

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Под антиплоской деформацией понимается напряженное состояние в цилиндрическом теле бесконечно большой высоты, возникающее под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянных вдоль образующих. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации рассматривалась ранее в работах Треффца [1], Халта и Мак-Клинтока [2], Нейбера [3]. В работе [1] дано точное решение упруго-пластической задачи об антиплоской деформации профиля уголкового сечения с прямым углом раствора, а также аналогичной задачи для области, лежащей во внешности кругового отверстия. Упруго-пластическая задача для полуплоскости с угловым вырезом при малых значениях параметра нагружения решена в статье [2]. Нейбер [3] рассмотрел полосу с двумя симметричными угловыми выточками, причем для произвольной однозначной зависимости между напряжениями и деформациями решение задачи было сведено к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, а для некоторого специально подобранного закона решение получено в замкнутом виде.

Ниже рассматривается решение в квадратурах статической упруго-пластической задачи для внешности произвольного контура, целиком охватываемого пластической зоной и произвольно нагруженного (§ 2); точное решение задачи для внешности контура, образованного отрезками прямых и кривых линий, в том случае, когда отрезки прямых свободны от напряжений, а отрезки кривых дуг, произвольно нагруженные, целиком охвачены пластической зоной (§ 4).

Решения задач § 4 существенно основаны на решении одной нелинейной краевой задачи (§ 3). В качестве зависимости между напряжениями и деформациями всюду в статье принята диаграмма Прандтля.

§ 1. Общие соотношения. Поля смещений и напряжений в рассматриваемом теле таковы, что

$$\begin{aligned} u^* = v = 0, \quad w = w(x, y), \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u^*, v, w — компоненты вектора смещения; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты тензора напряжений; x, y, z — декартовы координаты (ось z параллельна образующей). В пластической области имеют место соотношения [4,5]

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\text{уравнение равновесия}) \quad (1.2)$$

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (\text{условие текучести}) \quad (1.3)$$

$$\tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{уравнение Генки}) \quad (1.4)$$

Здесь $k = \tau_s$ по условию Губера — Мизеса, $k = 2\tau_s / \sqrt{3}$ по условию Треска — Сен-Венана, τ_s — предел текучести при чистом сдвиге. Напряжения определяются независимо от поля смещений, если на границах пластической области заданы нагрузки. Представим напряжения в виде [5]

$$\tau_{xz} = k \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k \sin \theta \quad (1.5)$$

Здесь функция $\theta(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Характеристики уравнения (1.6) представляют собой семейство прямых $y = -x \operatorname{ctg} \theta + C$, $\theta = \operatorname{const}$, совпадающих с линиями скольжения и ортогональных вектору $\tau = \tau_{xz} + i\tau_{yz}$ в каждой точке. На основании соотношения Генки (1.4) вдоль линии скольжения имеет место также условие $w = \operatorname{const}$. Таким образом, поле напряжений в пластической области полностью определяется формой границы пластической области и граничной нагрузкой. На границе упругой и пластической областей принимаем непрерывность напряжений и смещения.

В упругой области напряжения и смещение можно представить [1] через одну аналитическую функцию комплексного переменного (μ — модуль сдвига)

$$w = \operatorname{Re} f(z), \quad \tau = \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu \overline{f'(z)} \quad (z = x + iy) \quad (1.7)$$

§ 2. Упруго-пластическая задача для произвольного отверстия в неограниченной плоскости в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие. Пусть кусочно-гладкий контур отверстия C в комплексной плоскости z описывается уравнениями в параметрической форме $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — периодические, однозначные функции с одним и тем же периодом T , имеющие кусочно-непрерывную производную (фиг. 1, а). К отверстию приложена нагрузка $\tau_{zn} = k\tau(t)$, где $\tau(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $|\tau(t)| \leq 1$. Контур пластической области L охватывает все отверстие C . По формуле (1.5) на основании граничных данных находим напряжения в пластической области

$$\tau = ke^{i\theta}$$

вдоль прямой

$$\begin{aligned} y - \eta(t) &= -(x - \xi(t)) \operatorname{ctg} \theta \\ \theta &= \alpha(t) - \beta(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \cos \alpha(t), \quad \xi'(t) = \sin \beta(t) \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} \\ (0 < \alpha(t) < \pi, \quad 0 < \beta(t) < 2\pi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функция $\theta = \theta(t)$, задаваемая соотношением (2.1), кусочно-непрерывна. Потребуем, чтобы обратная функция $t = t(\theta)$ была однозначной.

Предположим, что каждая линия скольжения пересекает контур L в одной точке; и наоборот, из каждой точки контура L можно провести лишь одну линию скольжения, исходящую из контура тела C .

Легко получить соотношение, связывающее функцию θ с координатами точки контура пластической области $z = |z|e^{i\varphi}$, в которой напряжение определяется формулой (2.1) (фиг. 1, а)

$$|z| \cos(\varphi - \theta) = \eta(t) \sin \theta + \xi(t) \cos \theta \quad (2.3)$$

На контуре L раздела упругой и пластической областей согласно формулам (2.1) и (1.2) имеем условие непрерывности напряжений

$$\mu f'(z) = ke^{-i\theta} \quad (2.4)$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного

$$\zeta = \frac{\mu}{k} f'(z), \quad z = \omega(\zeta) \quad (2.5)$$

Согласно граничному условию (2.4) и ранее указанному предположению контуру L плоскости z взаимно однозначно соответствует единичная окружность плоскости ζ $\zeta = e^{i\gamma}$, $\gamma = -\theta$, а упругой области — внутренность этой окружности (фиг. 1, б).

Функция $\omega(\zeta)$ может оказаться неоднозначной. Пусть при $z \rightarrow \infty$

$$f'(z) = f_0 + f_1/z + O(z^{-2}), \quad f_0 = \mu^{-1} (\tau_{xz}^{\infty} - i\tau_{yz}^{\infty}), \quad f_1 = F/2\pi\mu$$

Здесь τ_{xz}^{∞} , τ_{yz}^{∞} — напряжения в бесконечно удаленной точке; F — главный вектор сил, приложенных к контуру [6]. Для того чтобы пластическая область охватывала все отверстие, необходимо, чтобы

$$f_0 = 0, \quad f_1 \neq 0 \quad (2.6)$$

Первое из этих условий следует из принципа максимума модуля, второе — из принципа соответствия границ [7,8]; условия (2.6) являются условиями однозначности функции $z = \omega(\zeta)$ при $|\zeta| \leq 1$, причем точка $\zeta = 0$ является полюсом первого порядка, так что $\omega(\zeta) = f_1/\zeta + O(1)$ при $\zeta \rightarrow 0$. Вообще, функция ζ неоднолистка. В частности, всегда, когда $f_1 = 0$, точка $\zeta = f_0$ является точкой разветвления функции $\omega(\zeta)$.

На плоскости годографа ζ для функции $\omega(\zeta)$ по формуле (2.3) получаем следующую краевую задачу:

$$\operatorname{Re} [\zeta \omega(\zeta)] = \rho(\gamma) \quad \text{при } \zeta = e^{i\gamma} \quad (2.7)$$

$$\rho(\gamma) = -\eta[t(-\gamma)] \sin \gamma + \xi[t(-\gamma)] \cos \gamma$$

Здесь $\rho(\gamma)$ известная непрерывная и однозначная функция

$$\zeta \omega(\zeta) = f_1 + O(\zeta) \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

По формуле Шварца [7,9,10] получаем решение (2.7), (2.8)

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi\zeta} \int_0^{2\pi} \rho(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma \quad (2.9)$$

Устремляя $\zeta \rightarrow e^{i\gamma}$, получаем параметрическое уравнение контура раздела L упругой и пластической областей

$$z(\gamma) = e^{-i\gamma} \left[\rho(\gamma) - f_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{1 - e^{i(\gamma-\sigma)}} \right] \quad (2.10)$$

Интеграл в формуле (2.10) понимается в смысле главного значения. Отметим, что после построения контура L следует проверить, выполняется ли указанное ранее предположение.

Для того чтобы существовало решение задачи в виде (2.9) и (2.10), необходимо, чтобы функция $\rho(\gamma)$ удовлетворяла двум условиям

$$(1) \quad |z(\gamma)| \geq \xi^2(t) + \eta^2(t) \quad \left(\arg z(\gamma) = \arctg \frac{\eta(t)}{\xi(t)} \right) \quad (2.11)$$

(2) Функция $\arg z(\gamma)$ должна быть однозначной

Нужно заметить, что, так как при решении задачи была использована диаграмма Прандтля без участка разгрузки, то тем самым неявно полагалось, что работа пластической деформации всюду в пластической области положительна. Таким образом, решение задачи справедливо только для таких путей нагружения, при которых контуры раздела упругой и пластической областей последовательно охватывают одна другую, или, по крайней мере, соприкасаются на некоторых участках. В противном случае контур границы упругой и пластической областей, так же как и все решение в целом, будет зависеть от пути нагружения. Для путей нагружения, удовлетворяющих указанному условию, ограничения (2.11), наложенные на функцию $\rho(\gamma)$, будут и достаточными для существования решения исходной упруго-пластической задачи. Замечание относительно путей нагружения, а также условие (2.11) относятся и ко всем последующим решениям упруго-пластических задач.

§ 3. Вспомогательная краевая задача. 1°. Пусть требуется определить аналитическую в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функцию $\omega(z)$ по нелинейному краевому условию на действительной оси

$$|\omega(t)| = \alpha(t) \quad (t \in L), \quad \text{Re} [(a(t) - ib(t)) \omega(t)] = 0 \quad (t \in M) \quad (3.1)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$ — непрерывные почти всюду функции, удовлетворяющие условию Гельдера на интервалах непрерывности и в бесконечно удаленной точке ($a + ib \neq 0$); $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, L_k — отрезок $-\infty < a_k \leq t \leq b_k < \infty$; M — множество точек действительной оси, лежащих вне L .

Потребуем по меньшей мере интегрируемости функции $\omega(z)$ в концах отрезков $t = a_k$, $t = b_k$, а также в точках разрыва коэффициента $a - ib$ ($t = c_k$) и функции $\alpha(t)$ ($t = d_k$).

Укажем прием решения краевой задачи (3.1), основанный на сведении ее к нелинейной краевой задаче Римана, разрешаемой в замкнутом виде при помощи методов, аналогичных классическим методам решения линейных краевых задач, развитых в монографиях Н. И. Muskhelishvili [9] и Ф. Д. Гахова [10]. В отношении нелинейных краевых задач и родственных им проблем нелинейных сингулярных интегральных уравнений известны главным образом качественные исследования, касающиеся вопросов существования и единственности решения. В работе [11] рассмотрено также несколько нелинейных задач, разрешаемых в замкнутом виде.

2°. Канонической функцией нелинейной краевой задачи (3.1) будем называть кусочно-аналитическую функцию $X(z)$ с линией разрыва — действительной осью, — являющуюся канонической функцией задачи Римана

$$X^+(t) = G(t) X^-(t), \quad G(t) = \begin{cases} -\frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)} & (t \in M) \\ 1 & (t \in L) \end{cases} \quad (3.2)$$

причем вблизи точек $t = c_k$ класс $X(z)$ совпадает с заданным классом функции $\omega(z)$, а в точках a_k и b_k функция $X(z)$ ограничена.

Определенная таким образом каноническая функция задачи (3.1) запишется в виде [9,10]

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (z - b_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.3)$$

Пусть $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ — индекс задачи Римана (3.2), определяемый обычным образом ([10], стр. 436).

Краевое условие (3.1) перепишем следующим образом:

$$\omega(t) \overline{\omega(t)} = \alpha^2(t) \quad (t \in L), \quad (a - ib) \omega(t) + (a + ib) \overline{\omega(t)} = 0 \quad (t \in M) \quad (3.4)$$

Введем аналитическую во всей плоскости z , кроме, может быть, действительной оси, функцию $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \omega(z) / X^+(z) & \text{при } \operatorname{Im} z > 0 \\ \overline{\omega(z)} / X^-(z) & \text{при } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Краевое условие (3.4) при помощи формул (3.5) и (3.2) можно записать в виде

$$\Phi^+ \Phi^- = \alpha^2(t) X^{-2}(t) \quad (t \in L), \quad \Phi^+ - \Phi^- = 0 \quad (t \in M) \quad (3.6)$$

Функция $\Phi(z)$ в точках c_k , очевидно, имеет нулевой порядок и на бесконечности порядок $-\kappa$.

Итак, задача (3.1) свелась к нелинейной краевой задаче Римана: определить аналитическую вне разрезов L функцию $\Phi(z)$ по условию

$$\Phi^+ \Phi^- = \beta(t) \quad (t \in L), \quad \beta(t) = \alpha^2(t) X^{-2}(t) \quad (3.7)$$

В работе [12] была рассмотрена нелинейная краевая задача Римана типа

$$[\Phi^+(t)]^n = G(t) \Phi^-(t) + g(t)$$

где n — целое число > 1 , для простого гладкого замкнутого контура, разбивающего плоскость на внутреннюю и внешнюю области. В этой задаче индекс функции $G(t)$ играет такую же важную роль, что и в линейном случае. Нелинейный характер задачи проявляется в том, что постоянные, получающиеся при решении, должны удовлетворять условиям отсутствия точек ветвления у решения. Частный случай задачи этого типа рассмотрен в сделанной раньше работе [13]. Заметим сейчас, что при $n < 0$ индекс функции $G(t)$ перестает играть важную роль в вопросах разрешимости и определяющим является уже внутреннее свойство самой функции $\Phi(z)$ — число нулей ее во внутренней или внешней области. Задача (3.7) может быть сведена к линейной краевой задаче Римана для аналитической функции, вообще говоря, имеющей логарифмические особенности.

Замечание. Значения функции $G(t)$ на L были приняты равными единице лишь для определенности (3.2). В конкретных задачах удобнее доопределять $G(t)$ на L непрерывным образом, чтобы абсолютная величина индекса κ была возможно меньше.

3°. Рассмотрим задачу (3.7) для односвязной области, ограниченной простым гладким замкнутым контуром. Предположим сначала, что $\beta(t)$ удовлетворяет условию Гельдера и нигде не обращается в нуль на контуре L , разделяющем внутреннюю D^+ и внешнюю область D^- . Индекс $\beta(t)$, очевидно, равен разности числа нулей функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ в областях их определения D^+ и D^- .

Рассмотрим функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, определяемые выражениями

$$\Phi^+(z) = M_1(z) e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = \frac{M_2(z)}{M_1(z)} e^{-\Gamma^-(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \frac{\beta(\tau)}{M_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (3.8)$$

Здесь $M_1(z)$ и $M_2(z)$ — произвольные неаналитические, вообще говоря, функции, непрерывно продолжимые на контур L , такие что $M_1^+(t) = M_1^-(t)$, $M_2^+(t) = M_2^-(t)$; предполагается, что интеграл по контуру L имеет определенный смысл и для него справедлива формула Сохоцкого. Формулы (3.8) дают некоторое решение функционального

уравнения (3.7) для односвязной области, в классе неаналитических функций. Не занимаясь вопросом о степени общности этого решения, заметим, однако, что легко доказать при некоторых весьма общих предположениях единственность представления (3.8) в классе аналитических функций, имеющих изолированные особенности. Сужением класса допустимых функций $M_1(z)$ и $M_2(z)$ можно получить все требуемые аналитические решения краевой задачи (3.7) для односвязной области.

Пусть аналитические функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ имеют нулевой порядок всюду в областях их определения, а индекс функции $\beta(t)$ равен нулю. Тогда в общем решении (3.8), очевидно, нужно положить

$$M_1(z) = C, \quad M_2(z) = 1 \quad (3.9)$$

Здесь C — произвольная постоянная. Если задать значение функции $\Phi^-(z)$ на бесконечности, то решение станет единственным.

Пусть функция $\Phi^+(z)$ имеет m нулей в точках $z = a_i$ области D^+ , а функция $\Phi^-(z)$ имеет n нулей в точках $z = b_i$ области D^- , при этом $m - n = \kappa$, где $\kappa = \text{Ind } \beta(t)$. Для определенности считаем, что начало координат лежит в области D^+ . Тогда решение задачи (3.7) определяется с точностью до произвольной постоянной и находится по формулам (3.8), в которых, очевидно, нужно положить

$$M_1(z) = C \prod_{i=1}^m (z - a_i) \prod_{i=1}^n (z - b_i)^{-1}, \quad M_2(z) = z^\kappa \quad (3.10)$$

Если на $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ не накладывать дополнительных требований, касающихся числа и расположения нулей, как это было здесь сделано, то краевая задача (3.7) будет иметь бесконечное число решений, определяемых формулами (3.10) при произвольных числах a_i, b_i, m, n , таких что $a_i \in D^+, b_i \in D^-, m - n = \kappa$.

В этом состоит наиболее существенное отличие краевой задачи (3.7) от линейной краевой задачи Римана [9,10].

Пусть коэффициент $\beta(t)$ обращается в нуль или бесконечность целой степени или имеет конечное число разрывов первого рода. Удобно ввести каноническую функцию задачи (3.7), которую можно определить как кусочно-аналитическую функцию, удовлетворяющую условию (3.7), имеющую нулевой порядок всюду в конечной части плоскости и порядок, равный $-\kappa$, в бесконечно удаленной точке. Каноническая функция $X_0(z)$ задачи (3.7) находится по формулам

$$X_0^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X_0^-(z) = z^\kappa e^{-\Gamma^-(z)} \quad (3.11)$$

где $\Gamma(z)$ определяется формулой (3.8) при $M_2(\tau) = \tau^\kappa$. При помощи канонической функции $X_0(z)$ случаи, когда $\beta(t)$ обращается в нуль или бесконечность целой степени, или имеет разрывы первого рода, исследуются совершенно теми же приемами, которые используются в линейной задаче Римана [9,10], в частности, разрывы первого рода устраняются введением вспомогательных степенных функций.

Замечание. Задача (3.7) для многосвязной области, ограниченной замкнутыми контурами, не представляет никаких существенных особенностей по сравнению со случаем односвязной области.

4°. Рассмотрим задачу (3.7) для разомкнутого контура. Пусть сначала на разомкнутом контуре L , состоящем из n дуг с концами a_k и b_k , функция $\beta(t)$ почти всюду удовлетворяет условию Гельдера и не равна нулю ни в какой сходящейся последовательности точек.

Рассмотрим функцию $\Phi(z)$, определяемую выражением

$$\Phi(z) = N(z) e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{X_n(z)}{2\pi i} \left[\int_L \ln \frac{\beta(\tau)}{N^2(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{X_n^+(\tau)(\tau-z)} + N_1(z) \right] \quad (3.12)$$

$$X_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{1/2} (z - b_i)^{1/2}$$

Здесь функция $X_n(z)$ аналитическая во внешности разрезов L , причем $X_n(z) = z^n + o(z^n)$ при $z \rightarrow \infty$; $N(z)$ и $N_1(z)$ — произвольные неаналитические функции, непрерывно продолжимые на контур, такие, что $N_1^+(t) = N_1^-(t)$; $N^+(t) = N^-(t) = N(t)$; $N(t)$ почти всюду на L удовлетворяет условию Гельдера. Кроме того, предположим для простоты, что $\beta(\tau)/N^2(\tau)$ в концах отрезков ограничена и не равна нулю, а $N_1(z)$ в концах отрезков не может обращаться в бесконечность, степень которой больше $1/2$.

Формулы (3.12) дают некоторое весьма общее решение функционального уравнения (3.7) для разомкнутого контура L в классе неаналитических функций, ограниченных в концах разрезов a_k и b_k .

Можно показать, что, вообще, решение краевой задачи (3.7), по крайней мере, в классе аналитических функций, имеющих лишь изолированные особенности, имеет в концах разрезов a_k, b_k или неинтегрируемую показательную особенность или ограничено, так что из требования интегрируемости решения в концах разрезов a_k, b_k следует его ограниченность в окрестности этих концов.

Сужением класса допустимых функций $N(z)$ и $N_1(z)$ из (3.12) можно получить все требуемые аналитические решения краевой задачи (3.7) для разомкнутого контура, ограниченные в концах разрезов.

Пусть аналитическое решение задачи (3.7) имеет всюду нулевой порядок. В этом случае в формулах (3.12) нужно положить

$$N(z) = 1, \quad N_1(z) = 0 \quad (3.13)$$

причем должны удовлетворяться $(n-1)$ условий

$$\int_L \frac{\tau^k \ln \beta(\tau)}{X_n^+(\tau)} d\tau = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (3.14)$$

Пусть аналитическое решение задачи (3.7) имеет m нулей в точках c_i ; $i = 1, \dots, m$ (некоторые или все c_i могут совпадать). Предположим для определенности, что точка $z = 0$ принадлежит контуру L . В общем решении (3.12) для разомкнутого контура, очевидно, надо положить

$$N(z) = z^{-m} \prod_{i=1}^m (z - c_i), \quad N_1(z) = 0 \quad (3.15)$$

причем должны выполняться $n-1$ условий

$$\int_L \frac{\tau^k}{X_n^+(\tau)} \ln \left[\beta(\tau) \tau^{2m} \left(\prod_{i=1}^m (\tau - c_i)^2 \right)^{-1} \right] d\tau = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (3.16)$$

Используя формулу, описывающую поведение интеграла типа Коши в окрестности точки контура, в которой его плотность имеет логарифмическую особенность ([10], стр. 72), легко найти, что решение задачи (3.7), даваемое формулами (3.12), (3.15) и (3.16), ограничено в окрестности точки $z = 0$. Таким образом, аналогично случаю замкнутого контура для полной определенности задачи, вообще говоря, необходимо задавать число и расположение нулей искомого решения; в противном случае, если такого задания нет, число решений бесконечно и решения определяются формулами (3.12), (3.15), (3.16) при произвольных m , c_i . При задании числа нулей m решение определяется с точностью до m произвольных постоянных.

Пусть функция $\beta(t)$ имеет в точке $z = t_1$ разрыв первого рода. Предположим, что функция $N_1(z)$ в формуле (3.12) ограничена в окрестности точки $z = t_1$, а функция $N(z)$ ограничена и не обращается в нуль в этой точке. Тогда при $z \rightarrow t_1$ по формулам (3.12)

$$\Phi(z) = (z - t_1)^{\frac{1}{2\pi i} \ln \chi} G_0(z), \quad \chi = \frac{\beta(t_1 - 0)}{\beta(t_1 + 0)} \quad (3.17)$$

где $G_0(z)$ — ограниченная при $z = t_1$ функция. Аргумент χ выбираем в зависимости от заданного класса решения в точке разрыва $z = t_1$.

Замечание. Аналогично может быть получено решение нелинейной краевой задачи типа

$$[\Phi^+(t)]^n = G(t) \Phi^-(t) + g(t)$$

где n — произвольное целое число, для замкнутого контура и задачи

$$[\Phi^+(t)]^n = G(t) \Phi^-(t)$$

для разомкнутого контура, причем при $n = 0$ решения задачи, вообще говоря, не существует, при $n > 0$ основной характеристикой задачи является

индекс $G(t)$, а при $n < 0$ — число нулей функции $\Phi(z)$. Трудности возникают в общем случае при выяснении характера произвола входящих в решение комплексных постоянных. В отношении коэффициентов $G(t)$ и $g(t)$ этих задач, а также предельных значений функции $\Phi(z)$ на контуре могут быть сделаны далеко идущие обобщения аналогично случаю линейной задачи (см. работы [14, 15], там же более полная библиография).

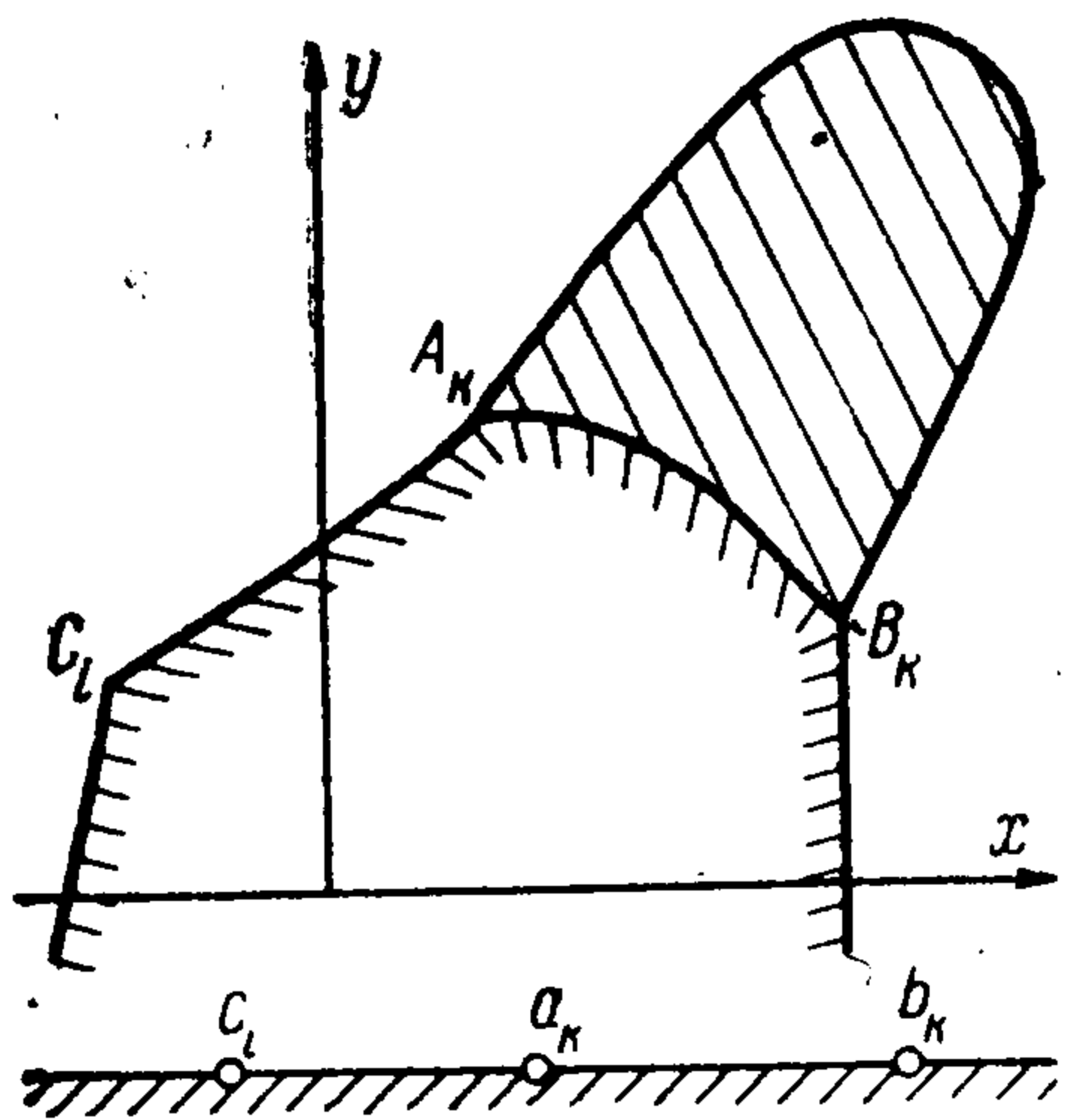
§ 4. Уруго-пластическая задача для внешности контура, образованного отрезками прямых и кривых линий в том случае, когда отрезки прямых свободны от нагрузки, а отрезки кривых дуг, произвольно нагруженные, целиком охвачены пластической зоной. 1°. Пусть криволинейная дуга отверстия, целиком охваченная пластической областью (фиг. 2), в комплексной плоскости z описывается уравнениями

$$x = \xi_k(t), \quad y = \eta_k(t) \quad (k = 1, \dots, m)$$

где $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ — непрерывные функции. К этой же дуге приложена нагрузка

$$\tau_{zn} = k\tau_k(t), \quad |\tau_k(t)| \leq 1$$

Пусть A_k, B_k, C_i — вершины многоугольника, образующего контур тела; A_k, B_k — точки криволинейных дуг, некоторые из них могут уxo-



Фиг. 2

дуть на бесконечность, $i = 1, \dots, n$. Уравнения свободных от нагрузки прямолинейных границ имеют вид

$$y = x \operatorname{tg} \theta_j + d_j \quad (j = 1, \dots, m + n)$$

где θ_j — угол, образованный j -ой прямой с осью x . Напряжения в пластических зонах даны формулами (2.1) и (2.2), где вместо $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\tau(t)$ нужно подставить $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$, $\tau_k(t)$. Пластические области не могут заходить за прямые, перпендикулярные прямолинейным отрезкам границы и выходящие из вершин A_k, B_k . В противном случае будет существовать дуга кривой, на которой $f'(z) = \operatorname{const}$, чего не может быть.

На неизвестной границе раздела упругой и пластической областей имеет место условие непрерывности напряжений (2.4), где θ определяется формулой (2.1), а на j -ом прямолинейном участке границы $y = x \operatorname{tg} \theta_j + d_j$ условие отсутствия нагрузки

$$\operatorname{Re} [(\operatorname{tg} \theta_j - i) f'(z)] = 0 \quad (4.1)$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи конформного преобразования $z = \omega(\zeta)$ так, чтобы точки C_i, A_k, B_k плоскости z перешли в точки действительной оси c_i, a_k, b_k плоскости ζ , а упругая область — в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ (фиг. 2).

Обозначим

$$\mu f'[\omega(\zeta)] = kF(\zeta) \quad (4.2)$$

Для определения двух аналитических в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta)$ на основании формул (4.1), (2.3), (2.4) и уравнений прямых получаем краевую задачу

$$|F(\zeta)| = 1 \quad \text{на } L, \quad \operatorname{Re} [(\operatorname{tg} \theta_j - i) F(\zeta)] = 0 \quad \text{на } M \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Re} [F(\zeta) \omega(\zeta)] = \rho(\theta) \quad \text{на } L, \quad \operatorname{Re} [(\operatorname{tg} \theta_j + i) \omega(\zeta)] = -d_j \quad \text{на } M \quad (4.4)$$

Здесь L — точки действительной оси, расположенные между a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots, m$), а M — остальные точки действительной оси; $\rho(\theta) = \eta[t(\theta)] \sin \theta + \xi_k[t(\theta)] \cos \theta$ на отрезке (a_k, b_k) ; функция $t(\theta)$ определяется соотношением $\theta = \alpha(t) - \beta(t)$ (см. (2.1) — (2.2)).

Краевая задача (4.3) относится к типу задач, рассмотренных в § 3, так что функция $F(\zeta)$ определяется независимо от $\omega(\zeta)$. После нахождения функции $F(\zeta)$ и подставления ее в краевое условие (4.4), для определения $\omega(\zeta)$ получаем хорошо изученную задачу Гильберта для верхней полуплоскости [9,10] (напомним, что $\theta = -\arg F(\zeta)$ на основании формулы (2.4)).

Упругая задача в условиях антиплоской деформации аналогична задачам плоской гидродинамики [6]: смещение w соответствует при этом потенциалу скорости, вектор напряжения τ соответствует вектору скорости. Рассматриваемый случай отсутствия дислокаций в гидродинамической аналогии соответствует бесциркуляционному обтеканию. Эта аналогия позволяет наглядно определить число и порядок нулей функции $F(\zeta)$, так как точка, в которой $F(\zeta)$ обращается в нуль, является критической точкой течения. В частности, когда контур тела свободен от нагрузки, а на бесконечности действует постоянное напряжение, функция $F(\zeta)$ имеет два нуля, расположенных на действительной оси, — на M . Координаты их, вообще говоря, неизвестны заранее и оп-

ределяются из решения задачи (4.4), так же как постоянные a_k, b_k, c_i (кроме трех из них, которые могут быть произвольно заданы). Изложенное решение остается справедливым также для того случая, когда тело занимает внутренность контура, образованного отрезками прямых и кривых линий, причем отрезки прямых свободны от нагрузки, а отрезки кривых дуг, произвольно нагруженные, целиком охвачены пластической зоной. При этом следует иметь в виду ограничения, аналогичные условиям (2.11), наложенные на дугу контура и характер нагрузки, а также замечание относительно пути нагружения (§ 2).

Любопытно, что решение соответствующей упругой задачи не выражается в квадратурах, так что принципиально упруго-пластическая задача оказывается проще чисто упругой. Отметим, что Л. А. Галин рассмотрел кручение стержня полигонального сечения, причем решение задачи было сведено к решению дифференциального уравнения класса Фукса [16]. Задачи теории кручения оказываются сложнее, чем для антиплоской деформации, в связи с тем что в правой части основного представления (1.7) добавляется член $\mu\omega z$, где ω угол кручения на единицу длины стержня.

2°. Несмотря на то что принципиально получено общее решение задачи в квадратурах, фактическое выполнение интеграций наталкивается на большие трудности. Поэтому представляет интерес рассмотрение частных задач более простыми средствами. Значительное упрощение может представиться, если в качестве параметрической плоскости ζ использовать плоскость годографа (2.5), в том случае, когда контуру упругой области плоскости z взаимно однозначно соответствует известный контур в плоскости годографа. Это имеет место, например, в упруго-пластической задаче для полуплоскости с вырезом, стенки которого прямолинейны, а дно произвольно закруглено и полностью охвачено пластической зоной.

Рассмотрим более подробно упруго-пластическую задачу для полуплоскости с трещиной длины l , выходящей на границу полуплоскости. Поверхность трещины и граница полуплоскости свободны от напряжений, на бесконечности действует напряжение сдвига τ_∞ . На плоскости $\zeta = (\mu/k) f'(z)$ упругая область отобразится в единичный полукруг с разрезом длины $\tau = \tau_\infty/k$. Получающаяся краевая задача легко решается при помощи двукратного аналитического продолжения через диаметр полукруга и дугу окружности. Решение имеет вид для всех ζ , кроме $\zeta = 0$

$$z = l + \frac{2l\zeta(1-\zeta^2)}{\pi X(\zeta)} \int_0^\tau \frac{(t^2-1)\sqrt{(\tau^2-t^2)(\tau^{-2}-t^2)}}{(t^2+\zeta^2)(1+t^2\zeta^2)} dt \quad (4.5)$$

$$X(\zeta) = \sqrt{(\zeta^2 + \tau^2)(\zeta^2 + \tau^{-2})}$$

Здесь $X(\zeta) = \zeta^2 + O(1)$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Интеграл в формуле (4.5) может быть выражен через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода; однако получающееся выражение громоздко и неэффективно для численных расчетов. Более эффективным является асимптотическое разложение функции $z(\zeta)$ по безразмерному параметру $\tau = \tau_\infty/k$, который считается малым.

Приведем отрезок асимптотического ряда

$$z = l + \frac{l\zeta(1-\zeta^2)}{X(\zeta)} \left\{ \frac{1}{\zeta(1-\zeta^2)} \left[\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\tau^2} \left(1 + \frac{1}{2}\tau^2\zeta^2 - \frac{1}{8}\tau^4\zeta^4 + \frac{5}{128}\tau^6\zeta^6\right)} - \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2\zeta^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{2\zeta^2} - \frac{\tau^4}{8\zeta^4} + \frac{5}{128}\frac{\tau^6}{\zeta^6}\right)} \right] + \frac{1}{\tau\zeta^2} \left[1 + \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right) + \frac{\tau^4}{8} \left(1 - \zeta^4 - \frac{1}{\zeta^4} - \zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right) - \frac{\tau^6}{16} \left(1 + \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \right] + O(\tau^7) \right\} \quad (4.6)$$

Здесь $\sqrt{1+z^2} = z + O(z^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$, разложение (4.6) справедливо для всех ζ , кроме $\zeta = 0$, при малых $\tau = \tau_\infty / k$ (практически до значений $\tau \sim 0.9$ при не слишком малых или больших ζ). В предельном случае $\tau_\infty = k$ формула (4.5) дает

$$z = l + \frac{2l}{\pi} \left[\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta(\zeta^2 + 1)} + \frac{1}{\zeta^2} \operatorname{arctg} \zeta \right] - \operatorname{arctg} \frac{1}{\zeta} \quad (4.7)$$

Здесь принято $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Найдем границу пластической области. Так как при этом $\zeta = e^{i\varphi}$, то в формуле (4.6) достаточно использовать члены до пятого порядка. На основании (4.6) и (4.7) получаем уравнение контура пластической зоны в следующем виде:

при $\tau \leq 0.8$

$$\frac{x}{l} = 1 + \frac{\tau(1 - \cos 2\varphi)}{2\sqrt{\cos 2\varphi + (1 + \tau^4)/\tau^2}} \left[1 - \frac{\tau^2}{4}(1 + 2\cos \varphi) + O(\tau^4) \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{y}{l} = \frac{\tau \sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi + (1 + \tau^4)/\tau^2}} \left[1 - \frac{\tau^2}{4}(1 + 2\cos \varphi) + O(\tau^4) \right]$$

при $\tau = 1$

$$\frac{x}{l} = 1 + \frac{2\sin \varphi}{\pi} \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \ln \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{y}{l} = \frac{2}{\pi} \left(\sin \varphi - \frac{\pi}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \ln \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} + \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)$$

Отметим простую формулу для расстояния x^* точки пересечения контура пластической области с осью x от начала координат, получаемую из (4.8) при $\varphi = \pi/2$

$$\frac{x^*}{l} = 1 + \tau^2 \left[1 + \frac{3}{4} \tau^2 + O(\tau^4) \right] \quad (4.10)$$

На фиг. 3 изображена граница пластической и упругой областей, рассчитанная по формулам (4.9) и (4.10), при значениях параметра нагружения $\tau = \tau_\infty/k$, равных 0.2, 0.5, 0.8, 1.0.

В работах [2,17] было найдено и применено к проблеме устойчивости трещины при сдвиге решение упруго-пластической задачи для трещины при малых $\tau \ll 1$.

3°. Приведем еще решение упруго-пластической задачи для тела, занимающего угол $\theta_0 > \arg z > -\theta_0$, где $\pi \geq \theta_0 > 0$. На сторонах угла заданы постоянные смещения, так что $w = h$ при $\arg z = \theta_0$ и $w = -h$ при $\arg z = -\theta_0$. Решение выглядит следующим образом:

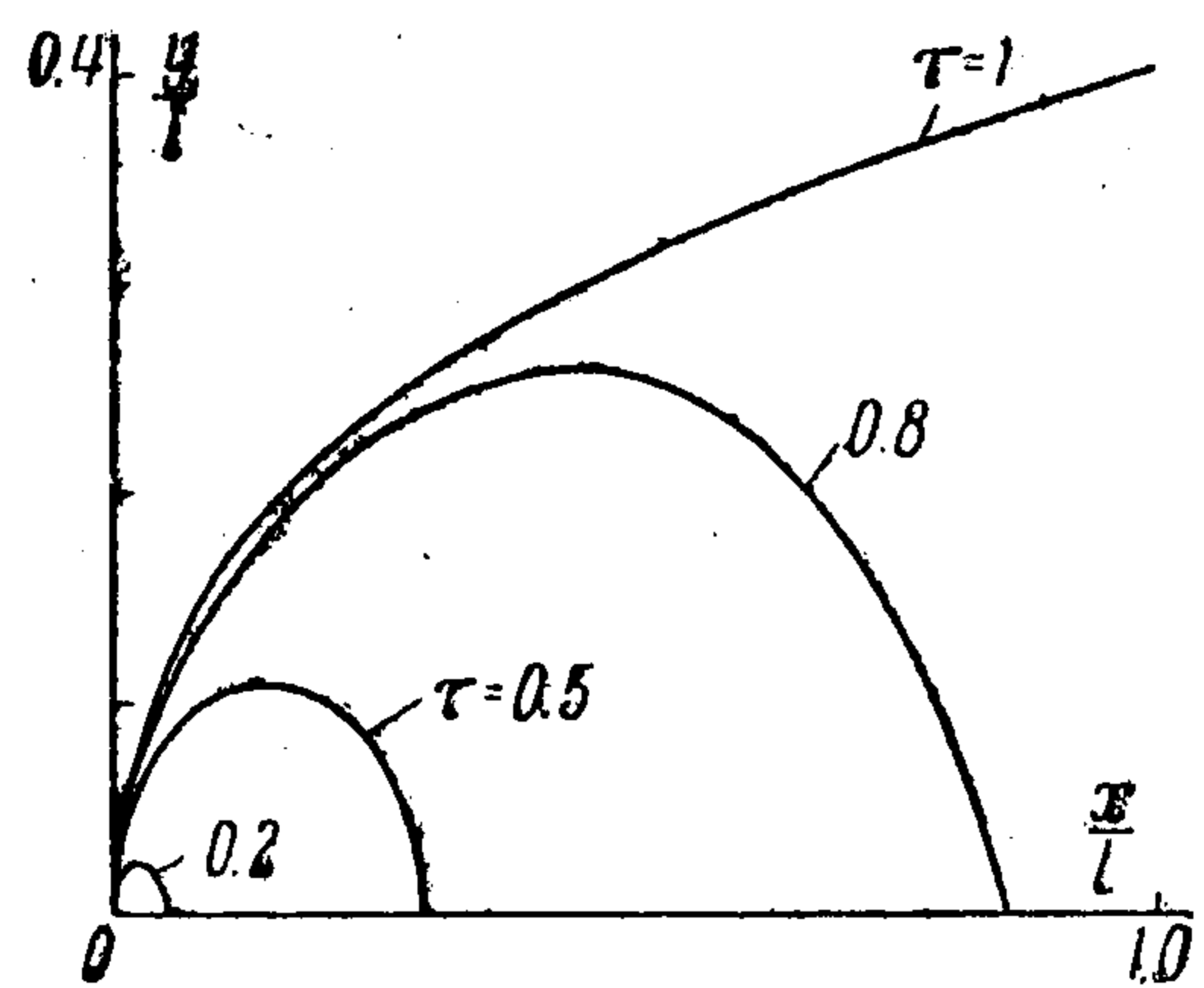
в упругой области

$$f(z) = (h / \theta_0) i \ln z$$

в пластической области

$$w = (h / \theta_0) \arg z, \quad \tau = h i e^{i \arg z} \quad (4.11)$$

граница раздела упругой и пластической областей $|z| = \mu h / \theta_0 k$.



Фиг. 3

В заключение заметим, что решение упруго-пластической задачи для контура тела, образованного отрезками прямых и кривых линий в том случае, когда отрезки прямых свободны от нагрузки, а отрезки кривых дуг, произвольно нагруженные, целиком охвачены пластической зоной, с несущественными изменениями переносится на решение аналогичной задачи, если внутри упругой области или на прямолинейных границах тела допустить существование сосредоточенных сил.

Автор благодарен Л. Я. Семенову и И. Н. Балашовой за помощь при оформлении работы.

Поступила 12 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. T r e f f t z E. Ueber die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Ueberschreitung der Fließgrenze. ZAMM, 1925, Bd. 5, s. 64—73.
2. H u l t J. A. H., M c C l i n t o c k F. A. Elastic — plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear, Ninth Intern. Congr. for Appl. Mech., Brussels, 1957, vol. 8, p. 51—58. (Русск. пер. Сб. Механика, ИЛ, 1959, № 5.)
3. N e u b e r H. Theorie der Spannungskonzentration für beliebiges nichtlineares Spannungs — Dehnungs — Gesetz in Schubbeanspruchten Prismen. (Русск. пер. Сб. Механика, ИЛ, 1961, 4(68), 117—130.)
4. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, 1956.
5. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. ГТТИ, 1950.
6. Б а р е н б л а т т Г. И. и Ч е р е п а н о в Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, XXV, вып. 6.
7. Л а в р е н т ь е в М. А. и Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
8. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
9. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., ГТТИ, 1946.
10. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.
11. Н а т а л е в и ч В. К. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций, Уч. зап. Казанского ун-та, 1952, т. 112, № 10, стр. 155—190.
12. А р ж а н о в Г. В. О нелинейной краевой задаче типа задачи Римана. Сиб. матем. журнал, 1961, т. 2, № 4, стр. 481—504.
13. С о л о в ь е в П. В. Об одной граничной задаче в теории аналитических функций. ДАН СССР, 1941, т. 33, № 3, стр. 190—192.
14. Р о г о ж и н В. С. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций. Сиб. матем. журнал, 1961, т. 2, № 5, стр. 734—746.
15. Д а н и л ю к И. И. О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами. Сиб. мат. журнал, 1960, т. I, № 2, стр. 171—198.
16. Г а л и н Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения. ПММ, 1944, т. 8, вып. 4.
17. M c C l i n t o c k F. A. Ductile fracture instability in shear, J. Appl. Mech., 1958, 25, № 4, 582—588. (Русск. пер. Сб. Механика, ИЛ, 1959, № 5.)