

ОБ ОДНОМ МИНИМАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ В ДИНАМИКЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В. П. Тамуж

(Москва)

Единственность решения и вариационные принципы хорошо изучены для статики жестко-пластического тела [1]. В совершенно ином положении находится динамика жестко-пластических тел. Первой и единственной работой по вариационным методам в этой области является статья Ржаницына [2], где автор предлагает для нахождения формы движения балки и пластинки за пределом упругости использовать принцип Лагранжа. При этом, однако, накладывается жесткое ограничение о неизменяемости формы движения во времени. Кроме того, вопрос о законности применения принципа Лагранжа для жестко-пластических тел также остается открытым.

Ниже доказывается одно экстремальное свойство динамики жесткого идеально пластического тела. Показано, что действительные ускорения в каждый момент времени минимизируют некоторый функционал, причем, действительное поле ускорений в данный момент времени единственно. Этот минимальный принцип можно использовать для приближенного решения задач динамики жестко-пластических тел.

1. Пусть имеется жестко-пластическое тело объема V с кусочно гладкой границей S . На части границы S_T заданы поверхностные нагрузки T_i , на остальной части границы S_v заданы скорости v_i . В момент $t = t_0$ в теле задано поле скоростей $v_i^*(x, y, z, t_0)$ и, значит, известны также скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 1/2 (v_{i,j}^* + v_{j,i}^*)$. Звездочками здесь и в дальнейшем отмечены действительные поля. Точками наверху будем обозначать частные производные по времени. Изменением геометрии тела в процессе деформирования пренебрегаем.

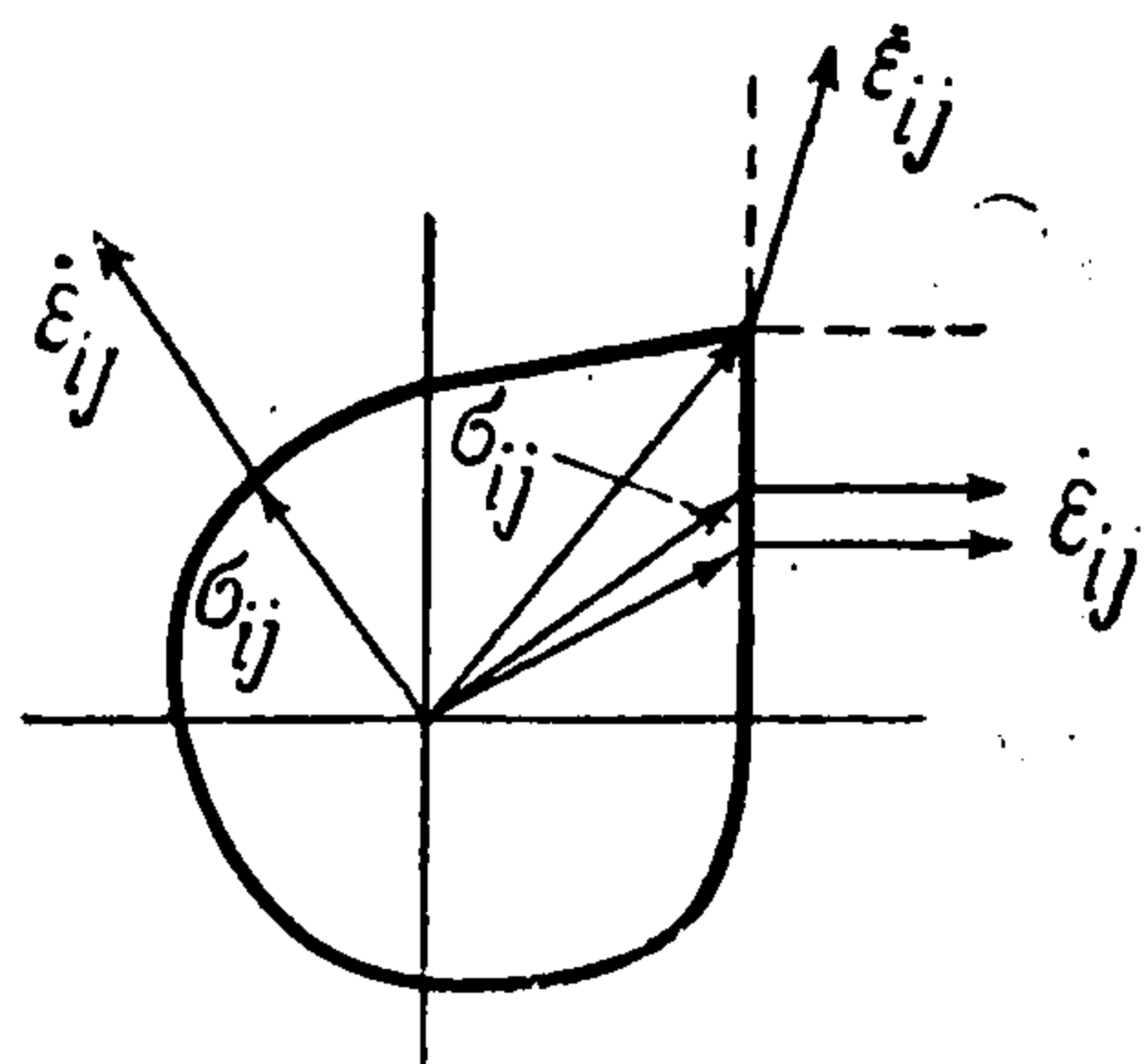
Возможными скоростями и соответственными возможными скоростями деформаций назовем $v_i(x, y, z, t)$ и $\dot{\epsilon}_{ij}(x, y, z, t) = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$ такие, при которых:

- 1) выполняются кинематические граничные условия на S_v ;
- 2) не нарушается сплошность тела;
- 3) удовлетворяются условия несжимаемости материала $v_{i,i} = 0$;
- 4) скорости деформаций подчинены закону течения, ассоциированному с функцией текучести $f(\sigma_{ij})$;
- 5) в момент $t = t_0$ возможные скорости совпадают с действительным полем скоростей

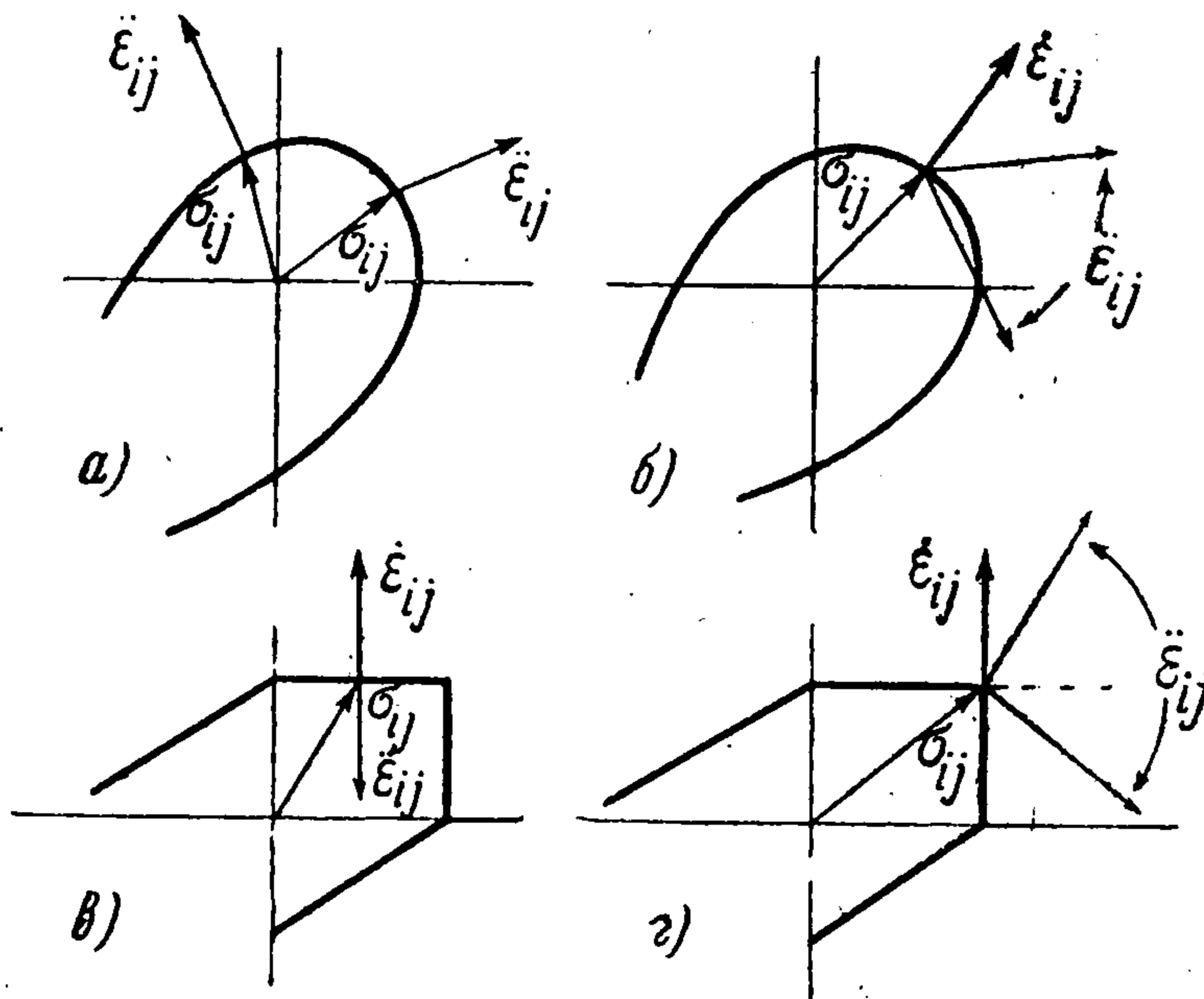
$$v_i(x, y, z, t)_{t=t_0} = v_i^*(x, y, z, t_0)$$

Кинематически возможным полем напряжений σ_{ij} называются напряжения, согласующиеся посредством закона течения с $\dot{\epsilon}_{ij}$. Если $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$, то возможно любое напряженное состояние, изображаемое или внутри или на самой поверхности текучести. Если $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$, то σ_{ij} изображается

точкой на поверхности текучести, где внешняя нормаль к поверхности совпадает с направлением $\dot{\epsilon}_{ij}$. Различные возможные случаи показаны на фиг. 1. В случае строго выпуклой поверхности текучести напряжения σ_{ij} определяются однозначно.



Фиг. 1



Фиг. 2

Возможное поле ускорений получается путем дифференцирования по времени возможного поля скоростей

$$w_i(x, y, z, t_0) = \left(\frac{\partial v_i(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{t=t_0}, \quad \ddot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}) \quad (1.1)$$

Действительные ускорения w_i^* и $\ddot{\epsilon}_{ij}^*$ выделяются из возможных тем, что удовлетворяются уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j}^* + p_i - mw_i^* = 0 \quad (1.2)$$

где p_i — массовые силы, m — плотность, σ_{ij}^* — действительные напряжения и поэтому они удовлетворяют граничным условиям на S_T

$$\sigma_{ij}^* n_j = T_i \quad (1.3)$$

Теперь необходимо рассмотреть ограничения, накладываемые на возможные ускорения деформаций ассоциированным законом течения.

Пусть $f(\sigma_{ij}) = 0$ выпуклая гладкая поверхность, тогда

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \begin{cases} \lambda = 0, & \text{если } f < 0 \\ \lambda \geq 0, & \text{если } f = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь λ и $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ — функции времени и координат. Дифференцируя по времени, имеем

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} = 0, \lambda = 0, & \text{если } f < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0, & \text{если } f = 0, \lambda = 0 \\ \dot{\lambda} \text{ любое,} & \text{если } \lambda > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Таким образом, при $\lambda = 0$ ускорение деформации $\ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \partial f / \partial \sigma_{ij}$ подчиняется ассоциированному закону течения с неотрицательным множителем $\dot{\lambda}$ (фиг. 2, а).

Если $\lambda > 0$, то на $\ddot{\epsilon}_{ij}$ никакие ограничения не накладываются (фиг. 2, б).

Пусть имеем кусочно линейную поверхность текучести

$$f_k = a_{ijk} \sigma_{ij}$$

Тогда

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda_k a_{ijk} \begin{cases} \lambda_k = 0, & \text{если } f_k < 0 \\ \lambda_k \geq 0, & \text{если } f_k = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует,

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_k a_{ijk} \begin{cases} \dot{\lambda}_k = 0, & \text{если } f_k < 0 \\ \dot{\lambda}_k \geq 0, & \text{если } f_k = 0, \lambda_k = 0 \\ \dot{\lambda}_k \text{ любое,} & \text{если } \lambda_k > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Следовательно, при $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ ускорение деформаций $\ddot{\epsilon}_{ij}$ подчиняется обобщенному ассоциированному закону течения.

Если

$$\lambda_r \neq 0, \quad \lambda_k = 0, \quad f_k < 0 \quad (k \neq r)$$

то $\ddot{\epsilon}_{ij}$ ортогонально к поверхности $f_r = a_{ijr} \sigma_{ij}$, но может быть направлено по внутренней нормали (фиг. 2, в).

Если

$$\lambda_r > 0, \quad \lambda_k = 0 \quad (k \neq r), \quad f_k < 0 \quad (k \neq r, r+1), \quad f_{r+1} = 0$$

то ускорения деформаций направлены, как показано на фиг. 2, г.

Если напряжения соответствует угловой точке, то никакие ограничения на $\ddot{\epsilon}_{ij}$ не накладываются.

2. Теорема. Из всех кинематически возможных $\ddot{\epsilon}_{ij}$, w_i и σ_{ij} действительными w_i^* , $\ddot{\epsilon}_{ij}^*$ и σ_{ij}^* в каждый момент времени будут те, которые минимизируют выражение

$$J = \int_V \frac{m w_i^2}{2} dV - \int_V p_i w_i dV - \int_{S_T} T_i w_i ds + \int_V \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2.1)$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$J^* - J = \int_V \frac{m}{2} (w_i^{*2} - w_i^2) dV - \int_V p_i (w_i^* - w_i) dV - \int_S T_i (w_i^* - w_i) dS + \int_V (\sigma_{ij}^* \ddot{\epsilon}_{ij}^* - \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij}) dV \leq 0 \quad (2.2)$$

Преобразуем первый интеграл выражения (2.2), выделяя неположительную часть

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{m}{2} (w_i^{*2} - w_i^2) dV = \\ & = \int_V m w_i^* (w_i^* - w_i) dV - \int_V \frac{m (w_i^* - w_i)^2}{2} dV \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя (1.2) и (1.3), преобразуем следующие интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_V m w_i^* (w_i^* - w_i) dV - \int_V p_i (w_i^* - w_i) dV - \int_S T_i (w_i^* - w_i) ds = \\ & = \int_V (m w_i^* - p_i) (w_i^* - w_i) dV - \int_S \sigma_{ij}^* n_j (w_i^* - w_i) ds = \\ & = \int_V \sigma_{ij,j}^* (w_i^* - w_i) dV - \int_V [\sigma_{ij}^* (w_i^* - w_i)_j] dV = \\ & = - \int_V \sigma_{ij}^* [w_{i,j}^* - w_{i,j}] dV = - \int_V \sigma_{ij}^* (\ddot{\epsilon}_{ij}^* - \ddot{\epsilon}_{ij}) dV \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этом преобразовании использовалась симметричность σ_{ij}^* и предполагалось, что σ_{ij}^* , w_i^* и w_i имеют частные производные по координатам. Подставляя (2.4) и (2.3) в (2.2), непосредственно получаем, что

$$-J = - \int_V \frac{m (w_i^* - w_i)^2}{2} dV + \int_V \ddot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) dV \quad (2.5)$$

Исследуем выражение

$$\ddot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \quad (2.6)$$

Если в момент $t = t_0$ имеем $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$, $f(\sigma_{ij}) < 0$, то $\ddot{\epsilon}_{ij} = 0$.

Если $\dot{\epsilon}_{ij}^* \neq 0$ и $f(\sigma_{ij}) = 0$ — гладкая выпуклая поверхность, то σ_{ij} определяется однозначно из (1.4), и кинематически возможное напряжение совпадает с σ_{ij}^* , выражение (2.6) в этой точке равно нулю.

Если $f(\sigma_{ij}) = 0$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$, то в силу (1.5) имеем $\ddot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \leq 0$, так как эта величина пропорциональна скалярному произведению внешней нормали к поверхности f в точке σ_{ij} на вектор, направленный от σ_{ij} к σ_{ij}^* . Если $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ определяет гиперплоскость f_k на поверхности текучести, то σ_{ij}^* и σ_{ij} оба находятся на этой гиперплоскости и в силу (1.7) выражение (2.6) неположительно.

Следовательно, во всех случаях выражение (2.6) и вместе с ним (2.5) неположительны. Теорема доказана полностью.

Из доказанной теоремы непосредственно следует единственность поля ускорений в каждый момент времени. Пусть имеются два полных решения $\ddot{\epsilon}_{ij1}$; w_{i1} ; σ_{ij1} и $\ddot{\epsilon}_{ij2}$; w_{i2} ; σ_{ij2} . Этим решениям соответствуют функционалы J_1 и J_2 . По доказанному $J_1 \leq J$ для любого возможного J , в том числе J_2 . Но так же J_2 меньше любого J , в том числе J_1 . Следовательно, $J_1 - J_2 = 0$. Это выражение можем привести в виду, аналогичному (2.5)

$$J_1 - J_2 = - \int_V \frac{m (w_{i1} - w_{i2})^2}{2} dV + \int_V \ddot{\epsilon}_{ij1} (\sigma_{ij2} - \sigma_{ij1}) dV = 0$$

Так как оба интеграла неположительны, то каждый из них равен нулю. Отсюда следует, что $w_{i1} \equiv w_{i2}$, во всем объеме V , а следовательно, также $\ddot{\epsilon}_{ij1} \equiv \ddot{\epsilon}_{ij2}$. Напряжения σ_{ij} в точках, где $\ddot{\epsilon}_{ij} = 0$, $\ddot{\epsilon}_{ij} = 0$, не определяется. Если $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$ или $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$, $\ddot{\epsilon}_{ij} \neq 0$, то σ_{ij} определяется механизмом течения и в случае кусочно линейной поверхности текучести может быть неоднозначно

3. Можно обобщить доказанный минимальный принцип на поля ускорений, имеющих разрывы первого рода на поверхностях, разбивающих тело на конечное число областей, внутри которых ускорения непрерывны. Такое обобщение необходимо, так как в практических задачах ускорения, как правило, разрывны. В выражении (2.1) для функционала J следует добавить члены, соответствующие работе напряжений на ускорения на поверхностях разрыва, т. е.

$$J = \int_V \frac{m}{2} w_i^2 dV - \int_V p_i w_i dV - \int_{S_T} T_i w_i dS + \int_V \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} dV + \int_l \sigma_{ij} n_j [w_i] dl \quad (3.1)$$

причем последний интеграл распространяется по всем поверхностям разрыва l , где скачок в ускорении $[w_i] \neq 0$; здесь и в дальнейшем квадратными скобками обозначены скачки величин.

В формуле (2.2) добавляются члены

$$\int_{l^*} \sigma_{ij}^* n_j^* [w_i^*] dl^* - \int_l \sigma_{ij} n_j [w_i] dl$$

где l^* — поверхности разрыва действительных ускорений и l^* , вообще говоря, не совпадает с l .

В формуле (2.4) интеграл по поверхности преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} - \int_S T_i (w_i^* - w_i) dS &= - \int_V \sigma_{ij}^* \ddot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_V \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} dV - \\ &- \int_{l^*} \sigma_{ij}^* n_j^* [w_i^*] dl^* + \int_l \sigma_{ij} n_j [w_i] dl \end{aligned}$$

В окончательном выражении (2.5) появится интеграл

$$\int_l (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j [w_i] dl \quad (3.2)$$

который можно оценить как неположительный. Для этого надо изучить условия на скачке ускорений в сплошном теле.

Рассмотрим случай плоской деформации. Условие пластичности и закон течения обычные

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (3.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \lambda \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = 2\lambda \tau_{xy} \quad (3.4)$$

Пусть точка P принадлежит l при $t = t_0$. Введем для простоты локальную систему координат с началом в точке P , ось x направлена по нормали к линии разрыва.

Если $[\varphi] = 0$ на l , то выполняются условия

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + G \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.5)$$

где G — скорость линии разрыва. Из условия сохранения массы следует, что $[v_x] = 0$ в несжимаемом материале на подвижной линии

разрыва¹. Поэтому из (3.5) получаем

$$[w_x] + G \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = 0$$

Значит, $[w_x] \neq 0$, лишь, если $G \neq 0$, и $[\partial v_x / \partial x] \neq 0$, что вследствие несжимаемости и кинематических условий (3.5) может быть только при $[v_y] \neq 0$ в момент $t = t_0$. Эти же выводы в более общей форме следуют из книги Томаса [3]. Итак, если линия разрыва стационарна или скорости не претерпевают на ней сильный разрыв, то $[w_x] = 0$ и подынтегральное выражение (3.2) переписется в виде

$$D = (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}) [w_y] \quad (3.6)$$

Если $\lambda = 0$, то $\ddot{\epsilon}_{xx}$, $\ddot{\epsilon}_{yy}$, $\ddot{\epsilon}_{xy}$ удовлетворяют уравнениям (3.4) с множителем $\dot{\lambda} \geq 0$. Если рассматривать линию разрыва как тонкую полосу с быстрым, но непрерывным изменением w_y , то из (3.3) и (3.4) легко следует, что $\tau_{xy} = \pm k$, где знак совпадает со знаком $[w_y]$. Так как $|\tau_{xy}^*| \leq k$, то $D \leq 0$.

Если $\lambda > 0$, то кинематически возможное τ_{xy} определяется однозначно из (3.4) и, следовательно,

$$\tau_{xy}^* - \tau_{xy} = 0, \quad D = 0$$

Наконец, $[w_x] \neq 0$ может быть лишь на линии сильного разрыва для скоростей, значит

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^* = \pm k$$

и подынтегральное выражение (3.2) равно

$$D = [w_x] (\sigma_x^* - \sigma_x) \quad (3.7)$$

Если опять рассматривать линию разрыва как предельный случай тонкой полосы толщиной Δx , где w_x изменяется быстро, но непрерывно, то вследствие несжимаемости материала можно написать $\Delta w_x / \Delta x + \Delta w_y / \Delta y = 0$ и устремляя Δx и Δy к нулю, получим, что w_y терпит разрыв в каждой точке по направлению касательной вдоль всей линии разрыва, что кажется невозможным. Но, если это и так, то следует учесть работу напряжений на эти разрывы ускорений, после этого опять можно получить, что $J^* \leq J$.

4. В случае изгиба пластинок удобно пользоваться обобщенными переменными: изгибающими и крутящим моментами M_x , M_y и T и скоростями кривизн и кручения

$$\dot{\kappa}_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \dot{\kappa}_y = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \dot{\tau} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

где v — скорость прогиба пластинки.

Условие пластичности Мизеса и закон течения известны

$$M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3T^2 = \frac{3}{4} M_0^2 \quad (4.1)$$

$$\dot{\kappa}_x = \lambda (2M_x - M_y), \quad \dot{\kappa}_y = \lambda (2M_y - M_x), \quad \dot{\tau} = 6\lambda T \quad (4.2)$$

¹ Исключение составляют одномерные задачи, где скачок в скорости может возникать вследствие изменения поперечного размера образца.

Ускорение диссипации на единицу длины линии разрыва выражается $[-\partial w / \partial x] M_x + [-\partial w / \partial y] T$. Чтобы доказать минимальность J для разрывных ускорений, следует оценить знак выражения

$$D = \left[-\frac{\partial w}{\partial x}\right] (M_x^* - M_x) + \left[-\frac{\partial w}{\partial y}\right] (T^* - T) \quad (4.3)$$

где w — ускорение прогиба.

Если линия разрыва совпадает с шарнирной окружностью, то

$$[\partial v / \partial x] \neq 0, \quad M_x = M_x^* = \pm M_0, \quad T = T^* = 0 \quad (4.4)$$

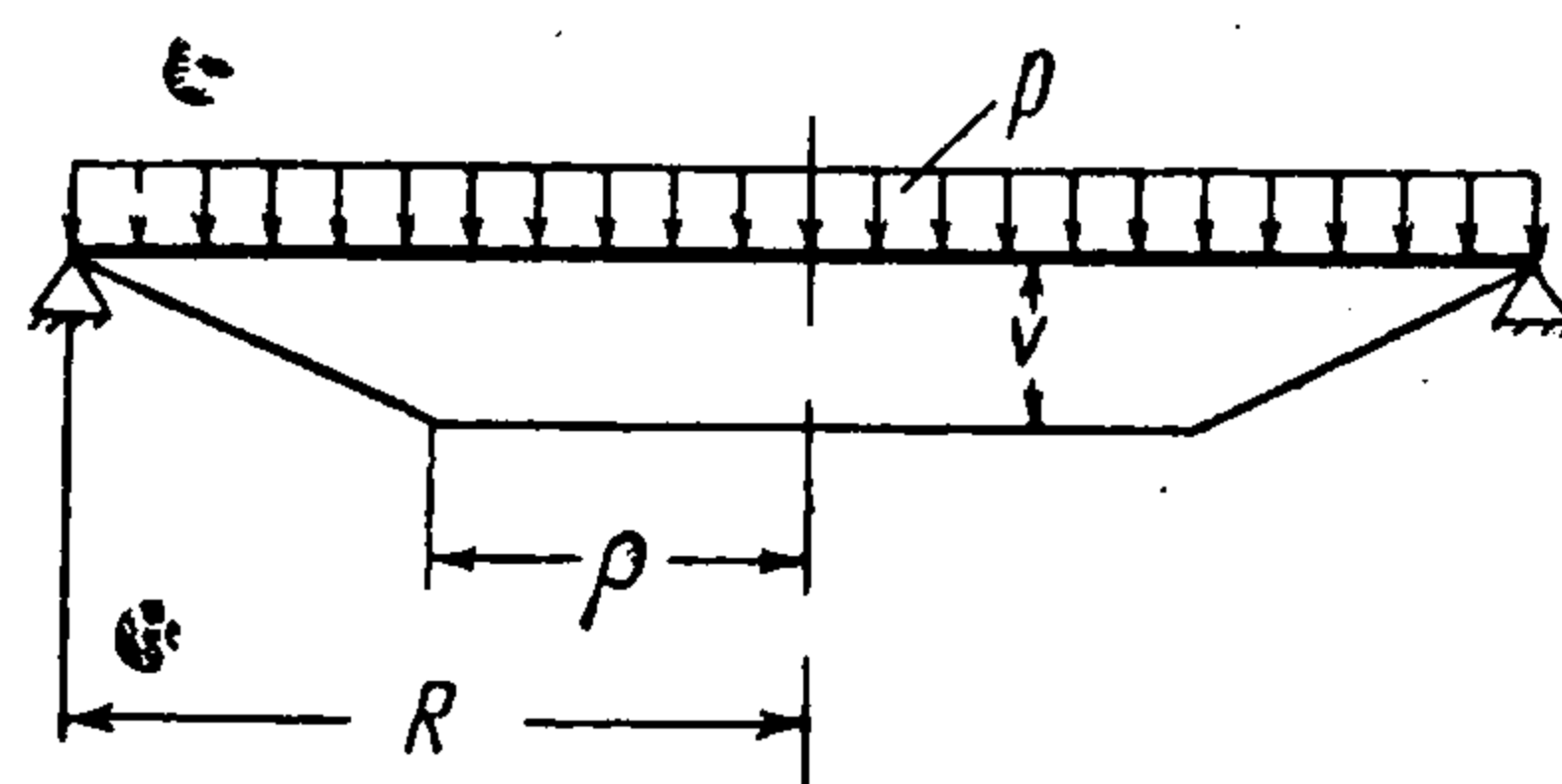
и, следовательно, $D = 0$.

Если $[\partial v / \partial x] = 0$, но $[\partial^2 v / \partial x^2] \neq 0$, то соотношения (4.4) остаются в силе [4]. Если $\dot{\kappa}_x$, $\dot{\kappa}_y$, $\dot{\tau}$ при $t = t_0$ непрерывны, но отличны от нуля, то $D = 0$, так как (4.2) определяет кинематически возможные M_x , M_y , T однозначно.

Наконец, пусть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

при $t = t_0$



Фиг. 3

Из условия непрерывности v на любой линии разрыва следует $[\partial v / \partial y] \equiv 0$ и отсюда вытекает

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right] + G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] = 0$$

и, следовательно, в этом случае

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0 \quad \text{при } t = t_0$$

Если при этом $[\partial w / \partial x] \neq 0$, то учитывая, что $\ddot{\kappa}_x$, $\ddot{\kappa}_y$, $\ddot{\tau}$ удовлетворяют закону течения, совершенно аналогично, как в случае сильного разрыва скоростей, получаем $M_x = \pm M_0$, но $|M_x^*| \leq M_0$ и $D \leq 0$.

Используя результаты Гопкинса [5], можно рассмотреть пластинку с условием текучести Треска. В частности, следует учесть, что на линии разрыва скоростей изгибающий момент равен предельному.

Полученный минимальный принцип можно весьма просто использовать для приближенного решения задачи.

В качестве примера рассмотрим хорошо известную задачу, решенную Гопкинсом и Прагером [6].

Круглая опертая пластинка нагружена постоянным равномерно распределенным давлением p , за время $0 \leq t < t_1$, после чего нагрузка снимается. (Условие текучести Треска.)

Функционал J не будем варьировать непосредственно, а предположим, что распределение скоростей в каждый момент времени имеет форму усеченного конуса (фиг. 3)

$$\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = 0 \quad \text{при } r = R$$

$$\dot{y}(r) = 0, \quad \ddot{y}(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{y}(r, \Delta t)}{\Delta t} \quad \text{при } t = 0 \quad (4.5)$$

Таким образом, в начальный момент времени распределение \dot{y} совпадает с предполагаемым возможным распределением скорости

$$\dot{y}_{t=0} = \dot{v} \quad (0 \leq r \leq \rho), \quad \dot{y}_{t=0} = \frac{r-R}{\rho-R} \dot{v} \quad (\rho \leq r \leq R) \quad (4.6)$$

Для функционала имеем

$$J = 2\pi \left[\frac{m}{2} \int_0^{\rho} \dot{v}^2 r dr + \frac{m}{2} \int_{\rho}^R \left(\frac{r-R}{\rho-R} \right)^2 \dot{v}^2 r dr - \right. \\ \left. - p \dot{v} \int_0^{\rho} r dr - p \dot{v} \int_{\rho}^R \frac{r-R}{\rho-R} r dr + M_0 \int_{\rho}^R \frac{\dot{v}}{R-\rho} dr + M_0 \rho \frac{\dot{v}}{R-\rho} \right] = \\ = 2\pi \left[\frac{m \dot{v}^2}{24} (3\rho^2 + 2\rho R + R^2) - \frac{p \dot{v}}{6} (\rho^2 + \rho R + R^2) + \frac{\dot{v} M_0 R}{R-\rho} \right]$$

Приравняв нулю производные J по \dot{v} и ρ , получим уравнения для определения ρ и \dot{v} . Так, для ρ будем иметь:

$$\rho = 0, \quad \rho = 12M_0 \frac{R}{(R-\rho)^2 (R+\rho)} \quad (\rho \neq 0, \text{ если } p \geq 12M_0/R^2) \quad (4.7)$$

Вычисления дают

$$\dot{v} = \frac{(pR^2 - 6M_0)}{mR^2} \quad \text{при } \rho = 0, \quad \dot{v} = \frac{p}{m} \quad \text{при } \rho \neq 0$$

В момент $t \geq t_1$ имеем

$$\dot{y} = v \quad (0 \leq r \leq \rho), \quad \dot{y} = \frac{r-R}{\rho-R} v, \quad (\rho \leq r \leq R)$$

Отсюда следует

$$\ddot{y} = \dot{v} \quad (0 \leq r < \rho), \quad \ddot{y} = (r-R) \frac{\dot{v}(\rho-R) - v\dot{\rho}}{(\rho-R)^2} \quad (\rho < r \leq R)$$

и скачок

$$\left[-\frac{\partial \dot{y}}{\partial r} \right] = -\frac{\dot{v}(\rho-R) - v\dot{\rho}}{(\rho-R)^2} \quad (r = \rho)$$

Функционал

$$J = \frac{m}{24} \left\{ \dot{v}^2 (3\rho^2 + 2\rho R + R^2) + \left[2v\dot{\rho} - \frac{(v\dot{\rho})^2}{\rho-R} \right] (3\rho + R) \right\} + \\ + M_0 \frac{R}{(R-\rho)^2} [\dot{v}(R-\rho) + v\dot{\rho}]$$

Приравняв нулю производные по \dot{v} и $\dot{\rho}$, получаем дифференциальные уравнения с начальными условиями (4.7) и $v = pt_1/m$ для определения $v(t)$ и $\rho(t)$

$$\text{либо} \quad \dot{v} = 0, \quad \dot{\rho} (R^2 + 2R\rho - 3\rho^2) = -\frac{12M_0 R}{pt_1}$$

либо

$$\dot{v} = -\frac{M_0 12}{R^2 m}, \quad \rho = 0$$

После определения $\rho(t)$ и $v(t)$ можно найти всю остаточную деформацию.

Поступила 25 IV 1962

Кафедра теории пластичности МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. К о й т е р В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред, Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
2. Р ж а н и ц ы н А. Р. Экстремальное свойство формы движения жестко-пластической системы, нагруженной за пределом несущей способности. Изв. АН СССР, ОТН, серия Механика и машиностроение, 1959, № 2.
3. Т h o m a s Т. Y. Plastic Flow and Fracture in Solids. Acad. Press., 1961.
4. P r a g e r W. Discontinuous fields of plastic stress and flow. Proc. of the second U. S. National Congress of Appl. Mech., 1955, стр. 21—32 (Русск. пер. Сб. Механика, ИЛ, 1956, № 4 (38), 70—90).
5. Н о р k i n s Н. On the plastic theory of plates. Proc. Roy. Soc., A 241, 1957.
6. Н о р k i n s Н., P r a g e r W. On the Dynamics of Plastic Circular Plates ZAMP, 1954, 5 (Русск. пер. Сб. Механика, ИЛ, 1955, № 3 (31), 112—123).