

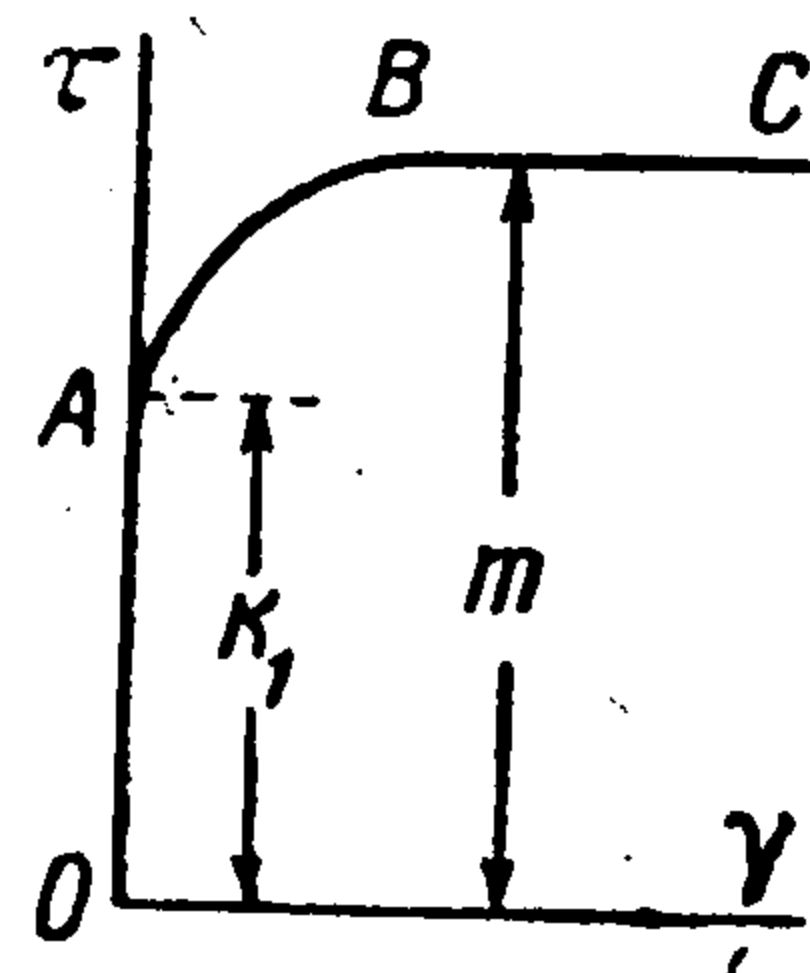
ОБ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ОСТАТОЧНЫХ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ

Д. Д. Ивлев
(Воронеж)

В. В. Новожилов и Ю. И. Кадашевич в работе [1] предложили двумерную динамическую модель, позволившую описать особенности поведения анизотропно упрочняющегося материала [2,3]. Идеи работы [1] могут быть использованы для конструирования широкого класса различных моделей сплошных сред.

Ниже на основе определения соответствующей двумерной динамической модели рассматриваются соотношения, определяющие идеально пластическое течение материала, в котором возникают (следуя терминологии В. В. Новожилова и Ю. И. Кадашевича) остаточные микронапряжения.

1. Для ряда материалов зависимость между касательным усилием τ и необратимой частью сдвига γ (в дальнейшем будем рассматривать только жестко-пластический материал) удовлетворительно описывается диаграммой, представленной на фиг. 1. Существенно, что в этом случае предел пластичности $\tau = k_1$ (точка A на фиг. 1) и предел текучести $\tau = m$ (точка B на фиг. 1) не совпадают между собой. Участок AB ($k_1 \leq \tau < m$) характеризует упрочнение материала и является, вообще говоря, нелинейным. При $\tau = m$ наступает идеально пластическое течение.



Фиг. 1

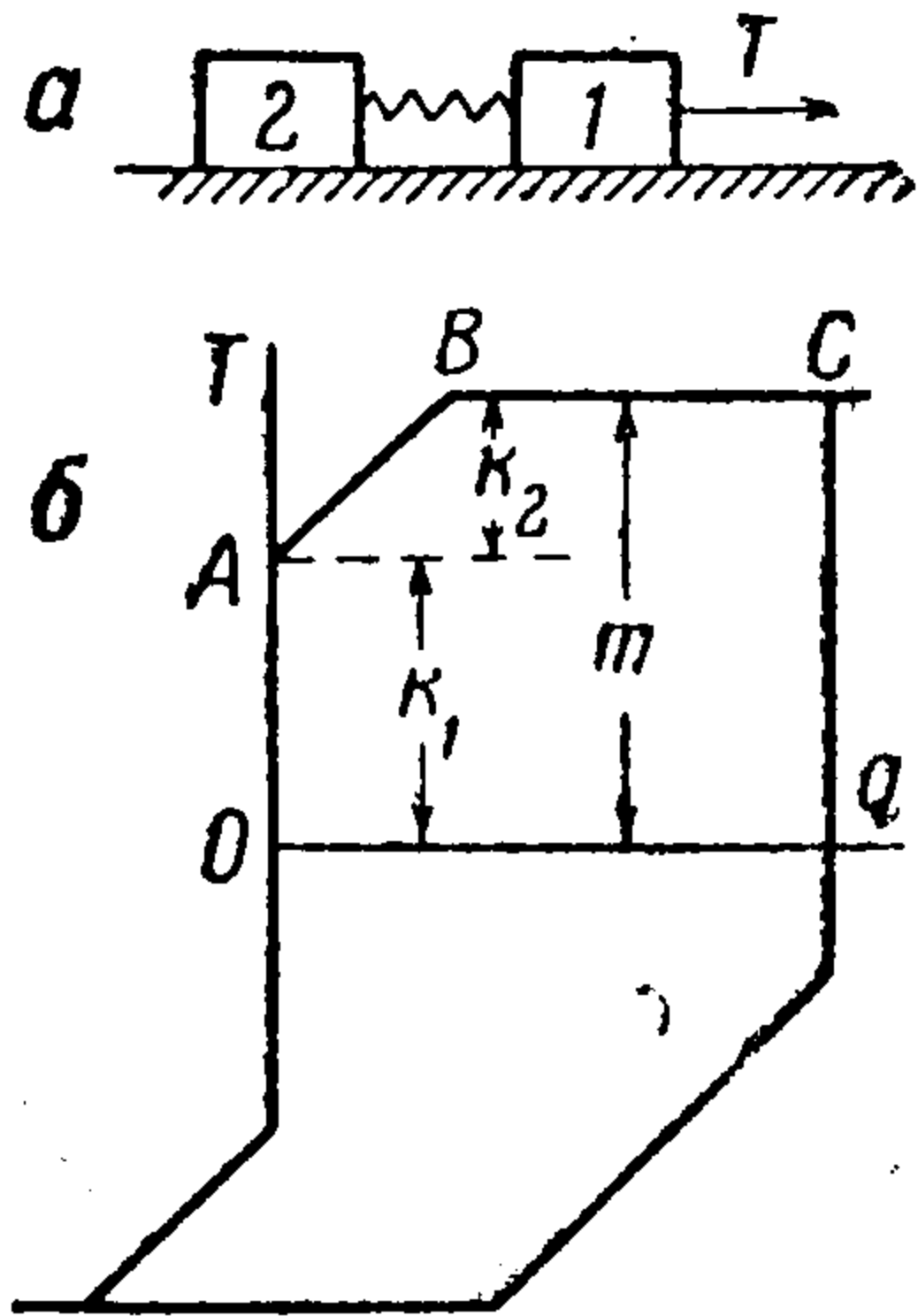
Рассмотрим поведение материала при идеально пластическом течении (участок BC на фиг. 1). В этом случае в отличие от обычного построения теории идеально жестко-пластического тела [4] возможны различные подходы к построению теории.

Если упрочняющееся тело остается изотропным, то соотношения идеально пластического течения имеют обычный вид [4]. В случае, когда имеет место анизотропное упрочнение, возникающие остаточные микронапряжения обуславливают характерные особенности идеально пластического течения. Для простоты рассмотрим случай идеального эффекта Баушингера.

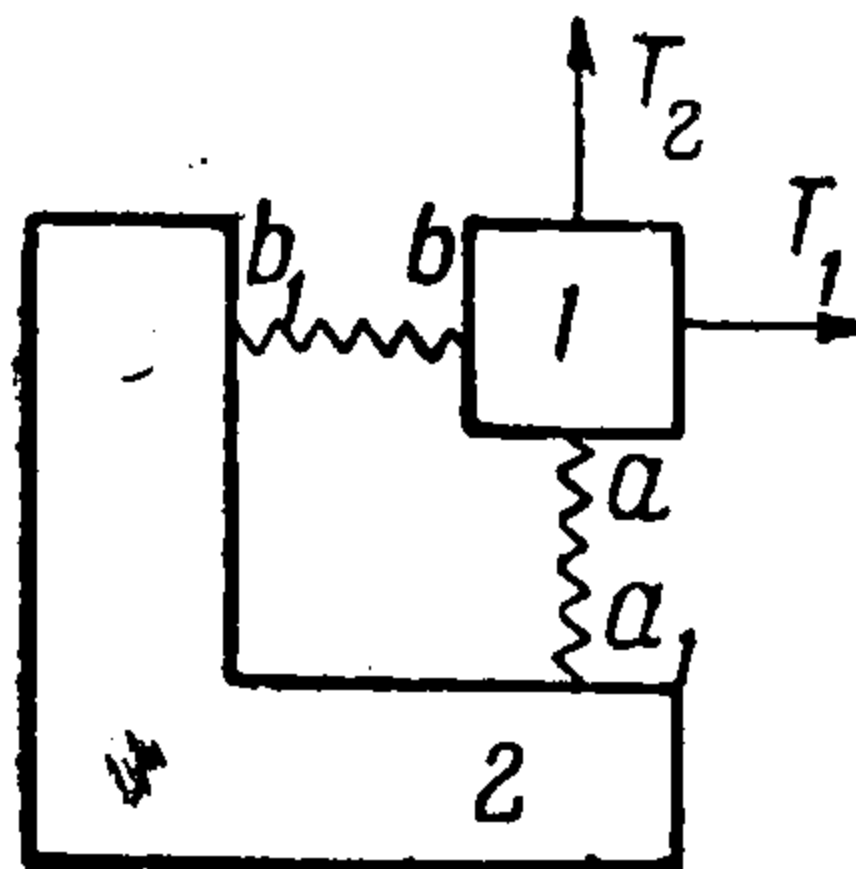
Рассмотрим вначале одномерную модель (фиг. 2, а), состоящую из двух элементов сухого трения, соединенных пружиной. Если обозначить через k_1 и k_2 пределы сопротивления трению соответственно у первого и второго элементов, то зависимость между растягивающей силой T и перемещением q будет представлена на фиг. 2, б. Нелинейность на участке AB может быть достигнута за счет нелинейной характеристики жесткости пружины. На фиг. 3 представлена соответствующая двумерная модель.

Очевидно, на поведении модели существенным образом скажутся усилия (фиг. 3) в пружинах aa_1 , bb_1 . Эти усилия соответствуют микронапря-

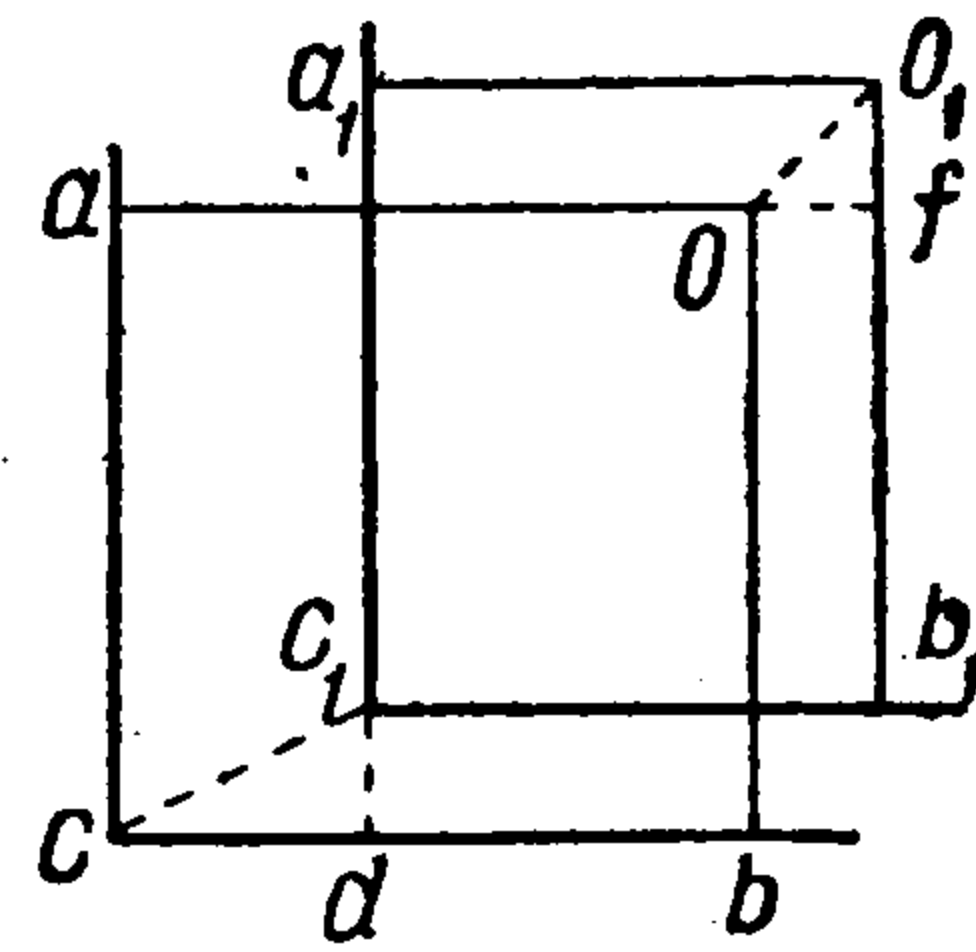
жениям сплошной среды. Случай, когда усилия в пружинах aa_1 , bb_1 не в состоянии преодолеть сопротивление сухого трения элемента 2, рассмотрен в работе [1]. В данном случае рассматривается идеально пластическое течение материала, когда усилия в пружинах aa_1 , bb_1 в состоянии преодолеть сопротивление сухого трения элемента 2.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Обозначим через T_1 и T_2 внешние усилия, натяжения пружин aa_1 и bb_1 через s_1 и s_2 . Предположим, что усилия T_i , s_i таковы, что элементы 1 и 2 получают некоторые приращения перемещений. На фиг. 4 первоначальное положение элемента 1 схематизировано точкой o , последующее — точкой o_1 . Элемент 2, занимавший положение acb , перейдет в положение $a_1b_1c_1$. Должно иметь место

$$(T_1 - s_1)^2 + (T_2 - s_2)^2 = k_1^2 \quad (1.1)$$

$$s_1^2 + s_2^2 = k_2^2 \quad (1.2)$$

Обозначим далее через q_1 , q_2 перемещения элемента 1 и через r_1 , r_2 — перемещения элемента 2. Из фиг. 4 имеем $of = \Delta q_1$, $o_1f = \Delta q_2$; $cd = \Delta r_1$, $c_1d = \Delta r_2$.

Коэффициенты жесткости пружин oa и ob обозначим через $1/c$, тогда

$$\Delta(q_1 - r_1) = c\Delta s_1, \quad \Delta(q_2 - r_2) = c\Delta s_2 \quad (1.3)$$

Перемещения элементов 1 и 2 происходят в направлении действующих сил, поэтому

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{T_1 - s_1}{T_2 - s_2}, \quad \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \frac{s_1}{s_2} \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1) — (1.4) позволяют изучить поведение системы, изображенной на фиг. 4. Следует отметить условный качественный характер развитых построений и предостеречь от далеко идущих аналогий между поведением динамической модели и сплошной среды. В этом случае не учитывается, например, вращение элемента 2 и связанные с этим эффекты, несущественные для дальнейшего.

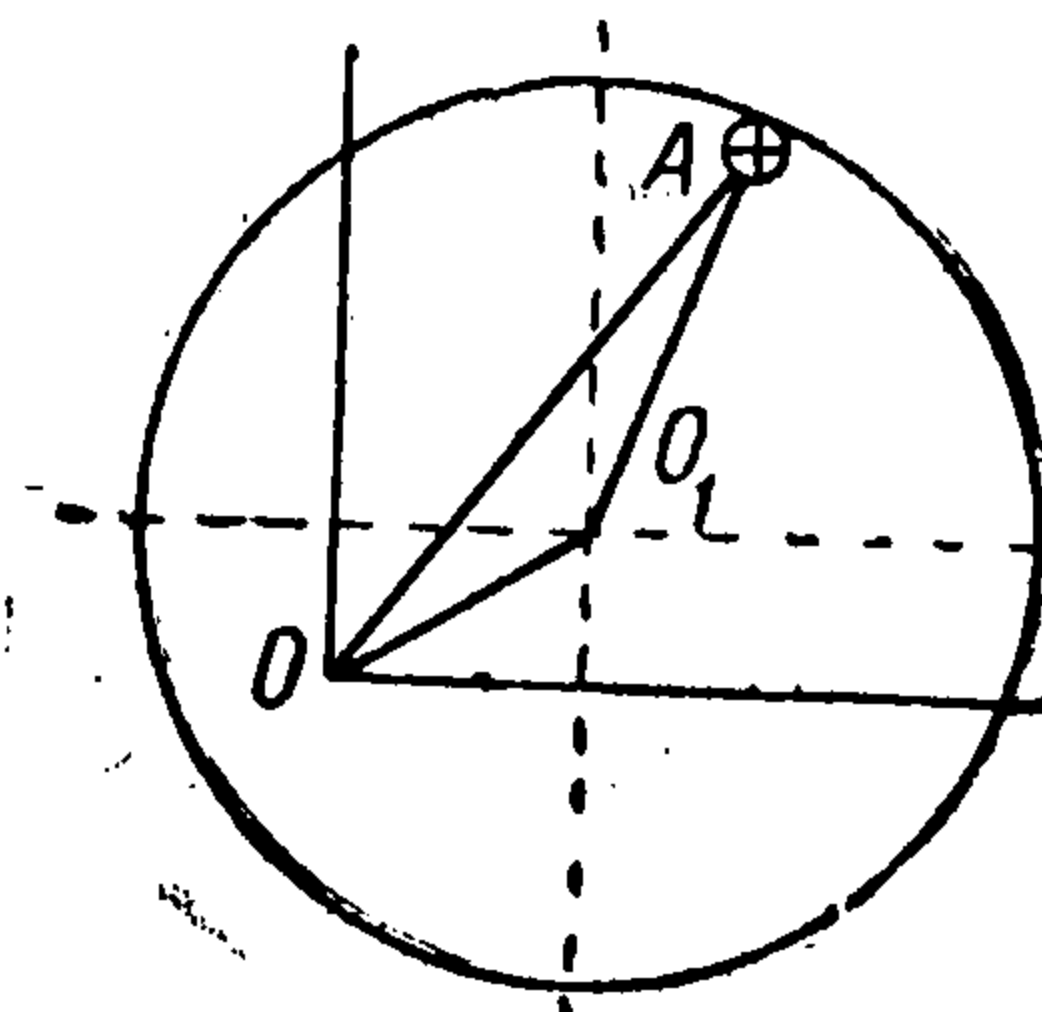
Некоторые особенности идеально пластического течения в данном случае удобно иллюстрировать при помощи кинематических моделей [5]. Для анизотропно упрочняющегося материала с идеальным эффектом Баушингера моделью может служить круговая рамка, передвигающаяся в плоскости под действием цапфы A , в случае, если между цапфой и рамкой отсутствует трение (фиг. 5). Точка O — первоначальный центр рамки,

точка O_1 — текущий центр рамки. Расстояние AO соответствует напряжениям, расстояние OO_1 — деформациям.

В данном случае соответствующую кинематическую модель можно представить в следующем виде. Представим два плоских кольца, вначале расположенных концентрично. Одно из них двигается под действием цапфы A , причем это же кольцо имеет в центре цапфу O_1 , под действием которой двигается второе кольцо. Трение между кольцами и цапфами отсутствует. Точка O — первоначальный центр обеих рамок (соответствующий естественному состоянию), точка O_1 — центр первого кольца, точка O_2 — центр второго кольца (фиг. 6).

Расстояние AO_2 соответствует напряжениям, O_1O_2 — микронапряжениям, OO_1 — деформациям.

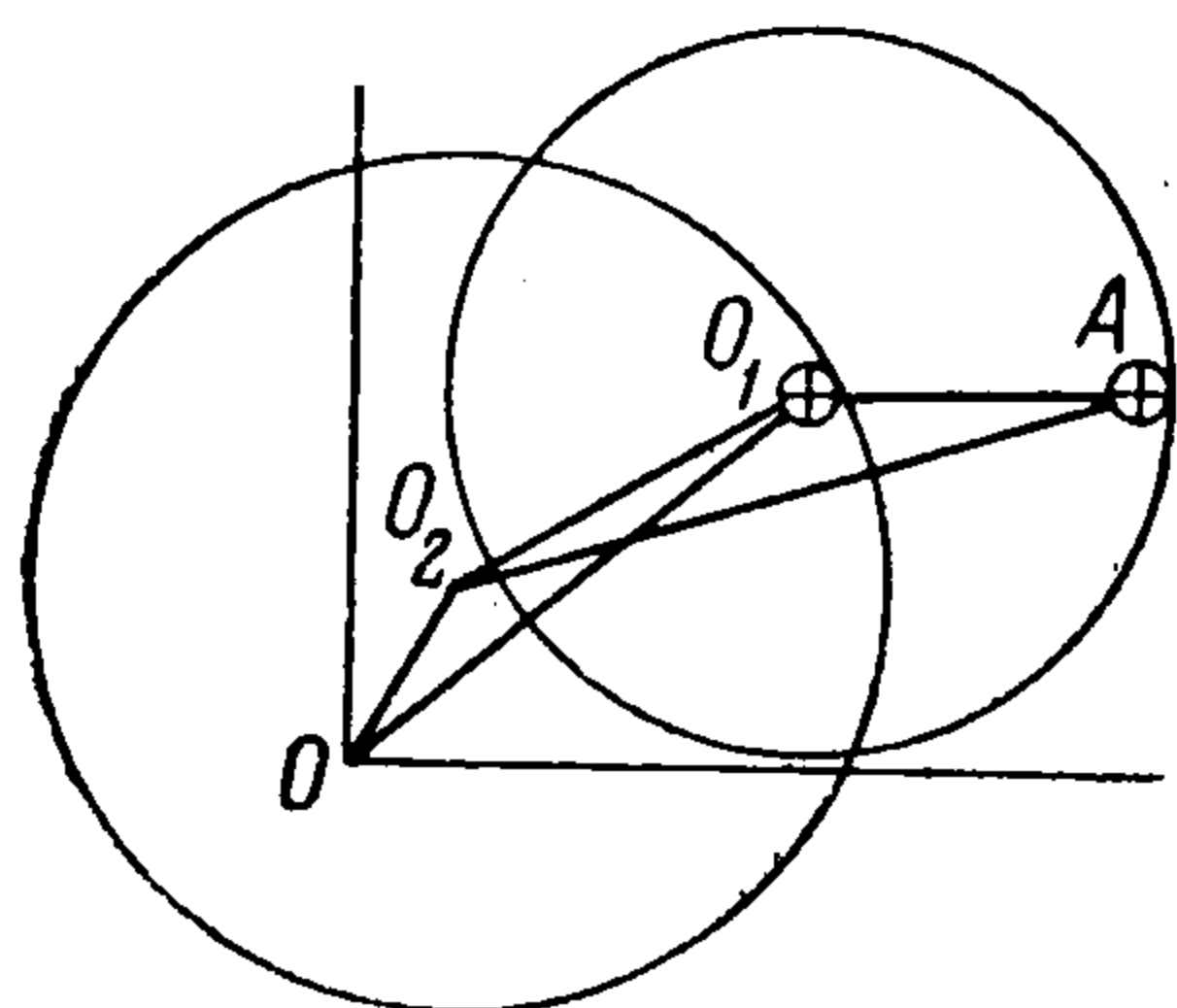
Отметим, что при развитии течения, путь нагружения которого стремится к некоторой прямой, точки A , O_1 , O_2 будут стремиться занять положение на одной прямой.



Фиг. 5

2. При использовании динамических аналогий усилиям ставятся в соответствие напряжения, перемещениям — деформации.

Обозначим, через σ_{ij} тензор действительных напряжений (соответствующий усилиям T_i), через s_{ij} — тензор микронапряжений (соответствующий усилиям t_i), через e_{ij} — тензор действительных деформаций (соответствующий перемещениям q_i элемента 1), через κ_{ij} — тензор внутренних микродеформаций (соответствующий перемещениям r_i элемента 2). Девiatorам соответствующих тензоров припишем штрих наверху.



Фиг. 6

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$, а компоненты тензора деформаций e_{ij} выражаются через компоненты перемещения $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Поведение материала в случае, когда микронапряжения s_{ij} не в силах преодолеть сопротивление соответствующих элементов сухого трения (элемент 2 на фиг. 2, а), описывается соотношениями теории анизотропного упрочнения и изучалось в работах [1-3] и др. Ниже рассматриваются соотношения идеально пластического течения, в этом случае напряжения σ_{ij} и s_{ij} таковы, что сухое трение обоих элементов преодолено.

Условия текучести запишем в виде

$$f_1(\sigma_{ij} - s_{ij}) = k_1, \quad f_2(s_{ij}) = k_2 \quad (2.1)$$

Рассмотрим выражения приращения работ

$$dA_1 = \sigma_{ij} de_{ij}, \quad dA_2 = s_{ij} d\kappa_{ij} \quad (2.2)$$

Предполагая экстремальность выражений dA_1 и dA_2 соответственно при условиях (2.1), определим закон деформирования, рассматривая выражения (2.1) в качестве пластического потенциала

$$de_{ij} = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\kappa_{ij} = d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial s_{ij}} \quad (2.3)$$

где $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ — множители пропорциональности.

Отметим, что аналогично можно было исходить из выражения работы $dA_{12} = (\sigma_{ij} - s_{ij}) de_{ij}$. Окончательные выражения получились бы неизменными, так как $\partial(\sigma_{ij} - s_{ij}) / \partial\sigma_{ij} = 1$ и, следовательно,

$$\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial f_1}{\partial(\sigma_{ij} - s_{ij})}$$

Используя предположение о природе тензора микронапряжений, получим

$$d(e_{ij}' - \kappa_{ij}') = cds_{ij} \quad (2.4)$$

где c можно считать функцией инвариантов тензора s_{ij} и даже тензоров σ_{ij} , $\sigma_{ij} - s_{ij}$. Вообще говоря, следует присоединить также условие

$$e - \kappa = Ks \quad (2.5)$$

где e , κ , s — первые инварианты соответствующих тензоров, величину K можно также считать функцией инвариантов тензоров напряжений.

Если f_1 и f_2 не зависят соответственно от первых инвариантов тензоров $\sigma_{ij} - s_{ij}$ и s_{ij} , то из (2.3) следует, что $e_{ij} = e_{ij}'$; $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}'$, $e = \kappa = 0$. Так как $s \neq 0$, то $K = \infty$.

3. Рассмотрим случай плоской деформации. Предположим, что условия пластичности (2.1) не зависят от третьих инвариантов дивидаторов напряжений σ_{ij} , s_{ij} . Полагая, что $e_z = \kappa_z = 0$, получим условия текучести

$$[(\sigma_x - s_x) - (\sigma_y - s_y)]^2 + 4(\tau_{xy} - s_{xy})^2 = 4k_1^2 \quad (3.1)$$

$$(s_x - s_y)^2 + 4s_x^2 s_y = 4k_2^2 \quad (3.2)$$

Соотношения пластического течения запишутся в виде

$$\frac{de_x}{(\sigma_x - s_x) - (\sigma_y - s_y)} = \frac{de_y}{(\sigma_y - s_y) - (\sigma_x - s_x)} = \frac{de_{xy}}{2(\tau_{xy} - s_{xy})} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\kappa_x}{s_x - s_y} = \frac{d\kappa_y}{s_y - s_x} = \frac{d\kappa_{xy}}{2s_{xy}} \quad (3.4)$$

Условия (2.4) перепишем в виде

$$d(e_x - \kappa_x) = \frac{c}{2} d(s_x - s_y), \quad d(e_y - \kappa_y) = \frac{c}{2} (s_y - s_x) \\ d(e_{xy} - \kappa_{xy}) = cds_{xy} \quad (3.5)$$

Считая для простоты $c = \text{const}$ и предполагая, что в начальном состоянии все компоненты напряжений и деформаций равны нулю, из (3.5) получим

$$e_x - \kappa_x = \frac{c}{2} (s_x - s_y), \quad e_y - \kappa_y = \frac{c}{2} (s_y - s_x), \quad e_{xy} - \kappa_{xy} = cs_{xy} \quad (3.6)$$

Условиям (3.1) и (3.2) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \omega + k_1 \cos 2\theta + s_x, & s_x &= s + k_2 \cos 2\psi \\ \sigma_y &= \omega - k_1 \cos 2\theta + s_y, & s_y &= s - k_2 \cos 2\psi \\ \tau_{xy} &= k_1 \sin 2\theta + s_{xy}, & s_{xy} &= k_2 \sin 2\psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k_1 \cos 2\theta + k_2 \cos 2\psi, & \sigma_y &= \sigma - k_1 \cos 2\theta - k_2 \cos 2\psi \\ \tau_{xy} &= k_1 \sin 2\theta + k_2 \sin 2\psi, & (\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \omega + s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условия (3.3) и (3.4) примут вид

$$de_x \sin 2\theta - de_{xy} \cos 2\theta = 0, \quad de_x + de_y = 0 \quad (3.9)$$

$$dk_x \sin 2\psi - dk_{xy} \cos 2\psi = 0, \quad dk_x + dk_y = 0 \quad (3.10)$$

Из (3.5) получим

$$d(e_x - \kappa_x) = -2ck_2 \sin 2\psi d\psi, \quad d(e_{xy} - \kappa_{xy}) = -2ck_2 \cos 2\psi d\psi \quad (3.11)$$

Исключая из (3.10) и (3.11) величины dk_{ij} , найдем

$$de_x \sin 2\psi - de_{xy} \cos 2\psi = -2ck_2 d\psi \quad (3.12)$$

Всюду в приведенных выше соотношениях выражения de_{ij} , $d\psi$ определяют приращения соответствующих компонент в зависимости от временного параметра. Разделив эти выражения на dt , можно перейти к скоростям изменения соответствующих величин. В дальнейшем используем эйлерово представление. Обозначим через ε_{ij} тензор скоростей деформаций, через u , v — скорости перемещений вдоль осей x , y . Отметим, что

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} u + \frac{\partial\psi}{\partial y} v$$

Подставляя выражения (3.7) в уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k_1 \sin 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k_1 \cos 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial y} - 2k_2 \sin 2\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} + 2k_2 \cos 2\psi \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} + 2k_1 \cos 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k_1 \sin 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial y} + 2k_2 \cos 2\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} + 2k_2 \sin 2\psi \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

Следует присоединить также уравнения (3.9)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sin 2\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos 2\theta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

и, наконец, уравнение (3.12)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sin 2\psi - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos 2\psi = -4ck_2 \frac{d\psi}{dt} \quad (3.15)$$

Отметим, что система пяти уравнений (3.13) — (3.15) содержит пять неизвестных: σ , θ , ψ , u , v . Обозначая через $\chi(x, y, t) = 0$ уравнение характеристической поверхности, получим, что характеристический определитель этой системы уравнений будет иметь вид

$$\frac{d\chi}{dt} (\chi_x^2 \cos 2\theta + 2\chi_x \chi_y \sin 2\theta \cos 2\theta - \chi_y^2 \cos 2\theta) = 0 \quad (3.16)$$

$$\left(\chi_x = \frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad \chi_y = \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)$$

Следовательно, система (3.13) — (3.15) всегда будет гиперболического типа; в плоскости xy имеем ортогональные характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.17)$$

Соотношения (3.13) вдоль характеристик примут вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} - 2k_1 \frac{\partial\theta}{\partial\xi} - 2k_2 \left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \cos 2(\psi - \theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \sin 2(\psi - \theta) \right] = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\eta} + 2k_1 \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + 2k_2 \left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \sin 2(\psi - \theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \cos 2(\psi - \theta) \right] = 0$$

где $d\xi$, $d\eta$ — элементы дуг вдоль характеристик.

Из соотношений (3.14) следует, что вдоль характеристик имеют место соотношения Гейрингер [4]

$$dU - Vd\theta = 0, \quad dV + Ud\theta = 0 \quad (3.19)$$

где U, V — компоненты скорости вдоль характеристик.

Отметим ряд частных случаев. Если пределы текучести и пластичности совпадают $k_1 = m$ ($k_2 = 0$), то из (3.14) и (3.15) следует, что $\theta = \psi$ и в этом случае имеют место обычные соотношения теории идеальной пластичности.

При $d\psi / dt = 0$ из (3.15) также следует, что $\theta = \psi$ и из (3.8) получим, что имеют место обычные соотношения теории идеальной пластичности при пределе текучести $m = k_1 + k_2$. Интересно отметить, что $d\psi / dt = 0$ только при $\theta = \psi$, причем, если $\theta \neq \psi$, то всегда $d\psi / dt \neq 0$. Величина ψ , вообще говоря, стремится совпасть с θ , чем ближе ψ к θ , тем меньше $d\psi/dt$. Этот факт иллюстрировался выше при помощи кинематической модели.

В случае, если тяги между элементами сухого трения жесткие, т. е. $c = 0$, то из (3.5) следует, что $e_{ij} = \kappa_{ij}$. Из (3.14), (3.15) снова получим, что $\theta = \psi$, исходные соотношения приводятся к обычным соотношениям идеального жестко-пластического тела при пределе текучести $m = k_1 + k_2$.

Наконец, если $k_1 = 0$, то $\sigma_{ij} = s_{ij}$ и имеют место соотношения теории идеально упруго-пластического тела.

Отметим некоторые характерные особенности идеально пластического течения при наличии остаточных микронапряжений. Как и в случае отсутствия микронапряжений, сетка характеристик ортогональная, однако теоремы Генки [4] здесь места не имеют. Максимальное касательное напряжение τ_{max} достигается не вдоль характеристик. Линии разрыва скоростей, согласно (3.14), как и в теории идеальной пластичности без наличия остаточных микронапряжений, будут совпадать с характеристиками.

Можно легко сформулировать основные краевые задачи: Гурса, Коши и смешанную, указав численные методы решения. Однако в этом случае деформированное состояние достигается переходом через область упрочнения, поэтому следует иметь в виду, что конечное решение будет зависеть от истории нагружения.

Автор признателен В. В. Новожилову за высказанные идеи и внимание.

Поступила 15 III 1962

Воронежский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашев Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
2. Прагер В. Влияние деформации на условие пластичности вязко-пластических тел. Сб. Теория пластичности. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948.
3. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. матем. ж., 1954, т. VI, № 3.
4. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1956.
5. Прагер В. Теория пластичности: обзор современных исследований, в книге Прагера В. и Ходжа Ф. Теория идеально пластических тел. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1956.