(\sigma) g^{\circ ij} + 2\eta \sigma^{ij}] + \left(\frac{d\sigma^{ij}}{dt} \right)_{\chi=\text{const}} \quad (2.8)$$

где

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{\circ ij} + 2\mu \varepsilon^{ij} - g^{\circ ij} \int_{T_0}^T \alpha dT$$

Формулы (2.3), (2.7) и (2.8) полностью определяют некоторую модель сплошной среды. Содержащийся в них произвол в виде неопределенных функций α , λ , μ , ζ , η , κ_0 , f_1 , k устраняется результатами простейших экспериментов в случае, если эти уравнения применяются для описания какого-либо конкретного материала.

Изучим поведение этой среды в различных условиях на примере одноосного растяжения — сжатия.

Направим оси лагранжевой системы координат ξ^i по главным осям деформации, причем образец растягивается силой, действующей вдоль оси ξ^1 . Пусть в начальный момент система координат была декартовой

$$g^{\circ ij} = g_{ij}^{\circ} = \delta_j^i.$$

Во всем процессе деформирования отличны от нуля лишь компоненты σ^{11} , ε_{11} , $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, а из системы (2.8) существенны лишь два уравнения

$$E \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \frac{d\sigma^{11}}{dt} + \beta (\sigma^{11})^2 - \left\{ (1-2\nu) \left[I_1(\varepsilon) \frac{d\lambda}{dT} - \alpha \right] + 2 \frac{d\mu}{dT} (\varepsilon_{11} - 2\nu \varepsilon_{22}) \right\} \frac{dT}{dt} \quad (2.9)$$

$$E \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = -\nu \frac{d\sigma^{11}}{dt} + \left[\beta - \frac{2\eta(1+\nu)}{\kappa_0} \right] (\sigma^{11})^2 - \left\{ (1-2\nu) \left[I_1(\varepsilon) \frac{d\lambda}{dT} - \alpha \right] - 2 \frac{d\mu}{dT} [\nu \varepsilon_{11} - (1-\nu) \varepsilon_{22}] \right\} \frac{dT}{dt}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \beta = \frac{\zeta(1-2\nu) + 2\eta}{\kappa_0}$$

Решения этой системы имеют вид:

а) в случае изотермической релаксации напряжений

$$T = T_0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{\circ}$$

$$\sigma^{11} = \frac{\sigma^{\circ 11}}{1 + \beta \sigma^{\circ 11} t}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{\circ} - \frac{\zeta}{\kappa_0} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E\beta} (\sigma^{11} - \sigma^{\circ 11})$$

$$\sigma^{\circ 11} = \sigma^{11}, \quad \varepsilon_{22}^{\circ} = \varepsilon_{22} \quad \text{при } t = 0$$

б) в случае изотермической ползучести при фиксированном σ^{11}

$$T = T_0, \quad \sigma^{11} = \sigma^{011}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{\beta}{E} (\sigma^{011})^2 t, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \left(\frac{\beta}{E} - \frac{2\eta}{\kappa_0} \frac{1+\nu}{E} \right) (\sigma^{011})^2 t$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{22} \quad \text{при } t = 0$$

в) в случае изотермического деформирования с постоянной скоростью V

$$T = T_0, \quad \varepsilon_{11} = Vt$$

$$\sigma^{11} = a_0 \sqrt{V} \operatorname{th} \frac{\delta_0}{\sqrt{V}} \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \left[1 - \frac{2\eta}{\kappa_0} \frac{1+\nu}{\beta} \right] \varepsilon_{11} - \frac{\zeta}{\kappa_0} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E\beta} \sigma^{11}$$

$$a_0 = (E/\beta)^{1/2}, \quad \delta_0 = \sqrt{E\beta}; \quad \sigma^{11} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Полученные решения позволяют подобрать параметры, входящие в определение среды, из сравнения с результатами простейших экспериментов с конкретным материалом. Так, например, если при фиксированном ε_{11} величина деформации ε_{22} также не меняется, то параметр ζ равен 0. §

Рассмотрим теперь процессы, связанные с изменением температуры при деформировании. В этом случае необходимо использовать уравнение энергии

$$dU - \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} = dQ \quad (2.10)$$

где dU — приращение внутренней энергии среды, а dQ — внешний приток тепла.

Предположим для простоты, что $\lambda, \mu, \alpha, k, \kappa_0, \zeta, \eta$ не зависят от T . Тогда

$$U = F - TS = \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\lambda}{2} I_1^2(\varepsilon) - \mu I_2(\varepsilon) + \alpha T I_1(\varepsilon) + \left(f_1 - T \frac{\partial f_1}{\partial T} \right) + k\chi \quad (2.11)$$

Легко показать, что $c = \partial \varphi / \partial T$, где $\varphi = f_1 - T \partial f_1 / \partial T$ есть теплоемкость среды при постоянных деформациях. Величину c будем считать постоянной.

Для рассматриваемых одномерных процессов уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\zeta + 2\eta}{\kappa_0} (\sigma^{11})^2 \varepsilon_{11} - 2 \frac{\zeta}{\kappa_0} (\sigma^{11})^2 \varepsilon_{22} + k \frac{\sigma^{11}}{\kappa_0} + c \frac{dT}{dt} + \alpha T \left(\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} + 2 \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} \right) = \frac{dQ}{dt} \quad (2.12)$$

Применим уравнение (2.12) для изучения процесса адиабатической ползучести. Этот процесс описывается системой уравнений

$$E \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \frac{2\eta}{\kappa_0} (\sigma^{011})^2 + \frac{dT}{dt} \alpha (1-2\nu), \quad E \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = -\frac{2\eta\nu}{\kappa_0} (\sigma^{011})^2 + \frac{dT}{dt} \alpha (1-2\nu) \quad (2.13)$$

$$\alpha T \left(\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} + 2 \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} \right) + c \frac{dT}{dt} = \frac{2\eta}{\kappa_0} (\sigma^{011})^2 \varepsilon_{11} - \frac{k}{\kappa_0} \sigma^{011}$$

Здесь для простоты положено $\zeta = 0$. Решение этой системы дается формулами

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{\alpha}{3K} (T - T_0) + \frac{2\eta}{\kappa_0} (\sigma^{011})^2 t$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + \frac{\alpha}{3K} (T - T_0) - \frac{2\eta\nu}{\kappa_0} (\sigma^{011})^2 t \quad \left(3K = \frac{E}{1-2\nu} \right)$$

$$\frac{[c + \alpha^2 T K^3]^2}{\alpha^2 K^3} - \frac{E [2\eta (\sigma^{011})^2 t / \kappa_0 E + (\varepsilon_{11}^0 - \alpha T_0 / 3) + k / 2\eta \sigma^{011}]^2}{1} = M_0$$

$$\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{22}, \quad T_0 = T \quad \text{при } t = 0$$

$$M_0 = \frac{[c + \alpha^2 T_0 K^3]^2}{\alpha^2 K^3} - \frac{E [(\varepsilon_{11}^0 - \alpha T_0 / 3) + k / 2\eta \sigma^{011}]^2}{1}$$

При $\zeta \neq 0$ решение дается теми же формулами с измененными константами.

Таким образом, температура в процессе адиабатической ползучести растет со временем. Деформации при этом увеличиваются быстрее, чем в случае изотермической ползучести. Опыты с переменной температурой позволяют определить значения α и c для данной среды.

3. Рассмотрим пример модели высокоэластичного материала. Пусть требуется описать поведение материала, в котором могут происходить большие обратимые деформации, развивающиеся во времени. Модель такой среды можно построить, если считать $\kappa = 0$ (диссипации, связанной с деформированием, нет), k — величиной, существенно не равной 0 (внутренняя энергия обязательно зависит от χ) и A^{ij} — функциями $d\chi/dt$ — такими, чтобы неголономные соотношения (1.6) имели обратимый характер, т. е. при перемене знака дифференциалов $d\chi$, dT и $d\varepsilon_{ij}$ величины $d\sigma^{ij}$ также меняли знак. Возьмем, например,

$$A^{ij} = \Lambda \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 \frac{\varepsilon^{ij}}{I_2(\varepsilon)}, \quad \Lambda = \frac{-k}{[aI_2(\varepsilon) - bI_2(\sigma)]^2} \quad (3.1)$$

Тогда кинетическое уравнение для χ принимает вид

$$\frac{d\chi}{dt} = -[aI_2(\varepsilon) - bI_2(\sigma)] \quad (3.2)$$

при условии, что свободная энергия снова задается в форме (2.3).

Если выбрать A^{ijkl} и B^{ij} так же, как в предыдущем примере, то соотношения (1.6) запишутся следующим образом:

$$\frac{d\sigma^{ij}}{dt} = \frac{k}{I_2(\varepsilon)} [aI_2(\varepsilon) - bI_2(\sigma)] \varepsilon^{ij} + \left(\frac{d\sigma^{ij}}{dt} \right)_{\chi=\text{const}} \quad (3.3)$$

Рассмотрим процессы изотермического одномерного нагружения такой среды при условии $I_1(\varepsilon) = 0$. Они описываются уравнением

$$\frac{d\sigma^{11}}{dt} = \frac{3k[aI_2(\varepsilon) - bI_2(\sigma)]}{2I_2(\varepsilon)} \varepsilon^{11} + 3\mu \frac{d\varepsilon^{11}}{dt} \quad (3.4)$$

причем $I_2(\varepsilon) = 3\varepsilon_{11}^2/2$, $I_2(\sigma) = (\sigma^{11})^2$. Очевидно, что состояние $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^*$, $\sigma^{11} = \sigma^{*11}$ при условии

$$\frac{3}{2} a (\varepsilon_{11}^*)^2 = b (\sigma^{*11})^2 \quad (3.5)$$

является равновесным. Оно удовлетворяет уравнениям (3.2) и (3.4); при этом $\chi = \chi^* = \text{const}$. Покажем, что в процессах деформирования с $\sigma^{11} = \text{const}$ и в процессах изменения напряжений при $\varepsilon_{11} = \text{const}$ рассматриваемый материал стремится к равновесному состоянию, определяемому условием (3.5).

Пусть $\sigma^{11} = \sigma^{o11} = \text{const}$. Тогда из (3.4) следует

$$\frac{3}{2} a \varepsilon_{11}^2 - b (\sigma^{o11})^2 = \left[\frac{3}{2} a (\varepsilon_{11}^o)^2 - b (\sigma^{o11})^2 \right] \exp\left(-\frac{ka}{\mu} t\right)$$

$$\varepsilon_{11}^o = \varepsilon_{11} \quad \text{при } t = 0$$

Таким образом, $\varepsilon_{11} \rightarrow \sqrt{2b/3a\sigma^{o11}} = \varepsilon_{11}^*$ при $t \rightarrow \infty$, причем, если начальная деформация ε_{11}^o меньше ε_{11}^* , соответствующей заданному напряжению σ^{o11} , то происходит процесс ползучести, т. е. увеличения деформации до равновесной. В противном случае происходит процесс восстановления; при фиксированном напряжении σ^{o11} деформация образца уменьшается до равновесной. Если $\sigma^{o11} = 0$, то и $\varepsilon_{11}^* = 0$ и, следовательно, при снятии напряжения происходит полное восстановление.

Изменение напряжений при фиксированном $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^o$ происходит по закону

$$\sqrt{\frac{2}{3} \frac{b}{a} \frac{\sigma^{11}}{\varepsilon_{11}^o}} = \frac{1 - C \exp(-\sqrt{3ab/2} t)}{1 + C \exp(-\sqrt{3ab/2} t)}$$

где C связано с σ^{o11} — начальным значением σ^{11} . Следовательно, $\sigma^{11} \rightarrow \sqrt{3a/2b} \varepsilon_{11}^o = \sigma^{*11}$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\sigma^{o11} > \sigma^{*11}$, то происходит процесс релаксации напряжений; при $\sigma^{o11} < \sigma^{*11}$ напряжения при фиксированной деформации возрастают.

4. Рассмотренные примеры носили лишь качественный и иллюстративный характер. Однако в ряде случаев в рамках рассматриваемой системы неголономных моделей можно дать количественное описание реальных материалов.

Дадим сейчас простую модель, достаточно точно описывающую результаты экспериментов Бергена, Мессерсмита и Ривлина [8] по релаксации напряжений в некоторых наполненных высокополимерах.

В этих экспериментах использовались пять материалов: вулканизированный, высоконаполненный синтетический каучук и четыре поливинилхлоридных соединения, содержащих различные количества неорганических наполнителей (от 0% до 50% по объему).

Образцы из этих материалов в виде прямых трубок постоянного круглого сечения с внутренним и внешним радиусами a и b соответственно подвергались одновременно простому растяжению и кручению в течение малого промежутка времени $0 \leq t \leq \tau$ при постоянной температуре. Затем деформации фиксировались и при $t \gg \tau$ измерялись силы, необходимые, чтобы поддержать эти деформации.

Результаты экспериментов использовались для создания математической модели, позволяющей описать поведение рассматриваемых материалов в процессах релаксации. Авторы показывают, что в их экспериментах можно было с достаточно большой точностью считать, что материалы несжимаемы и в процессах релаксации выполняются соотношения

$$p^{ij} = \theta \varepsilon_{ij} - p \delta_{ij} \quad (4.1)$$

где p^{ij} — компоненты тензора напряжений, p — гидростатическое давление, ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, θ — скалярная функция времени t и двух инвариантов деформации ($I_1(\varepsilon) = 0$ в силу условия несжимаемости при малых деформациях).

Скалярная функция θ была найдена авторами для всех пяти исследованных материалов. Ясно, что уравнения (4.1), в которые явно входит время t , не могут служить математической моделью каких бы то ни было материалов. Они не дают возможности судить не только о поведении материалов в процессах, связанных с изменением тензора деформации или температуры, но даже о начальной стадии процесса релаксации напряжений при $\varepsilon_{ij} = \text{const}$. В то же время можно предложить целый класс моделей с соотношениями типа (1.6), которые описывают поведение материала в любом процессе и для которых конечная стадия релаксации при фиксированных малых деформациях подчиняется уравнениям (4.1). Пусть, например

$$A^{ij} = \varepsilon^{ij} + \frac{\alpha}{\chi} \sigma^{ij}, \quad \alpha > 0, \quad (4.2)$$

где $\alpha = \alpha(\varepsilon_{ij}, T)$ — функция, которую нужно определить из экспериментов. Распорядимся еще функцией χ так, чтобы кинетическое уравнение для χ имело вид

$$\frac{d\chi}{dt} = -M(\varepsilon_{ij}, T) \chi^\beta, \quad \beta > 1 \quad (4.3)$$

M и $\beta = \beta(T)$ также определяются из экспериментов.

Тогда при любом выборе коэффициентов B^{ij} и A^{ijkl} в соотношениях (1.6) изотермическая релаксация напряжений при фиксированных деформациях подчиняется следующим законам:

$$d\sigma^{ij} = \left(\varepsilon^{ij} + \frac{\alpha}{\chi} \sigma^{ij} \right) d\chi$$

или

$$d(\sigma^{ij} - \sigma^{g^{ojj}}) = \left[\varepsilon^{ij} + \frac{\alpha}{\chi} (\sigma^{ij} - \sigma^{g^{ojj}}) \right] d\chi \quad (4.4)$$

В этих формулах g^{ojj} — компоненты G в недеформированном пространстве, $\sigma = \sigma^{ij} g_{ij}^o / 3$, деформации малы и материал несжимаем: $I_1(\varepsilon) = 0$.

Решение системы (4.3) и (4.4) дается формулами

$$\chi = [M(\beta - 1)t + C_0]^{-\frac{1}{\beta-1}} \quad (4.5)$$

$$\sigma^{ij} - \sigma^{g^{ojj}} = \frac{\chi}{\alpha - 1} \varepsilon^{ij} + \left[\sigma^{ojj} - \sigma^{g^{ojj}} - \frac{\chi_0}{\alpha - 1} \varepsilon^{ij} \right] \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^\alpha \quad (4.6)$$

где $\sigma^{ojj} = \sigma^{ij}$, $\sigma^o = \sigma$, $\chi_0 = \chi$ при $t = 0$ $C_0 = \frac{1}{\chi_0^{\beta-1}}$

При больших временах $t (t \gg \tau)$ эти формулы переходят в

$$\chi = [M (\beta - 1) t]^{-\frac{1}{\beta-1}} \quad (4.7)$$

$$\sigma^{ij} - \sigma g^{oij} = \frac{\chi}{\alpha - 1} \varepsilon^{ij} = (\alpha - 1)^{-1} [M (\beta - 1) t]^{-\frac{1}{\beta-1}} \varepsilon^{ij} \quad (4.8)$$

Величина τ выбирается равной наибольшему из t_1 и t_{ij} , причем

$$t_1 = \frac{C_0}{M (\beta - 1)}, \quad t_{ij} = \frac{C_0^{\alpha/\alpha-1} [(\alpha - 1) (\sigma^{oij} - \sigma^o g^{oij})]^{(\beta-1)/(\alpha-1)}}{M (\beta - 1) (\varepsilon^{ij})^{(\beta-1)/(\alpha-1)}} - \frac{C_0}{M (\beta - 1)}$$

($i, j = 1, 2, 3$)

Таким образом, конечная стадия процессов релаксации напряжений в средах рассматриваемого типа описывается формулами, совпадающими по структуре с найденными авторами работы [3]. Именно:

1) напряжения не зависят от их начального значения; это означает, что материал «забывает» историю предварительного деформирования;

2) зависимость напряжений от времени и деформации представляется в виде

$$\sigma^{ij} - \sigma g^{oij} = \varphi_1(t) \varphi_2(\varepsilon_{ij}, T_0) \varepsilon^{ij}$$

где φ_1 не зависит от деформаций, а φ_2 — от времени;

3) Функция

$$\varphi_1 = t^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

— убывающая функция времени t при $\beta > 1$. На основании результатов экспериментов, приведенных в виде таблиц в работе [3], можно определить значение β при температуре $T = 21 \pm 1^\circ \text{C}$, соответствующей условиям испытаний, а также зависимость функции

$$(\alpha - 1)^{-1} [M (\beta - 1)]^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

от деформаций при той же температуре. Так, например, для образцов из поливинилхлоридного соединения № 1 можно принять

$$\beta - 1 = 7.64, \quad \rho (\alpha - 1)^{-1} [M (\beta - 1)]^{-\frac{1}{\beta-1}} = A$$

причем A — константа для заданной температуры, равная $1.85 \cdot 10^3 \text{ ф/дюйм}^2$; для образцов из поливинилхлоридного соединения № 3

$$\beta - 1 = 6.38, \quad \rho (\alpha - 1)^{-1} [M (\beta - 1)]^{-\frac{1}{\beta-1}} = A - B \lg J_1$$

где $J_1 = 2 (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj})$, $A = 0.89 \cdot 10^3 \text{ ф/дюйм}^2$, $B = 0.86 \cdot 10^3 \text{ ф/дюйм}^2$ при той же температуре испытаний.

Однако опытов, приведенных в [3], совершенно недостаточно для полного определения модели. Они не дают возможности выбрать χ_0 , так как начальная стадия релаксации не исследовалась; из них нельзя найти α и M по отдельности, определить зависимость всех функций от температуры, выбрать подходящим образом коэффициенты B^{ij} , A^{ijkl} , κ , а также вид свободной энергии F . Для полного определения модели необходимо провести эксперименты, в частности, на изотермическую ползучесть и деформирование в условиях переменной температуры.

Поступила 17 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов. ДАН СССР, 1962, т. 142, № 1.
2. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
3. Bergen I. T., Messersmith D. C., Rivlin R. S. Stress Relaxation for Biaxial Deformations of Filled High Polymers. Journ. of Applied Polymer Science, 1960, Vol III, issue № 8, p. 153—167.